1 Limite di una funzione reale di variabile reale (versione 0.7)

1.1 Limite di una funzione razionale fratta

Assegnati $p(x)$ e $q(x)$ polinomi di grado m e n rispettivamente:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_m x^m \tag{1}$$
$$q(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_n x^n,$$

consideriamo la funzione:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \tag{2}$$

Se x_0 è un punto di accumulazione (al finito o all'infinito) per la funzione $f(x)$, è interessante determinare il comportamento della funzione in un intorno di x_0. A tale scopo calcoliamo il limite:

$$\lambda = \lim_{x \to x_0} f(x), \tag{3}$$

che può presentarsi nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$ (se $|x_0| < +\infty$), $\frac{\infty}{\infty}$ (se $|x_0| = +\infty$). Precisamente, se x_0 è uno zero di $p(x)$ e $q(x)$, allora la (3) dà luogo a $0/0$.

- Forma indeterminata $\frac{0}{0}$

  Si decompongono $p(x)$ e $q(x)$ in modo da ridurre il loro rapporto ai minimi termini.

- Forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$

  L'indeterminazione può essere rimossa mettendo in evidenza sia a numeratore che a denominatore, la potenza di x di esponente massimo.

Esempi (forma indeterminata $\frac{0}{0}$). Calcolare i seguenti limiti:

1. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-3x+2}{x^2+x-6}$

2. $\lim_{x \to -2} \frac{x^2-x-6}{x^3+5x^2+8x+4}$

3. $\lim_{x \to 2} \frac{x^4-8x^2+16}{x^3-8}$

4. $\lim_{x \to 2} \frac{x^3-3x^2+4}{x^3-2x^2-4x+8}$

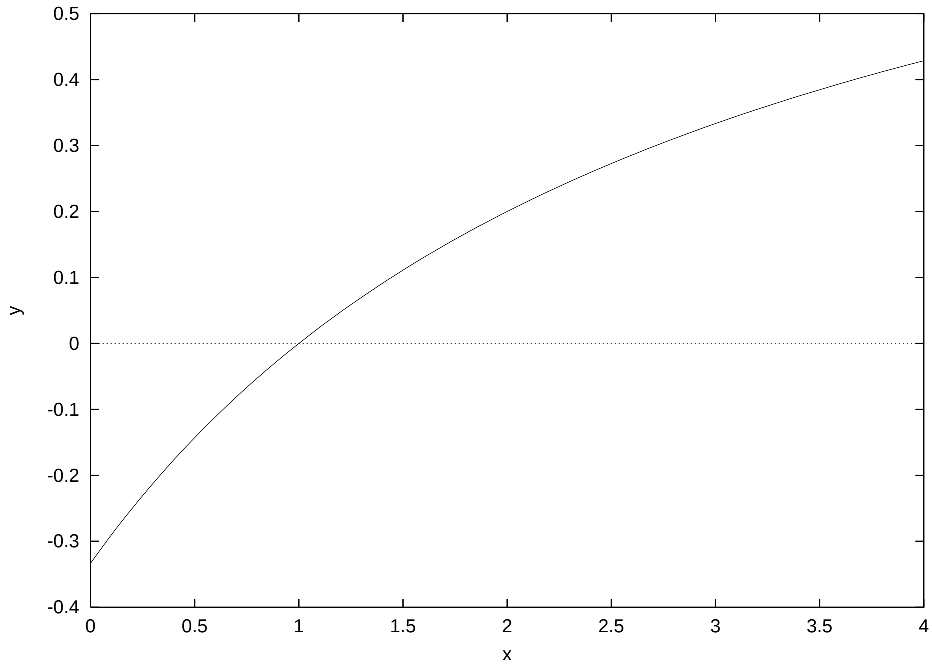


Figura 1: Grafico di $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2+x-6}$.

Soluzioni.
N. 1
Sostituendo per continuità, si ottiene la forma inderminata 0/0. Decomponiamo numeratore e denominatore:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2+x-6} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+3)} = \frac{1}{5} \tag{4}$$

Il comportamento è visibile in figura 1.
N. 2
Procedendo come sopra:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-x-6}{x^3+5x^2+8x+4} = \lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-3)}{(x+1)(x+2)^2} = \pm\infty \tag{5}$$

Il segno del limite è:

$$\lim_{x\to -2^-}\frac{x^2-x-6}{x^3+5x^2+8x+4} = -\infty$$
$$\lim_{x\to -2^+}\frac{x^2-x-6}{x^3+5x^2+8x+4} = +\infty,$$

come possiamo vedere dalla figura 2.
N. 3
Si ottiene:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^4-8x^2+16}{x^3-8} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)^2}{x^2-2x+4} = 0 \tag{6}$$

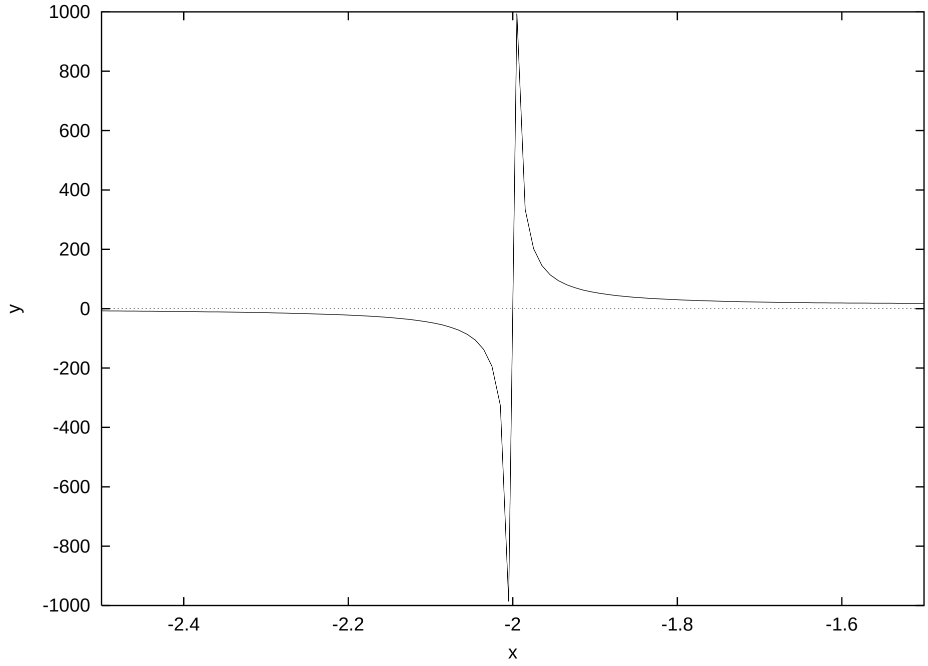


Figura 2: Grafico di $f(x) = \frac{x^2-x-6}{x^3+5x^2+8x+4}$.

N. 4
Si ottiene:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-3x^2+4}{x^3-2x^2-4x+8} = \lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x+2} = \frac{3}{4} \tag{7}$$

***

Esempi (forma inderminata $\frac{\infty}{\infty}$)
Per ipotesi $p(x)$ e $q(x)$ sono polinomi di grado m e n rispettivamente (eq. 1). La forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$ si presenta per $|x| \to +\infty$.

$$\begin{aligned}
&\lim_{|x|\to+\infty}\frac{p(x)}{q(x)}\\
&= \lim_{|x|\to+\infty}\left(x^{m-n}\frac{\sum_{k=0}^{m} a_k x^{k-m}}{\sum_{k=0}^{n} b_k x^{k-n}}\right)\\
&= x^{m-n}\frac{a_m}{b_n},
\end{aligned}$$

cioè:

$$
\begin{aligned}
\lim_{|x|\to+\infty}\frac{p(x)}{q(x)} &= \pm\infty, \quad \text{se } m>n \\
\lim_{|x|\to+\infty}\frac{p(x)}{q(x)} &= 0, \qquad \text{se } m<n \\
\lim_{|x|\to+\infty}\frac{p(x)}{q(x)} &= \frac{a_m}{b_n}, \quad \text{se } m=n
\end{aligned} \tag{8}
$$

1. $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+4x^2+x-1}{x^4}$
2. $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^5+7x^4+1}{2x^5+7}$
3. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+1}{x-1}$

Soluzioni
N.1

$$
\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^3}\right)=0 \tag{9}
$$

In maniera simile, i rimanenti due:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{4x^5+7x^4+1}{2x^5+7} &= 2 \\
\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+1}{x-1} &= \pm\infty
\end{aligned} \tag{10}
$$

1.1.1 Esercizi proposti (con soluzione)

1. $\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-3x-9}{3x^2-10x+4}$
2. $\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$
3. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$
4. $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$
5. $\lim_{x\to a}\frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$
6. $\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}$
7. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$
8. $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+1}{x}$

9. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2+x-2}{4x^2+x-1}$

10. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3+3}{x^2-1}$

11. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x-2}{x^2+x+2}$

12. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$

13. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{10000x}{x^2-10000}$

14. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-5x+1}{3x+7}$

15. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2-x+3}{x^3-8x+5}$

16. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(2x+3)^3(3x-2)^2}{x^5+5}$

1.1.2 Soluzioni

N. 1

$\lim\limits_{x\to 3} \frac{2x^2-3x-9}{3x^2-10x+4} = \frac{0}{0} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)} = \frac{4}{1} = 4$

N. 2

$\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x^2+3x+2} = \frac{0}{0} = \lim\limits_{x\to -1} \frac{x-1}{x+2} = -2$

N. 3

$\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-2x}{x^2-4x+4} = \frac{0}{0} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x(x-2)}{(x-2)^2} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x}{x-2} = \infty$

N. 4

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3} = \frac{0}{0} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x^2+2x+3)} = \frac{1}{2}$

N. 5

Questo è il limite di una funzione della variabile reale a per valori assegnati di x.

$\lim\limits_{x\to a} \frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3} = \frac{0}{0} = \lim\limits_{x\to a} \frac{(x-a)(x-1)}{(x-a)(x+ax+a^2)} = \frac{a-1}{3a^2}$

N. 6

Come nel precedente, anche in questo caso la funzione è di h per assegnati x. Più precisamente è il limite del *rapporto incrementale* relativo alla funzione $f(x) = x^3$.

$\lim\limits_{h\to 0} \frac{(x+h)^3-x^3}{h} = \frac{0}{0} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{3hx^2+3h^2x+h^2}{h} = 3x^2$

N. 7

$\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right) = \infty - \infty = \lim\limits_{x\to 1} \left[\frac{1}{1-x} - \frac{3}{(1-x)(1+x+x^2)}\right] = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{(1-x)(1+x+x^2)} =$

$= -\lim\limits_{x\to 1} \frac{x+2}{1+x+x^2} = -1$

N. 8

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2-x+1}{x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} x\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty$

N. 9

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2+x-2}{4x^2+x-1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{3+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}} = \frac{3}{4}$

N. 10

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3+3}{x^2-1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x\left(1+3x^{-3}\right)}{1-x^{-2}} = \infty$

N. 11
$\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{x^2+x+2}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-2x^{-1}}{x(1+x^{-1}+2x^{-2})}=\frac{1}{\pm\infty}=0$
N. 12
$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)^2}{x^2+1}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+2x^{-1}+x^{-2}}{1+x^{-2}}=1$
N. 13
$\lim_{x\to\infty}\frac{10000x}{x^2-10000}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{10000x^{-1}}{1-10000x^{-1}}=0$
N. 14
$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-5x+1}{3x+7}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(1-5x^{-1}+x^{-2}\right)}{3x^{-1}+7x^{-2}}=\infty$
N. 15
$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x+3}{x^3-8x+5}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-x^{-1}+3x^{-2}}{x(1-8x^{-2}+5x^{-3})}=\frac{2}{\infty}=0$
N. 16
$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+3)^3(3x-2)^2}{x^5+5}=\frac{\infty}{\infty}=$
$=\lim_{x\to\infty}\frac{72x^5+228x^4+86x^3-261x^2-108x-108}{x^5+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{72+228x^{-1}+86x^{-2}-261x^{-3}-108x^{-4}-108x^{-5}}{1+5x^{-5}}=72$

1.2 Limite di una funzione irrazionale

1.2.1 Forma indeterminata $\frac{0}{0}$

Il caso più comune è quello in cui si procede alla razionalizzazione del numeratore e/o del denominatore.
Esempi

1. $\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-a}{x-a}, a>0$
2. $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{\sqrt{x-2}}$
3. $\lim_{x\to 2}\frac{x+1-2\sqrt{x}}{(x-1)^2}$
4. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$
5. $\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x^2-a^2}+x^2(x-a)}{\sqrt{x(x-a)}+\sqrt{x^2-a^2}}, a>0$

Soluzioni
N. 1
Razionalizzando il numeratore:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=\lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

N. 2
Razionalizzando il numeratore:

$$
\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{\sqrt{x-2}}\cdot\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{2x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2x}}\\
&= -\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x-2}\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x}\right)}=\frac{0}{0}
\end{aligned}
$$

Per rimuovere l'indeterminazione occorre razionalizzare il denominatore (termine $\sqrt{x-2}$):

$$
\lambda = -\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2x}}=0
$$

N. 3
Siamo tentati a razionalizzare. Tuttavia, osservando che $x+1-2\sqrt{x}=\left(\sqrt{x}-1\right)^2$, si ha:

$$
\lim_{x\to 1}\frac{x+1-2\sqrt{x}}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2\left(\sqrt{x}+1\right)^2}=\frac{1}{4}
$$

N. 4
Evidentemente:

$$
\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)}=\frac{1}{3}
$$

N. 5
Dobbiamo "eliminare" il termine che produce indeterminazione:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{(x-a)(x+a)}+x^2\sqrt{(x-a)^2}}{\sqrt{x(x-a)}+\sqrt{(x-a)(x+a)}}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x-a}}\frac{\sqrt{(x+a)}+x^2\sqrt{x+a}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+a}}\\
&= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}=2-\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

Esercizi proposti (con soluzione)

1. $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{x}}{x-2}$
2. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{1-x^2}}{\sqrt[3]{1-x^3}}$
3. $\lim_{x\to 2}\frac{4-x^2}{3-\sqrt{5x-1}}$
4. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+3}-2}$
5. $\lim_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$

6. $\lim\limits_{x\to 8}\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$

7. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$

Soluzioni N. 1

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{x}}{x-2}=\frac{0}{0}=-\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$

N. 2

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{1-x^2}}{\sqrt[3]{1-x^3}}=\frac{0}{0}=\sqrt[3]{\lim\limits_{x\to 1}\frac{(1-x)(1+x)}{(1-x)(1+x+x^2)}}=\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$

N. 3

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{4-x^2}{3-\sqrt{5x-1}}=\frac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{4-x^2}{3-\sqrt{5x-1}}\cdot\frac{3+\sqrt{5x-1}}{3+\sqrt{5x-1}}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(2+x)\left(3+\sqrt{5x-1}\right)}{5}=\frac{24}{5}$

N. 4

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+3}-2}=\frac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+3}-2}\cdot\frac{\sqrt{x^2+3}+2}{\sqrt{x^2+3}+2}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3}+2}{(x+1)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

N. 5

$\lim\limits_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}=\frac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 7}\left[\frac{2-\sqrt{x-3}}{(x-7)(x+7)}\cdot\frac{2+\sqrt{x-3}}{2+\sqrt{x-3}}\right]=-\lim\limits_{x\to 7}\frac{1}{(x+7)\left(2+\sqrt{x-3}\right)}=-\frac{1}{56}$

N. 6

$\lim\limits_{x\to 8}\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}=\frac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 8}\frac{\left(\sqrt[3]{x}-2\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)}{\sqrt[3]{x}-2}=12$

N. 7

$\lim\limits_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}=\frac{0}{0}=-\lim\limits_{x\to 4}\frac{1+\sqrt{5-x}}{3+\sqrt{5+x}}=-\frac{1}{3}$

1.2.2 Forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$

Si procede in maniera analoga a quello delle funzioni razionali fratte.
Esempi

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+x}$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x-2}{\sqrt{4x-1}+\sqrt{x+1}}$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{1}{x}}\sqrt{x^2+1}$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2-5+\sqrt{x^4-3x+1}}{x-1+\sqrt{x^4+x-2}}$

Soluzioni
N. 1

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{\sqrt{X}}}{\frac{2}{\sqrt{X}}+1}=1$

N. 2

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x-2}{\sqrt{4x-1}+\sqrt{x+1}}=\frac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\left(3-\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{4-\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)}=+\infty$

N. 3

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{1}{x}}\sqrt{x^2+1}=0\cdot\infty=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+x^{-2}}}{x^{1/3}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{2/3}\sqrt{1+x^{-2}}\right)=+\infty$

N. 4

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2-5+\sqrt{x^4-3x+1}}{x-1+\sqrt{x^4+x-2}}=\frac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2-5x^{-1}+\sqrt{1-3x^{-3}+x^{-4}}}{x^{-1}-x^{-2}+\sqrt{1+x^{-3}-2x^{-4}}}=3$

Esercizi proposti (con soluzione).

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x-\sqrt{x}}{x+3\sqrt{x}}$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{x}}{x-2}$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[8]{x^8+1}+\sqrt[4]{x^4-1}}{\sqrt[5]{1+x^5}+\sqrt[3]{1+x^3}}$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x-1}}{x^2+x-2}$

Soluzioni N. 1

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x-\sqrt{x}}{x+3\sqrt{x}}=\frac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\left(5-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{x\left(1+\frac{3}{\sqrt{x}}\right)}=5$

N. 2

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{x}}{x-2}=\frac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{2x^{-1}}-1\right)}{x(1-2x^{-1})}=0^+$

N. 3

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[8]{x^8+1}+\sqrt[4]{x^4-1}}{\sqrt[5]{1+x^5}+\sqrt[3]{1+x^3}}=\frac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[8]{1+x^{-8}}+\sqrt[4]{1-x^{-4}}}{\sqrt[5]{x^{-5}+1}+\sqrt[3]{x^{-3}+1}}=1$

N. 4

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x-1}}{x^2+x-2}=\frac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1-x^{-1}}}{x(1+x^{-1}-2x^{-2})}=\frac{1}{+\infty}=0^+$

1.2.3 Forma indeterminata $\infty-\infty$

Al primo step si riconduce tale forma alla $\frac{\infty}{\infty}$. Consideriamo la funzione:

$$f(x)=\sqrt[N]{p(x)}\pm\sqrt[N]{q(x)}, \tag{11}$$

essendo $p(x)$ e $q(x)$ polinomi dati dalla (1). Senza perdita di generalità, supponiamo che i coefficienti di tali polinomi siano tali che:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\infty-\infty \tag{12}$$

La forma indterminata (12) si riconduce alla forma $\frac{\infty}{\infty}$ razionalizzando in maniera opportuna la funzione $f(x)$. Più precisamente, il fattore razionalizzante è dato da:

$$r(x)=\sum_{k=1}^{N}(\mp1)^{k+1}\sqrt[N]{p(x)^{N-k}q(x)^{k-1}} \tag{13}$$

Si dimostra che:

$$\lim_{x\to+\infty}\left\{\left[\sqrt[N]{p(x)}\pm\sqrt[N]{q(x)}\right]\frac{\sum_{k=1}^{N}(\mp)^{k+1}\sqrt[N]{p(x)^{N-k}q(x)^{k-1}}}{\sum_{k=1}^{N}(\mp)^{k+1}\sqrt[N]{p(x)^{N-k}q(x)^{k-1}}}\right\}=\frac{\infty}{\infty}$$

Esempi

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{2x} \right)$

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x + \sqrt[4]{x^4 + 1} \right)$

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x + 12} - x \right)$

Soluzioni
N. 1
Qui è:

$$p(x) = x - 1, q(x) = 2x, \ N = 3, \ f(x) = \sqrt[N]{p(x)} - \sqrt[3]{q(x)} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \infty - \infty$$

La funzione (13) è:

$$\begin{aligned} r(x) &= \sum_{k=1}^{3} (\mp 1)^{k+1} \sqrt[N]{p(x)^{N-k} q(x)^{k-1}} \\ &= \sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{2x(x-1)} + \sqrt[3]{2x}, \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} f(x) &= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{2x} \right) \left[\sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{2x(x-1)} + \sqrt[3]{2x} \right]}{\sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{2x(x-1)} + \sqrt[3]{2x}} \\ &= \lim_{x \to +\infty} \frac{x - 1 - 2x}{r(x)} \\ &= - \lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x^{2/3} \sqrt[2]{1 - 2x^{-1} + x^{-2}} + x^{2/3} \sqrt[3]{2(1 - x^{-1})} + \sqrt[3]{4}} \\ &= - \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{1/3} (1 + x^{-1})}{\sqrt[2]{1 - 2x^{-1} + x^{-2}} + \sqrt[3]{2(1 - x^{-1})} + \sqrt[3]{4}} = -(+\infty) = -\infty \end{aligned}$$

N. 2
Per ridurre la funzione $f(x)$ alla forma (11), scriviamo: $x = \sqrt[4]{x^4}$, donde:

$$f(x) = \sqrt[N]{p(x)} + \sqrt[N]{q(x)},$$

essendo:

$$p(x) = x^4, q(x) = x^4 + 1, N = 4$$

Evidentemente:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty - \infty$$

Il fattore $r(x)$ è:

$$
\begin{aligned}
r(x) &= \sum_{k=1}^{4}\left[\left(x^4\right)^{4-k}\left(x^4+1\right)^{k-1}\right] \\
&= \sqrt[4]{x^{12}}+\sqrt[4]{x^8\left(x^4+1\right)}+\sqrt[4]{x^4\left(x^4+1\right)^2}+\sqrt[4]{\left(x^4+1\right)^3} \\
&= \left|x^3\right|+x^2\sqrt[4]{x^4+1}+|x|\sqrt{x^4+1}+\sqrt[4]{\left(x^4+1\right)^3}
\end{aligned}
$$

Da ciò segue:

$$
\begin{aligned}
f(x)\,r(x) = {}& x\left|x^3\right|+\left(x+\left|x^3\right|\right)\sqrt[4]{x^4+1}+\left(x^2+x|x|\right)\sqrt{x^4+1}+\left(x+|x|\right)\sqrt[4]{\left(x^4+1\right)^3} \\
&+x^4+1
\end{aligned}
$$

Per $x\to-\infty$ è $\forall n\in\mathbb{N}, \left|x^{2n+1}\right|=-x$, per cui l'espressione precedente diviene:

$$
f(x)\,r(x)=-x^4+x^4+1=1,
$$

quindi il limite:

$$
\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)\,r(x)}{r(x)}=\frac{1}{+\infty}=0^+,
$$

giacché $r(x)\underset{x\to-\infty}{\longrightarrow}+\infty$.

N. 3

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+12}-x\right)=\infty-\infty=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+12}-\sqrt{x^2}\right)$

Il fattore razionalizzante è:

$$
\begin{aligned}
r(x) &= \sum_{k=1}^{2}\sqrt{\left(x^2+3x+12\right)^{2-k}\left(x^2\right)^{k-1}} \\
&= \sqrt{x^2+3x+12}+|x| \underset{x>0}{=} \sqrt{x^2+3x+12}+x
\end{aligned}
$$

Ciò implica:

$$
\begin{aligned}
& f(x)\,r(x)=3x+12 \\
\lim_{x\to+\infty}&\frac{f(x)\,r(x)}{r(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3+12x^{-1}}{\sqrt{1+3x^{-1}+12x^{-2}}+1}=\frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

Esercizi proposti (con soluzione)

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{5x^2+2x+1}-x\right)$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+1}-x\right)$

3. $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{x^2-2}\right)$

4. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[N]{ax^N+bx+c}+2x+\sqrt[N-1]{x^2+5}}{2x+\sqrt[N-1]{x^2+5}}$ con N pari e >2; $a>0,b,c$ coefficienti reali e tali che la funzione sia definita per $x\to-\infty$.

5. $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+1}\right)$

6. $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-\sqrt{4x^2-1}}{\sqrt[3]{x^2-2}}$

7. $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-\sqrt{4x^2-1}}{\sqrt[3]{x^2-2}}$

8. $\lim_{x\to-\infty}x\left(\sqrt{x^2-12x+1}-\sqrt{3x^2+x+2}\right)$

9. $\lim_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt[3]{1-x^3}\right)$

Soluzioni N. 1

$l=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{5x^2+2x+1}-x\right)=\infty-\infty$; fattore razionalizzante: $r(x)=\sqrt{5x^2+2x+1}+x$. Quindi:

$$l=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+2x+1}{\sqrt{5x^2+2x+1}+x}=+\infty \tag{14}$$

N. 2

$l=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+1}-x\right)=\infty-\infty$; fattore razionalizzante: $r(x)=\sqrt{x^2+2x+1}+x$. Quindi:

$$l=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+2x+1}+x}=1 \tag{15}$$

N. 3

$l=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{x^2-2}\right)=\infty-\infty$. Il fattore razionalizzante è: $r(x)=\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{x^2-2}$

$$l=-\lim_{x\to+\infty}\frac{-4+3x^{-1}}{\sqrt{1-4x^{-1}+3x^{-2}}+\sqrt{1-2x^{-2}}}=-2 \tag{16}$$

N. 4

$l=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[N]{ax^N+bx+c}+2x+\sqrt[N-1]{x^2+5}}{2x+\sqrt[N-1]{x^2+5}}=\frac{\infty-\infty}{\infty}=1+l'$, con $l'=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[N]{ax^N+bx+c}}{2x+\sqrt[N-1]{x^2+5}}$.

Risulta:

$$\begin{aligned}
l' &= \lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt[N]{a+bx^{1-N}+cx^{-N}}}{x\left(2+\sqrt[N-1]{x^{3-N}+5x^{1-N}}\right)}\\
&= \frac{\sqrt[N]{a}}{2}\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|}{x}\\
&= -\frac{\sqrt[N]{a}}{2}
\end{aligned}$$

Il limite lè:

$$l = 1 - \frac{\sqrt[N]{a}}{2} \tag{17}$$

N. 5
$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x} - \sqrt{x+1}\right) = (+\infty)(\infty - \infty) = \infty - \infty = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2} - \sqrt{x^2+x}\right)$
Fattore razionalizzante:

$$r(x) = \sqrt{x^2} + \sqrt{x^2+x}$$

Il limite diventa:

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x^2 - x}{\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2+x}} \\ &= -\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x\left(1+\sqrt{1+x^{-1}}\right)} = -\frac{1}{2} \end{aligned} \tag{18}$$

N. 6
$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x-\sqrt{4x^2-1}}{\sqrt[3]{x^2-2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x-|x|\sqrt{4-x^{-2}}}{x^{2/3}\sqrt[3]{1-2x^{-2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(2-\sqrt{4-x^{-2}}\right)}{x^{2/3}\sqrt[3]{1-2x^{-2}}} = -\infty$
N. 7
$l = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x-\sqrt{4x^2-1}}{\sqrt[3]{x^2-2}} = \frac{\infty-\infty}{\infty}$, è preferibile calcolare a parte il limite del numeratore:

$$\begin{aligned} l_1 &\stackrel{def}{=} \lim_{x\to+\infty} \left(2x - \sqrt{4x^2-1}\right) \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{4x^2} - \sqrt{4x^2-1}\right)\left(\sqrt{4x^2} + \sqrt{4x^2-1}\right)}{\sqrt{4x^2} + \sqrt{4x^2-1}} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{4x^2} + \sqrt{4x^2-1}} = \frac{1}{+\infty} = 0^+ \end{aligned}$$

Quindi:

$$l = \frac{0^+}{+\infty} = 0^+ \tag{19}$$

N. 8
$l = \lim_{x\to-\infty} x\left(\sqrt{x^2-12x+1} - \sqrt{3x^2+x+2}\right) = (-\infty)(\infty-\infty)$
$= \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^4-12x^3+x^2} - \sqrt{3x^4+x^3+2x^2}\right) =$
$\lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{x^4-12x^3+x^2}-\sqrt{3x^4+x^3+2x^2}\right)\left(\sqrt{x^4-12x^3+x^2}+\sqrt{3x^4+x^3+2x^2}\right)}{\sqrt{x^4-12x^3+x^2}+\sqrt{3x^4+x^3+2x^2}}$
$= -\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^4+13x^3+x^2}{x^2\left(\sqrt{1-12x^{-1}+x^{-2}}+\sqrt{3+x^{-1}+2x^{-3}}\right)} = +\infty$
N. 9
$l = \lim_{x\to+\infty} \left(x + \sqrt[3]{1-x^3}\right) = \infty - \infty = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{x^3} + \sqrt[3]{1-x^3}\right)$
Fattore razionalizzante:

$$r(x) = \sum_{k=1}^{3} (-1)^{k+1} \sqrt[3]{(x^3)^{3-k} (1-x^3)^{k-1}} \tag{20}$$
$$= x^2 - x\sqrt[3]{1-x^3} + \sqrt[3]{(1-x^3)^2}$$

La (20) implica:

$$f(x) = \frac{f(x)\, r(x)}{r(x)} = \frac{1}{r(x)} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} = 0^+ \tag{21}$$

1.3 Funzioni trigonometriche (parte prima)

Come nelle sezioni precedenti si calcola il limite per "continuità", cioè sostituendo il valore di x_0 nell'espressione analitica della funzione. Il caso più semplice è quello in cui il limite è immediato.

1.3.1 Esempi

1. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x(1-\cos x) = (+\infty)(1-0) = +\infty$

2. $\lim_{x \to 2^+} \frac{3-x}{\sin(2-x)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

3. $\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \left[6\cos x - \ln\left(\cos x + \sqrt{\cos^2 x - \frac{1}{4}}\right)\right] = 6 \cdot \frac{1}{2} - \ln\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}}\right) = 3 + \ln 2$

4. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} e^{|\cos x|} |\cos x| = \exp\left(\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} |\cos x|\right) \cdot \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} |\cos x|$

   $= \exp\left(\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} (-\cos x)\right) \cdot \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} (-\cos x) = e^{0^+} \cdot 0^+ = 0^+$

5. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} e^{|\cos x|} |\cos x| = \exp\left(\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \cos x\right) \cdot \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \cos x = 0^+$

6. $l = \lim_{x \to -2\pi^+} e^{\sin x} \sin|x| = \prod_{k=1}^{2} l_k$

   $l_1 = \lim_{x \to -2\pi^+} e^{\sin x};\ \ l_2 = \lim_{x \to -2\pi^+} \sin|x|;$

   $l_1 = \exp\left(\lim_{x \to -2\pi^+} \sin x\right) = e^{0^+} = 1^+$

   $l_2 = \lim_{x \to -2\pi^+} \sin|x| = 0^-$

   $l = 1^+ \cdot 0^- = 0^-.$

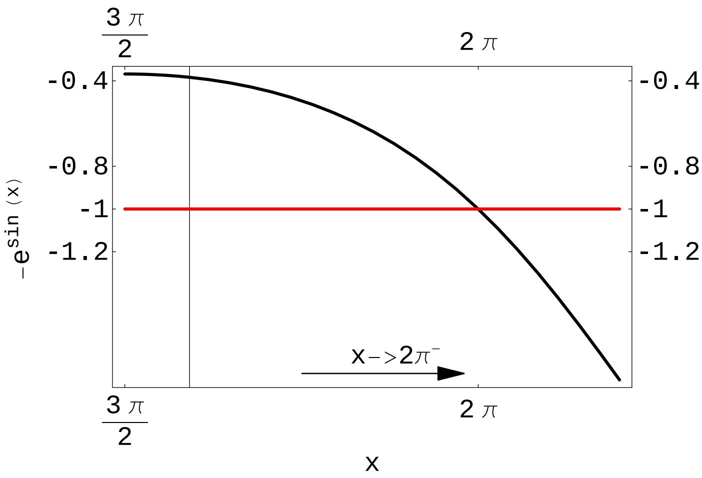


Figura 3: Grafico di $-e^{\sin x}$

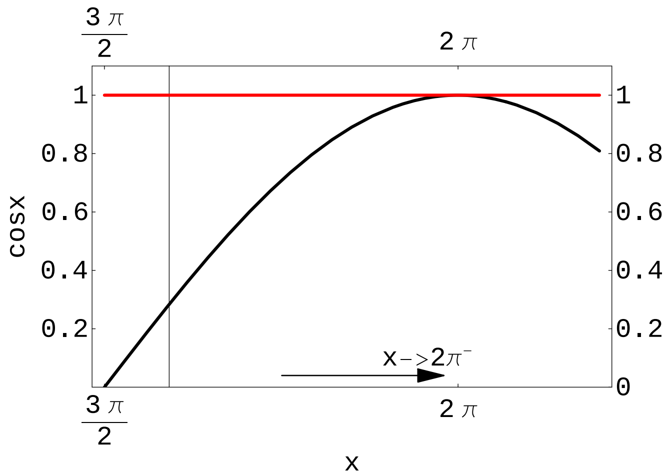


Figura 4: Grafico di $\cos x$

7. $l = \lim_{x \to 2\pi^-} \left[-e^{\sin x} \cos x \left(\sin x + 1 \right) \right] = \prod_{k=1}^{3} l_k$

   $l_1 = \lim_{x \to 2\pi^-} \left(-e^{\sin x} \right) = -1^+; \ \ l_2 = \lim_{x \to 2\pi^-} \cos x = 1^-; \ \ l_3 = \lim_{x \to 2\pi^-} \left(\sin x + 1 \right) = 1^-$

   Per determinare il segno dei singoli limiti è conveniente tracciare in un intorno di $x_0 = 2\pi$ il grafico delle funzioni con un software del tipo `Mathematica`, come riportato in figura 3 e seguenti.

   Il limite è: $l = (-1^+) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1^+$ (fig. 6).

8. $\lim_{x \to \infty} \sin x$

   Questo limite non esiste, in quanto la funzione $\sin x$ è periodica in $\mathbb{R}$. Più in generale, se $f(x)$ è definita in $(-\infty, +\infty)$ ed è ivi periodica di periodo T, non esiste il limite di f per $x \to \pm\infty$. Per dimostrare l'asserto procediamo per assurdo; a tale scopo rammentiamo la definizione di limite (senza perdita di generalità consideriamo il caso

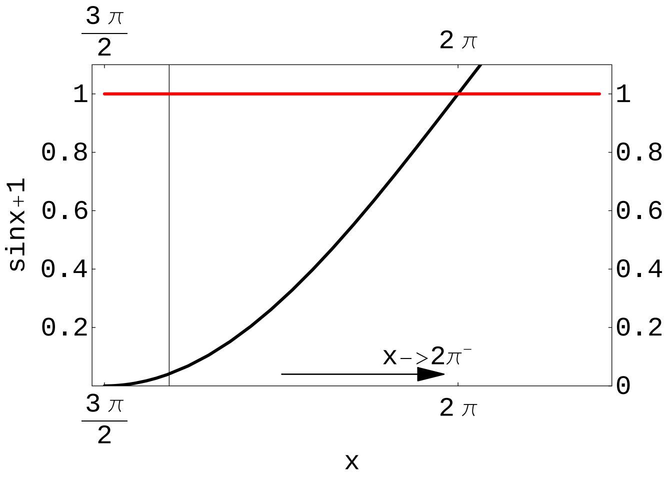


Figura 5: Grafico di $\sin x + 1$

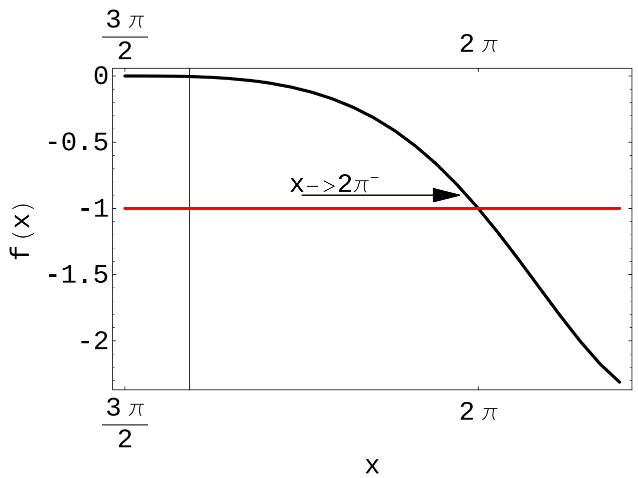


Figura 6: Grafico di $f\left(x\right) = -e^{\sin x} \cos x \left(\sin x + 1\right)$

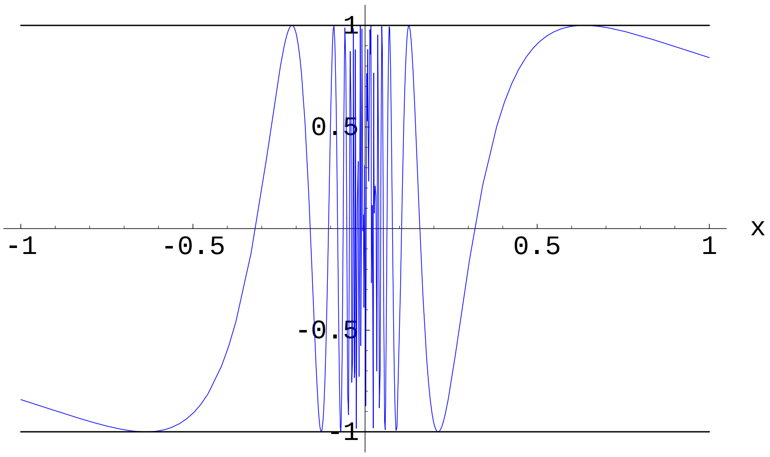


Figura 7: Grafico di $f(x) = \sin \frac{1}{x}$

$x \to +\infty$):

$$\left.\lim_{x \to +\infty} f(x) = l\right) \Longleftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 : x > \delta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \tag{22}$$

Per ipotesi f è periodica, quindi compie oscillazioni tra $\inf f$ e $\sup f$, donde:

$$|f(x) - l| = \begin{cases} |\inf f - l|, \text{ per } f(x) = \inf f \\ |\sup f - l|, \text{ per } f(x) = \sup f \end{cases}$$

Risulta :

$$\exists \varepsilon_* = \min\{|\inf f - l|, |\sup f - l|\} > 0 : x > \delta_{\varepsilon_*} \Longrightarrow |f(x) - l| > \varepsilon_*$$

Ma ciò contraddice la (22). Tale assurdo dimostra l'asserto. Nel caso speciale delle funzioni trigonometriche, si conclude che non esistono i seguenti limiti:

$$\lim_{x \to \infty} \sin x, \lim_{x \to \infty} \cos x, \lim_{x \to \infty} \tan x, \text{ ecc.}$$

9. $\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$

   Questo limite non esiste. Per dimostrare ciò, eseguiamo il cambio di variabile $x \to y = x^{-1}$, donde:
   $$\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x} = \lim_{y \to \infty} \sin y,$$
   che, in forza dell'esempio 8, non esiste. La funzione $f(x) = \sin(x^{-1})$ in ogni intorno di $x_0 = 0$ compie infinite oscillazioni tra -1 e $+1$ compe possiamo vedere dal grafico di fig. 7.

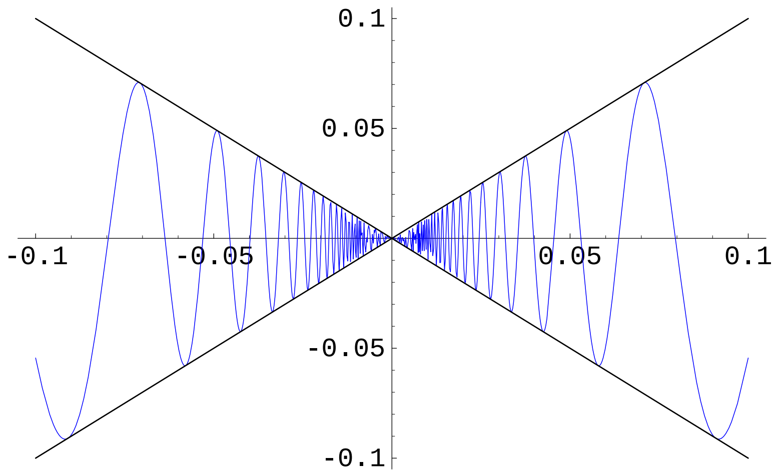


Figura 8: Grafico di $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$. La curva $y = f(x)$ giace tra le due rette di equazione: $y = x$, $y = -x$.

10. $\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x}$

    La funzione $f(x) = x \sin x^{-1}$ non è definita in $x = 0$. D'altro canto:

$$\left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| \Longleftrightarrow -|x| \leq x \sin \frac{1}{x} \leq |x| \tag{23}$$

    La (23) implica che:

$$\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} |x| = 0$$

    Intorno al punto $x = 0$ il diagramma della funzione compie infinite oscillazioni che si smorzano per $x \to 0$, come possiamo vedere dalla figura 8.

11. $\lim_{x\to 0} x^n \sin \frac{1}{x}$ con $n > 1$

    Evidentemente: $\lim_{x\to 0} x^n \sin \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} x^n = 0$. In tal caso la funzione oscilla tra le due curve $y = x^n$, $y = -x^n$.

***

Una particolare classe di limiti che si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$ può essere risolta con l'ausilio del limite fondamentale:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \tag{24}$$

Il grafico della funzione $f(x) = x^{-1} \sin x$ è riportato in figura 11. Si tratta di un'oscillazione sinusoidale inviluppata dalle curve $y = x^{-1}$, $y = -x^{-1}$.
È facile rendersi conto che:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0 \tag{25}$$

Per quanto detto, alcuni limiti di funzioni trigonometriche si riconduncono alla forma (24).

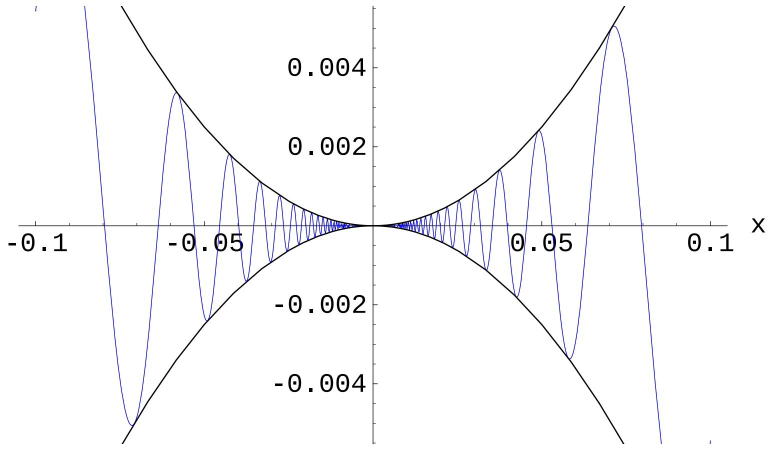


Figura 9: Grafico di $f\left(x\right) = x^2 \sin \frac{1}{x}$.

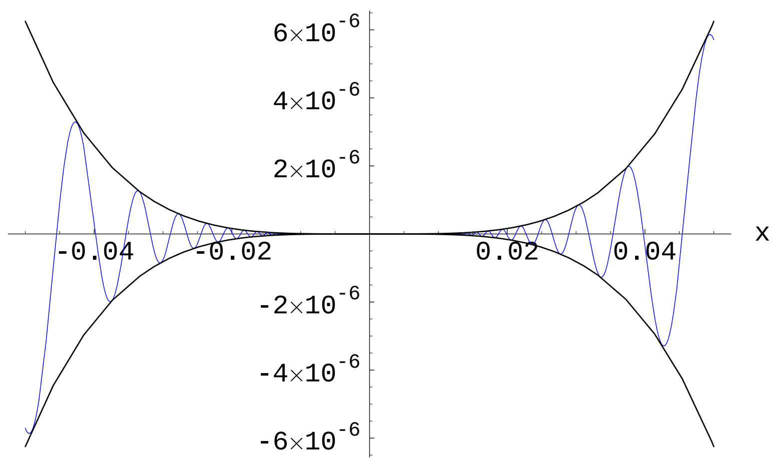


Figura 10: Grafico di $f\left(x\right) = x^3 \sin \frac{1}{x}$.

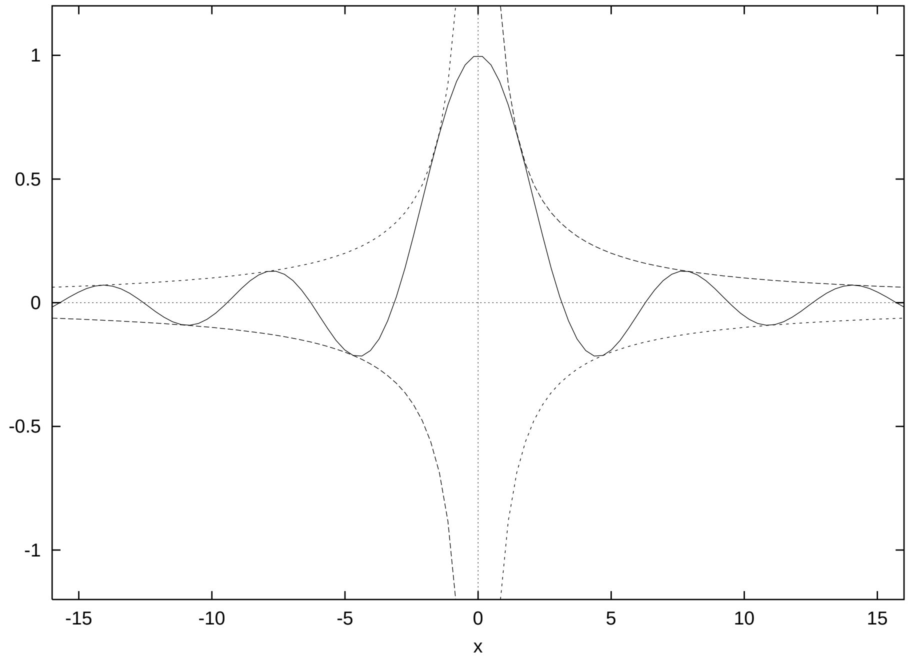


Figura 11: Grafico di $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

1.3.2 Esempi 2

1. $l = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x}$
2. $l = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 2x}$
3. $l = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^4 x}{x^4}$
4. $l = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^4 x}{x}$
5. $l = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$
6. $l = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\sin^2 x - \sin^2 x_0}{x - x_0}$
7. $l = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\cos^2 x - \cos^2 x_0}{x - x_0}$
8. $l = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0}$
9. $l = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0}$
10. $l = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x + \sin x}{1 - \cos x - \sin x}$
11. $l = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\sin 2x - \cos 2x}{\tan x - \tan x_0}$

1.3.3 Soluzioni

N. 1
$l = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} 3\frac{\sin 3x}{3x}$, cambio di variabile: $y = 3x$, quindi: $l = 3\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = 3$
In generale:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin \lambda x}{x} = \lambda,\ \forall\lambda \in (0,+\infty) \tag{26}$$

N. 2
$l = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 2x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x}{5x}\right)\left(\frac{2x}{\sin 2x}\right)\frac{5}{2} = \frac{5}{2}$
In generale:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin \lambda x}{\sin \mu x} = \frac{\lambda}{\mu},\ \forall\lambda,\mu \in (0,+\infty) \tag{27}$$

N. 3
$l = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^4 x}{x^4} = \left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)^4 = 1$
In generale:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^p x}{x^p} = 1,\ \forall p \in (-\infty,+\infty) \tag{28}$$

N. 4
$l = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\sin^3 x = 1\cdot 0 = 0$
N. 5
$l = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{0}{0}$
Come è noto: $\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2}$, per cui: $l = \lim_{x\to 0}\frac{1-1+2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = 2\lim_{x\to 0}\frac{1}{4}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$. Questo limite ricorre frequentemente tale da essere considerato un limite fondamentale:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \tag{29}$$

N. 6
$l = \lim_{x\to x_0}\frac{\sin^2 x - \sin^2 x_0}{x - x_0} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to x_0}\frac{(\sin x - \sin x_0)(\sin x + \sin x_0)}{x - x_0}$
Per le formule di prostaferesi:

$$\sin x - \sin x_0 = 2\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)$$

Quindi:
$l = \lim_{x\to x_0}\left[\frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}}\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)(\sin x + \sin x_0)\right] = 1\cdot\cos x_0\cdot 2\cdot\sin x_0 = 2\sin x_0\cos x_0 = \sin(2x_0)$
N. 7
$l = \lim_{x\to x_0}\frac{\cos^2 x - \cos^2 x_0}{x - x_0} = l = \lim_{x\to x_0}\frac{(\cos x - \cos x_0)(\cos x + \cos x_0)}{x - x_0}$
Per le formule di prostaferesi:

$$\cos x - \cos x_0 = -2\sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\cos\left(\frac{x-x_0}{2}\right)$$

Quindi:
$l=-\lim_{x\to x_0}\left[\frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}}\sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right)(\cos x+\cos x_0)\right]=-\sin(2x_0)$

N. 8

$l=\lim_{x\to x_0}\frac{\sin x-\sin x_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}}\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\right]=\cos x_0$

N. 9

$l=\lim_{x\to x_0}\frac{\cos x-\cos x_0}{x-x_0}=-\lim_{x\to x_0}\left[\frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}}\sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\right]=-\sin x_0$

N. 10

$l=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+\sin x}{1-\cos x-\sin x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}}=-1$

N. 11

$l=\lim_{x\to x_0}\frac{\sin 2x-\cos 2x}{\tan x-\tan x_0}=\frac{0}{0}$

Per le formule di prostaferesi:

$$\sin 2x-\sin 2x_0=2\sin(x-x_0)\cos(x+x_0)$$

Il denominatore:

$$\begin{aligned}\tan x-\tan x_0&=\frac{\sin x\cos x_0-\cos x\sin x_0}{\cos x\cos x_0}\\&=\frac{\sin(x-x_0)}{\cos x\cos x_0}\end{aligned}$$

Quindi:

$$l=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{2\sin(x-x_0)\cos(x+x_0)}{\sin x\cos x_0-\cos x\sin x_0}\cos x\cos x_0\right]=2\cos 2x_0\cos^2 x_0$$

Nell'ultimo passaggio si è tenuto conto della formula di sottrazione degli archi: $\sin(x-x_0)=\sin x\cos x_0-\cos x\sin x_0$.

1.4 Infinitesimi ed infiniti (parte prima)

Sia $X\subseteq\mathbb{R}$ e x_0 punto di accumulazione per X tale che $|x_0|\le+\infty$. Sussistono le seguenti definizioni:

$$\begin{aligned}&(f(x)\text{ è un infinitesimo in }x_0)\overset{def}{\Longleftrightarrow}\left(\lim_{x\to x_0}f(x)=0\right)\\&(f(x)\text{ è un infinito in }x_0)\overset{def}{\Longleftrightarrow}\left(\lim_{x\to x_0}|f(x)|=+\infty\right)\end{aligned}\tag{30}$$

Ciò premesso, se $f(x)$ e $g(x)$ sono due infinitesimi in x_0, si consideri il rapporto:

$$R(x)=\frac{f(x)}{g(x)},\tag{31}$$

che per $x \to x_0$ si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Se tale rapporto è regolare, si può verificare uno sei tre casi seguenti casi:

$$\lim_{x \to x_0} R(x) = \begin{cases} 0 \\ \pm\infty \\ l \in \mathbb{R} - \{0\} \end{cases} \tag{32}$$

Nel primo caso, $f(x)$ tende a zero più velocemente di $g(x)$ e diremo che $f(x)$ è **un infinitesimo di ordine superiore** a $g(x)$. Nel secondo caso, la funzione $f(x)$ tende a zero meno rapidamente di $g(x)$ e diremo che $f(x)$ è **un infinitesimo di ordine inferiore** a $g(x)$. Infine, nel terzo caso $f(x)$ e $g(x)$ tendono a zero con la medesima rapidità, per cui diremo che $f(x)$ e $g(x)$ sono **infinitesimi dello stesso ordine**. Nel caso speciale in cui f e g sono dello stesso ordine con $l = 1$, si dirà che f e g sono **equivalenti** e si scrive: $f \sim g$**.** Ad esempio:

$$f(x) = \sin x, \;\; g(x) = x$$

Abbiamo:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \;\; \text{quindi per } x \to 0, \text{ è } \sin x \sim x$$

Infine, se il rapporto $R(x)$ è non regolare in x_0, si procede alla ricerca del limite:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|}, \tag{33}$$

e si applicano le definizioni precedenti nel caso in cui $|R(x)|$ risulti regolare. Se il limite (33) non esiste, si studia il comportamento di $|f(x)| / |g(x)|$ in un intorno di x_0. In particolare se esistono due numeri reali $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ tali che:

$$x \in X \cap I(x_0) - \{x_0\} \Longrightarrow \varepsilon_1 \leq \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \leq \varepsilon_2, \tag{34}$$

diremo che f e g sono **infinitesimi dello stesso ordine**.

***

In tutti i casi precedenti, si dice che gli infinitesimi f e g sono **confrontabili**. Di contro, se $R(x)$ e $|R(x)|$ sono non regolari in x_0 e se non è verificata la disuguaglianza (34), allora si dirà che f e g sono **non confrontabili.** Ma se $|R(x)|$ è limitato superiormente, si dirà che f è di **ordine non inferiore** a g.

Esempi

N. 1

Consideriamo gli infinitesimi nel punto $x = 0$:

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}, \; g(x) = x$$

Il loro rapporto è:

$$R(x) = \sin \frac{1}{x},$$

ed è non regolare in $x=0$. Ma $|R(x)| = \left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq 1$, donde $f(x) = x\sin x^{-1}$ è un infinitesimo di ordine non inferiore a $g(x) = x$.

N. 2

Consideriamo gli infinitesimi per $x \to +\infty$:

$$f(x) = \frac{3+\sin x}{x}, \quad g(x) = \frac{1}{x}$$

Il loro rapporto è:

$$R(x) = 3 + \sin x$$

Tale funzione è non regolare per $x \to +\infty$, tuttavia è ivi limitata:

$$2 \leq 3 + \sin x \leq 4$$

Risulta quindi verificata una disuguaglianza del tipo (34), per cui f e g sono dello stesso ordine.

N. 3

Consideriamo gli infinitesimi per $x \to +\infty$:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad g(x) = \frac{\cos x}{x} \tag{35}$$

Risulta:

$$R(x) = \tan x \tag{36}$$

Il rapporto $R(x)$ è non regolare per $x \to +\infty$. Inoltre, non verifica una disuguaglianza del tipo (34), né tantomeno è limitato superiormente. Si conclude che i due infinitesimi (35) sono non confrontabili.

N. 4

Consideriamo gli infinitesimi per $x \to 0^+$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \lambda^2\sqrt{x^3+2x^2} + (\lambda-1)\sqrt{\sin x}\tan\sqrt{x} \\ g(x) &= x, \end{aligned}$$

essendo λ un parametro reale.

Determinare per quali valori di λ l'infinitesimo $f(x)$ è di ordine superiore a $g(x)$.

Soluzione

Calcoliamo il limite del rapporto:

$$
\begin{aligned}
l &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\lambda^2\sqrt{x^3+x^2}+(1-2\lambda)\tan\sqrt{x}\sqrt{\sin x}}{x} \\
&= \lim_{x\to 0^+}\left[\lambda^2\sqrt{x+1}+(1-2\lambda)\frac{\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\sqrt{\frac{\sin x}{x}}\right] \\
&= \lim_{x\to 0^+}\left[\lambda^2\sqrt{x+1}+(1-2\lambda)\frac{\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\sqrt{\frac{\sin x}{x}}\right] \\
&= \lambda^2-2\lambda+1 \\
&= (\lambda-1)^2
\end{aligned}
$$

L'infinitesimo f è di ordine superiore a g se e solo se $l=0$, da cui $\lambda=1$.

***

Passiamo al caso in cui f e g sono infiniti in x_0. Ridefinendo $R(x)=|f(x)/g(x)|$:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to x_0} R(x)=0 \Longrightarrow f(x)\ \textbf{è un infinito di ordine inferiore}\text{ a } g(x) \\
&\lim_{x\to x_0} R(x)=+\infty \Longrightarrow f(x)\ \textbf{è un infinito di ordine superiore}\text{ a } g(x) \\
&\lim_{x\to x_0} R(x)=l\in\mathbb{R}-\{0\} \Longrightarrow f(x)\ \text{ e } g(x)\ \text{ sono } \textbf{infiniti dello stesso ordine}
\end{aligned}
$$

Utilizzando un linguaggio suggestivo ma efficace, possiamo dire - nel caso in cui $\lim_{x\to x_0}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|=+\infty$ - che per $x\to x_0$ il numeratore $f(x)$ *ammazza* il denominatore $g(x)$ (definizione analoga nel caso in cui il rapporto tende a 0). Anche nel caso degli infiniti, è valida la definizione derivante dalla (34) nel caso in cui il rapporto sia non regolare.
Per il calcolo del limite del rapporto è utile il seguente teorema.

Theorem 1 *Siano $f(x)$ e $g(x)$ due infinitesimi in x_0 tali che:*

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f_1(x)+f_2(x) \\
g(x) &= g_1(x)+g_2(x),
\end{aligned}
$$

essendo $f_2(x), g_2(x)$ infinitesimi di ordine superiore a $f_1(x), g_1(x)$ rispettivamente. Risulta:

$$
\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{g_1(x)} \tag{37}
$$

Proof.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f_1(x)}{g_1(x)}\frac{1+\frac{f_2(x)}{f_1(x)}}{1+\frac{g_2(x)}{g_1(x)}}\right] \\
&= \lambda\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{g_1(x)},
\end{aligned}
$$

essendo:

$$\lambda = \lim_{x \to x_0} \left[\frac{1 + \frac{f_2(x)}{f_1(x)}}{1 + \frac{g_2(x)}{g_1(x)}} \right] = 1,$$

poiché per ipotesi, f_2, g_2 sono infinitesimi di ordine superiore a f_1, g_1 rispettivamente:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_2(x)}{f_1(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{g_2(x)}{g_1(x)} = 0,$$

donde l'asserto (37).
Tale risultato si esprime dicendo che nel limite per $x \to x_0$ è lecito trascurare a numeratore e denominatore gli infinitesimi di ordine superiore. Tale teorema è noto come **principio della sostituzione degli infinitesimi**:

Theorem 2 *Il limite del rapporto a primo membro della (37) conserva il proprio valore aggiungendo o sottraendo a numeratore e denominatore, infinitesimi di ordine superiore a f e g rispettivamente.*

Procedendo nel caso degli infiniti, abbiamo il:

Theorem 3 *Siano $f(x)$ e $g(x)$ infiniti in x_0 tali che:*

$$\begin{aligned} f(x) &= f_1(x) + f_2(x) \\ g(x) &= g_1(x) + g_2(x), \end{aligned}$$

essendo $f_2(x), g_2(x)$ infiniti di ordine inferiore a $f_1(x), g_1(x)$ rispettivamente. Risulta:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \tag{38}$$

Proof.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f_1(x)}{g_1(x)} \frac{1 + \frac{f_2(x)}{f_1(x)}}{1 + \frac{g_2(x)}{g_1(x)}} \right] \\ &= \lambda \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}, \end{aligned}$$

essendo:

$$\lambda = \lim_{x \to x_0} \left[\frac{1 + \frac{f_2(x)}{f_1(x)}}{1 + \frac{g_2(x)}{g_1(x)}} \right] = 1,$$

poiché per ipotesi, f_2, g_2 sono infiniti di ordine inferiore a f_1, g_1 rispettivamente:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_2(x)}{f_1(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{g_2(x)}{g_1(x)} = 0,$$

donde l'asserto (38).
Tale risultato si esprime dicendo che nel limite per $x \to x_0$ è lecito trascurare a numeratore e denominatore gli infiniti di ordine inferiore. Alternativamente, diciamo che per $x \to x_0$ la funzione $f(x)$ si comporta come $f_1(x)$.

***

Sia $u(x)$ un infinitesimo in x_0 e definito positivo intorno a tale punto. Quindi:

$$\lim_{x \to x_0} u(x) = 0$$
$$\exists I(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : x \in X \cap I(x_0) - \{x_0\} \Longrightarrow u(x) > 0$$

Evidentemente:

$$\forall \alpha \in (0, +\infty), \lim_{x \to x_0} u(x)^\alpha = 0,$$

In altri termini, se la funzione u è un infinitesimo in x_0 tale è la funzione u^α con $\alpha > 0$. Inoltre se $\beta \in (0, +\infty) - \{\alpha\}$:

$$\alpha > \beta \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{u(x)^\alpha}{u(x)^\beta} = \lim_{x \to x_0} u(x)^{|\alpha - \beta|} = 0 \tag{39}$$
$$\alpha < \beta \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{u(x)^\alpha}{u(x)^\beta} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{u(x)^{|\beta - \alpha|}} = +\infty$$

La seconda delle (39) si giustifica osservando che se f è un qualunque infinitesimo, allora la funzione reciproca $1/f$ è un infinito, e viceversa.
Ciò premesso, sussistono le seguenti
Defnzione
Il numero reale positivo α è l'**ordine** dell'infinitesimo u^α rispetto all'infinitesimo u.
Definizione
Se f è un infinitesimo, diremo che f è **dotato di ordine** se esiste un numero reale positivo α tale che gli infinitesimi f e u^α siano dello stesso ordine. Chiameremo α **ordine** dell'infinitesimo f. L'infinitesimo u è denominato **infinitesimo di riferimento.**
È consuetudine assumere come infinitesimo di riferimento la funzione:

$$u(x) = |x - x_0|, \text{ con } |x_0| < +\infty \tag{40}$$

Esempio
Stabilire l'ordine dell'infinitesimo $f(x) = (x-1)^4 + (x-1)^3 + (x-1)^2$ per $x \to x_0 = 1$.
Soluzione
Assumiamo come infinitesimo di riferimento la funzione:

$$u(x) = |x - 1| \tag{41}$$

L'ordine α dell'infinitesimo f deve verificare la condizione:

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{u(x)^\alpha} = l \neq 0 \tag{42}$$

Il limite destro è:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)^4+(x-1)^3+(x-1)^2}{(x-1)^\alpha} \\
&=\lim_{t\to0^+}\frac{t^4+t^3+t^2}{t^\alpha} \\
&=\lim_{t\to0^+}\left(t^{4-\alpha}+t^{3-\alpha}+t^{2-\alpha}\right)=l\Longleftrightarrow\alpha=2
\end{aligned}\tag{43}$$

Il limite sinistro:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)}{u(x)^\alpha} \\
&=-\lim_{x\to1^-}\frac{(x-1)^4+(x-1)^3+(x-1)^2}{(x-1)^\alpha}\neq0\Longleftrightarrow\alpha=2
\end{aligned}\tag{44}$$

Le (43)-(44) implicano:

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{u(x)^\alpha}=l\in\mathbb{R}-\{0\}\Longleftrightarrow\alpha=2\tag{45}$$

Si conclude che $f(x)$ è per $x\to1$, un infinitesimo di ordine 2.

***

Sia $v(x)$ un infinito in x_0 e definito positivo intorno a tale punto. Quindi:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to x_0}v(x)=+\infty \\
&\exists I(x_0)=(x_0-\delta,x_0+\delta):\ x\in X\cap I(x_0)-\{x_0\}\Longrightarrow v(x)>0
\end{aligned}$$

Evidentemente:

$$\forall\alpha\in(0,+\infty),\ \lim_{x\to x_0}v(x)^\alpha=0,$$

In altri termini, se la funzione v è un infinito in x_0 tale è la funzione v^α con $\alpha>0$. Inoltre se $\beta\in(0,+\infty)-\{\alpha\}$:

$$\begin{aligned}
\alpha>\beta&\Longrightarrow\lim_{x\to x_0}\frac{v(x)^\alpha}{v(x)^\beta}=\lim_{x\to x_0}v(x)^{|\alpha-\beta|}=+\infty \\
\alpha<\beta&\Longrightarrow\lim_{x\to x_0}\frac{v(x)^\alpha}{v(x)^\beta}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{v(x)^{|\beta-\alpha|}}=0^+
\end{aligned}\tag{46}$$

Ciò premesso, sussistono le seguenti
Definzione
Il numero reale positivo α è l'**ordine** dell'infinito v^α rispetto all'infinito v.
Definizione

Se f è un infinito, diremo che f è **dotato di ordine** se esiste un numero reale positivo α tale che gli infiniti f e u^α siano dello stesso ordine. Chiameremo α **ordine** dell'infinito f. L'infinito u è denominato **infinito di riferimento.**
È consuetudine assumere come infinito di riferimento la funzione:

$$v(x) = |x - x_0|^{-1}, \text{ con } |x_0| < +\infty \tag{47}$$

Esempio
Stabilire l'ordine dell'infinitesimo $f(x) = \frac{1}{(x-1)^4+(x-1)^3+(x-1)^2}$ per $x \to x_0 = 1$.
Soluzione
Assumiamo come infinitesimo di riferimento la funzione:

$$v(x) = \frac{1}{|x-1|} \tag{48}$$

L'ordine α dell'infinito f deve verificare la condizione:

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{v(x)^\alpha} = l \neq 0 \tag{49}$$

Il limite destro è:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x)}{v(x)^\alpha} \\ &= \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)^\alpha}{(x-1)^4 + (x-1)^3 + (x-1)^2} \\ &= \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)^\alpha}{(x-1)^4 \left[1 + (x-1)^{-3} + (x-1)^{-2}\right]} \\ &= \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)^{\alpha-4}}{1 + (x-1)^{-3} + (x-1)^{-2}} = l \in \mathbb{R} - \{0\} \Longleftrightarrow \alpha = 4 \end{aligned} \tag{50}$$

Il limite sinistro:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x)}{v(x)^\alpha} \\ &= -\lim_{x \to 1^-} \frac{(x-1)^\alpha}{(x-1)^4 + (x-1)^3 + (x-1)^2} = l \in \mathbb{R} - \{0\} \Longleftrightarrow \alpha = 4 \end{aligned} \tag{51}$$

Le (50)-(51) implicano:

$$\lim_{x-1} \frac{f(x)}{v(x)^\alpha} = l \in \mathbb{R} - \{0\} \Longleftrightarrow \alpha = 4 \tag{52}$$

Si conclude che la funzione f è, per $x \to 1$, un infinito di ordine 4.

***

Sia f un infinitesimo in x_0 e u l'infinitesimo di riferimento. Sussistono le seguenti definizioni:

$$(f(x) \text{ è di } \textbf{ordine infinitamente grande}) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \left(\forall \alpha \in (0,+\infty), \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{u(x)^\alpha} = 0\right) \quad (53)$$
$$(f(x) \text{ è di } \textbf{ordine infinitamente piccolo}) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \left(\forall \alpha \in (0,+\infty), \lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{u(x)^\alpha} = +\infty\right)$$

***

Sia f un infinito in x_0 e v l'infinito di riferimento. Abbiamo le seguenti:

$$(f(x) \text{ è di } \textbf{ordine infinitamente grande}) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \left(\forall \alpha \in (0,+\infty), \lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{v(x)^\alpha} = +\infty\right) \quad (54)$$
$$(f(x) \text{ è di } \textbf{ordine infinitamente piccolo}) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \left(\forall \alpha \in (0,+\infty), \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{v(x)^\alpha} = 0\right)$$

1.4.1 Esercizi proposti sugli infiniti e infinitesimi

1. Determinare (per $x \to 0$) l'ordine dell'infinitesimo:
$$f(x) = \frac{10^4 x}{x+1}$$
2. Determinare (per $x \to 0$) l'ordine dell'infinitesimo:
$$f(x) = \sqrt[n]{x + \sqrt[n]{x}}$$
3. Determinare (per $x \to 0$) l'ordine dell'infinitesimo:
$$f(x) = \sqrt[n]{x^2} - \sqrt[n]{x^3}$$
4. Determinare (per $x \to 0$) l'ordine dell'infinitesimo:
$$f(x) = \sin x - \tan x$$

1.4.2 Soluzioni degli esercizi proposti

N. 1
Assumiamo come infinitesimo di riferimento la funzione $u(x) = x$. Quindi l'ordine α (se esiste) dell'infinitesimo f è tale che:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{u(x)^\alpha} = 10^4 \lim_{x \to 0} \frac{x^{1-\alpha}}{x+1} = l \in \mathbb{R} - \{0\} \Longleftrightarrow \alpha = 1$$

N. 2
Con le solite posizioni:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{u(x)^{\alpha}} &= \lim_{x\to 0}\frac{\left(x+x^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{n}}}{x^{\alpha}} \\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x+x^{\frac{1}{n}}}{x^{n\alpha}}\right)^{\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{x\to 0}\left[\frac{x^{\frac{1}{n}}\left(x^{1-\frac{1}{n}}+1\right)}{x^{n\alpha}}\right]^{\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{x\to 0}\left[x^{\frac{1}{n}-n\alpha}\left(x^{\frac{n-1}{n}}+1\right)\right]^{\frac{1}{n}} \\
&= l\in\mathbb{R}-\{0\}\Longleftrightarrow \frac{1}{n}-n\alpha=0\Longleftrightarrow \alpha=\frac{1}{n^2}
\end{aligned}$$

Alternativamente vediamo che per $x\to 0$, x è di ordine superiore rispetto a $x^{1/n}$, quindi:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(x+x^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{n}}}{x^{\alpha}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{\frac{1}{n^2}}}{x^{\alpha}}\neq 0\Longleftrightarrow \alpha=\frac{1}{n^2}$$

Più precisamente, il limite è 1 quindi per $x\to 0$, è $\sqrt[n]{x+\sqrt[n]{x}}\sim\sqrt[n^2]{x}$. Nelle applicazioni ciò si esprime dicendo che nel limite per $x\to 0$, la funzione $\sqrt[n]{x+\sqrt[n]{x}}$ *va come* $\sqrt[n^2]{x}$. Da un punto di vista geometrico la curva di equazione $y=\sqrt[n^2]{x}$ approssima nel limite $x\to 0$, la curva $y=\sqrt[n]{x+\sqrt[n]{x}}$ (figura 12)

N. 3

Procediamo in maniera simile all'esercizio precedente.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{x^2}-\sqrt[n]{x^3}}{x^{\alpha}} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x^{\frac{2}{n}}\left(1-x^{\frac{1}{n}}\right)}{x^{\alpha}} \\
&= \lim_{x\to 0}x^{\frac{2-n\alpha}{n}}\left(1-x^{\frac{1}{n}}\right) \\
&\neq 0\Longleftrightarrow \alpha=\frac{2}{n},
\end{aligned}$$

cioè per $x\to 0$ la funzione $\sqrt[n]{x^2}-\sqrt[n]{x^3}$ va come $\sqrt[n]{x^2}$.

N. 4

Dobbiamo determinare il limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x^{\alpha}}$$

Abbiamo:

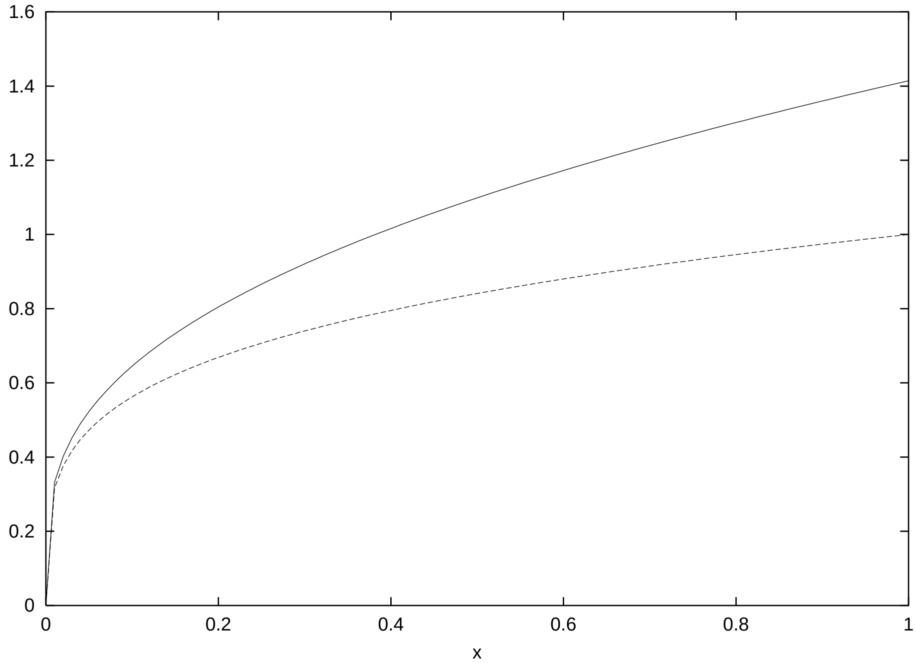


Figura 12: Grafico di $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$ (curva continua) e $g(x) = \sqrt[4]{x}$. Nel limite $x \to 0$ le due curve sono coincidenti.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^\alpha} \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x^\alpha} - \frac{\tan x}{x^\alpha} \right) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x^\alpha} \left(\frac{1}{\cos x} - 1 \right) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x^{\alpha-2}} \left(\frac{1-\cos x}{x^2} \right) \left(\frac{1}{\cos x} \right) \neq 0 \Longleftrightarrow \alpha = 3
\end{aligned}$$

Si conclude che per $x \to 0$, la funzione $\sin x - \tan x$ è un infinitesimo del terzo ordine.

1.5 Funzioni trigonometriche (parte seconda)

1.5.1 Risoluzione delle forme indeterminate per confronto tra infinitesimi

Esempi

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^4 x}{1-\cos x}$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^4 x}{(1-\cos x)^3}$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^4 x}{(1-\cos x)^4}$

4. Determinare il limite
$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^n}{\tan^m x}$$
nei seguenti casi: $(n=1,m=1)\,,(n=1,m=2)\,,(n=2,m=5)$.

Soluzioni
N. 1
Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Poniamo: $f(x)=\sin^4 x$; $g(x)=1-\cos x$. Tali funzioni sono infinitesime in $x=0$. Assumiamo come infinitesimo di riferimento la funzione $u(x)=x$. Quindi determiniamo l'ordine di f e g. Evidentemente:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{u(x)^\alpha}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^4 x}{x^\alpha}=l\in\mathbb{R}-\{0\}\Longleftrightarrow\alpha=4$$

Quindi f è un infinitesimo di ordine $\alpha=4$. Passiamo alla funzione $g(x)$.

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{u(x)^\alpha}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^\alpha}\\&=-2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^\alpha}\\&=l\in\mathbb{R}-\{0\}\Longleftrightarrow\alpha=2,\end{aligned}$$

cioè g è un infinitesimo di ordine $\beta=2<\alpha\Longrightarrow\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$.

N. 2
Poniamo: $f(x)=\sin^4 x$, $g(x)=(1-\cos x)^2$, quindi determiniamo l'ordine di g.

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{u(x)^\alpha}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2}{x^\alpha}\\&=-2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^4\frac{x}{2}}{x^\alpha}\\&=l\in\mathbb{R}-\{0\}\Longleftrightarrow\alpha=4,\end{aligned}$$

Cioè $\alpha=\beta$, donde il limite è finito.

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{\sin^4 x}{(1-\cos x)^2}\\&=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^4 x}{\sin^4\frac{x}{2}}\\&=4\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin^4 x}{x^4}}{\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^4}\\&=4\end{aligned}$$

N. 3
Utilizzando i simboli precedenti con $g(x) = (1-\cos x)^4$, risulta $g(x) = 16\sin^4(x/2)$ che è un infinitesimo di ordine $\beta = 8 > \alpha$, donde:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^4 x}{(1-\cos x)^4} = \infty$$

N. 4
$(n = 1, m = 1)$. Il limite è: $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\tan x}$
Poniamo: $f(x) = 1-\cos x; g(x) = \tan x$. La funzione f è un infinitesimo di ordine $\alpha = 2$, mentre la funzione g è un infinitesimo di ordine $\beta = 1$. Si conclude che:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\tan x} = 0$$

$(n = 1, m = 2)$
Ridifenendo $g(x) = \tan^2 x$, risulta: g infinitesimo di ordine $\beta = 2$, donde il limite è finito. Determiniamolo:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\tan^2 x}\\
&= 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2 x}\cos^2 x\\
&= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2}{\frac{\sin^2 x}{x^2}}\cos^2 x\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$(n = 2, m = 5)$
Ridifenendo $f(x) = (1-\cos x)^2$, $g(x) = \tan^5 x$, risulta: f infinitesimo di ordine $\alpha = 4$, g infinitesimo di ordine $\beta = 5$, donde il rapporto diverge per $x \to 0$.

Esercizi proposti (parte prima)

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2}$
2. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x\cos x}$
3. $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x}$
4. $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}$
5. $\lim_{x\to 0}\frac{3x+\tan x}{\sin x+\tan^2 x}$
6. $\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x(1-\sin x)}{3\cos^2 x}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{x\sin x\cos x}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x\sin\frac{x}{2}}{1-\cos x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{x}$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin x}{1+\cos x-2\cos^2 x}$

11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x+\cos x-1}{x}$

12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{\tan x-\sin x}$

13. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin x)^2}{\cos x}$

14. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x+a)-\sin a}{x}$

15. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{x-a}$

16. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)}$

17. $\lim\limits_{x\to 0}(\ln x-\ln\sin 2x)$

18. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{3\sin^2 x+\sin x-4}{x-\frac{\pi}{2}}$

19. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}$

20. $\lim\limits_{x\to 0}x\cot^2 x$

21. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\tan x\,(1-\sin x)$

22. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x+\sin x}{2x-\sin x}$

Soluzioni N. 1

Si risolve per confronto tra infinitesimi: $\sin x$ è di ordine $\alpha=1$, x^2 è di ordine $\beta=2$, donde: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2}=\infty$

N. 2

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x\cos x}=2\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\frac{1}{\cos x}\right)=2\cdot 1\cdot\frac{1}{1}=2$

N. 3

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x}=\frac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)=1-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1-1=0$

N. 4

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\frac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}}=\frac{1-1}{1+1}=0$

N. 5

$\lim\limits_{x\to0}\frac{3x+\tan x}{\sin x+\tan^2 x}=\frac{0}{0}=\lim\limits_{x\to0}\frac{3+\frac{\tan x}{x}}{\frac{\sin x}{x}+\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{\cos^2}}=\frac{3+1}{1+1\cdot\frac{0}{1}}=4$

N. 6

$\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin x(1-\sin x)}{3\cos^2 x}=\frac{0}{0}=\frac{2}{3}\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x(1-\sin x)}{1-\sin^2 x}=\frac{2}{3}\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin x(1-\sin x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}=\frac{2}{3}\frac{\sin x}{1+\sin x}=\frac{1}{3}$

N. 7

$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos^3 x}{x\sin x\cos x}=\frac{0}{0}=\lim\limits_{x\to0}\frac{(1-\cos x)\left(1+\cos x+\cos^2 x\right)}{x\sin x\cos x}=$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}\left(1+\cos x+\cos^2 x\right)}{2x\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{2}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{1+\cos x+\cos^2 x}{\cos\frac{x}{2}\cos x}\right)=\frac{3}{2}$

N. 8

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x\sin\frac{x}{2}}{1-\cos x}=\frac{0}{0}=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{x^2}{1-\cos x}\cdot\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}\right)=2\cdot1\cdot\frac{1}{2}=1$

N. 9

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{x}=\frac{0}{0}=\lim\limits_{x\to0}\sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2}}=\sqrt{\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

N. 10

$l=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\sin x}{1+\cos x-2\cos^2 x}=\frac{0}{0}$

Dividiamo numeratore e denominatore per x^2:

$l=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{1+\cos x-2\cos^2 x}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{1-\cos^2 x+\cos x-\cos^2 x}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{1-\cos^2 x}{x^2}+\frac{\cos x-\cos^2 x}{x^2}}=\frac{l_1}{l_2}$

Calcoliamo il limite a denominatore:

$l_1=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x+\cos x-\cos^2 x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2}+\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1+\sin^2 x}{x^2}=$

$=\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{1-\cos x}{x^2}(1+\cos x)\right]+\lim\limits_{x\to0}\left(-\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{\sin^2 x}{x^2}\right)=\frac{1}{2}\cdot(1+1)+\left(-\frac{1}{2}+1\right)=\frac{3}{2}$

$l=\frac{1}{l_2}=\frac{2}{3}$

N. 11

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x+\cos x-1}{x}=\frac{0}{0}=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}+\frac{\cos x-1}{x}\right)=l_1+l_2$, essendo: $l_1=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$, $l_2=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x}$

Abbiamo: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}x\frac{\cos x-1}{x^2}=0\cdot\frac{1}{2}=0\Longrightarrow l=1$

Alternativamente: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x}=0$, giacché la funzione $\cos x-1$ è per $x\to0$, un infinitesimo del second'ordine.

N. 12

$\lim\limits_{x\to0}\frac{x^3}{\tan x-\sin x}=\frac{0}{0}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x^3}\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{x^3}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x}{\frac{\sin x}{x^3}\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}=\frac{1}{1\cdot\frac{1}{2}}=2$

N. 13

$l=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin x)^2}{\cos x}=\frac{0}{0}$. Eseguiamo il cambio di variabile: $x\to y=x+\frac{\pi}{2}$

$l=\lim\limits_{y\to0}\frac{(1-\cos y)^2}{\sin y}=\frac{0}{0}$. Procediamo per confronto tra infinitesimi:

$$f(y)=(1-\cos y)^2,\, g(y)=\sin y$$

Siano α e β gli ordini di f e g rispettivamente. Manifestamente è $\beta=1$. Determinimo α:

$$\lim_{y\to0}\frac{f(y)}{y^\alpha}=\left(\lim_{y\to0}\frac{1-\cos y}{y^{\alpha/2}}\right)^2=\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}\Longleftrightarrow\frac{\alpha}{2}=2\Longrightarrow\alpha=4$$

f è infinitesimo di ordine 4, donde $l=0$.

N. 14

$l=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(x+a)-\sin a}{x}=\frac{0}{0}$

Per le formule di prostaferesi:

$$\sin(x+a)-\sin a = 2\sin\frac{x}{2}\cos\left(\frac{x+2a}{2}\right)$$

Quindi:

$$l = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{x+2a}{2}\right)\right] = \cos a$$

N. 15
$l = \lim\limits_{x\to a}\frac{\cos x - \cos a}{x-a} = \frac{0}{0}$
Per le formule di prostaferesi:

$$\cos x - \cos a = -2\sin\left(\frac{x+a}{2}\right)\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)$$

Quindi:

$$l = -2\lim_{x\to a}\left[\frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}}\sin\left(\frac{x+a}{2}\right)\right] = -\sin a$$

N. 16
$l = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)} = \frac{0}{0} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1-\sin x}{\cos x\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)}\cdot\frac{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}\right] = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{(1-\sin x)\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)}{\cos x\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)}\right]$
$= \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{(1-\sin x)\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)}{\cos^2 x}\right] = \underbrace{\left[\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}\right]}_{l_1}\underbrace{\left[\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)\right]}_{l_2}$
Per la determinazione di l_1 eseguiamo il cambio di variabile: $x\to y = x+\frac{\pi}{2}$, per cui:

$$\begin{aligned} l_1 &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos^2 x} \\ &= \lim_{y\to 0}\frac{1-\cos y}{\sin^2 y} \\ &= \lim_{y\to 0}\frac{\frac{1-\cos y}{y^2}}{\frac{\sin^2 y}{y^2}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Il limite l_2 è immediato:

$$l_2 = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \tag{55}$$

Finalmente:

$$l = l_1 l_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

N. 17
$\lim\limits_{x\to 0}(\ln x - \ln\sin 2x) = \infty-\infty = \lim\limits_{x\to 0}\ln\left(\frac{x}{\sin 2x}\right) = \ln\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin 2x} = -\ln 2$
N. 18

$l=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{3\sin^2 x+\sin x-4}{x-\frac{\pi}{2}}=\frac{0}{0}$
Cambio di variabile: $x\to y=x-\frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned}
l&=\lim_{y\to 0}\frac{3\cos^2 y+\cos y-4}{y}\\
&=\lim_{y\to 0}\frac{3-3\sin^2 y+\cos y-4}{y}\\
&=-\lim_{y\to 0}\frac{1-\cos y}{y}-3\lim_{y\to 0}\frac{\sin^2 y}{y}=0
\end{aligned}$$

L'ultimo passaggio si giustifica osservando che $1-\cos y$ e $\sin^2 y$ sono infinitesimi del second'ordine per $x\to 0$.

N. 19
$l=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}=\frac{0}{0}$
Cambio di variabile: $x\to y=x-\frac{\pi}{2}\Longrightarrow l=\lim\limits_{y\to 0}\frac{1-\cos y}{y^2}=\frac{1}{2}$

N. 20
$\lim\limits_{x\to 0}x\cot^2 x=0\cdot\infty=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x}{\tan x}\cdot\frac{1}{\tan x}\right)=\infty$

N. 21
$l\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x\,(1-\sin x)=0\cdot\infty$
Cambio di variabile: $x\to y=x+\frac{\pi}{2}$
$l=\lim\limits_{y\to 0}\left[\frac{\cos y}{\sin y}\,(1-\cos y)\right]=\lim\limits_{y\to 0}\left(y\cos y\frac{y}{\sin y}\frac{1-\cos y}{y^2}\right)=0\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=0$

N. 22
$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{2x-\sin x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\frac{\sin x}{x}}{2-\frac{\sin x}{x}}=\frac{1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}}{2-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}}=\frac{1+0}{2-0}=\frac{1}{2}$

***

Esercizi proposti (parte seconda)

1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin\pi x}{\sin 3\pi x}$
2. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}x^n\sin\frac{1}{x}$, con $n\in\mathbb{N}-\{0,1\}$
4. $\lim\limits_{x\to\infty}x^m\left(\sin\frac{1}{x^n}\right)^p$, con $n\in\mathbb{N}-\{0,1\}$
5. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{x-a}$
6. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\tan\pi x}{x+2}$
7. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$

8. $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x-\cos x}{1-\tan x}$

9. $\lim_{x\to 1} (1-x)\tan\frac{\pi x}{2}$

10. $\lim_{x\to 0} \cot 2x \cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

11. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\sin\frac{x}{2}}{\pi-2}$

12. $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{1-2\cos x}{\pi-3x}$

13. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos mx-\cos nx}{x^2}$

14. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

15. $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x}$

16. $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{\sin 3x}$

17. $\lim_{x\to 1} \frac{1-x^2}{\sin\pi x}$

18. $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}$

19. $\lim_{x\to 1} \frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{1-\sqrt{x}}$

20. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$

21. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$

Soluzioni N. 1
$l = \lim_{x\to 1} \frac{\sin\pi x}{\sin 3\pi x} = \frac{0}{0}$
Eseguiamo il cambio di variabile: $x \to y = \pi x - \pi$ per cui:

$$\sin\pi x = -\sin y; \quad \sin 3\pi x = -\sin 3y$$

Il limite diventa:

$$l = \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{\sin 3y} = \frac{1}{3}$$

N. 2
Già conosciamo il limite di $f(x) = x\sin x^{-1}$ per $x \to 0$. Precisamente, tale funzione è ivi infinitesima. Di contro, per $x \to \infty$ tende a 1. Infatti, eseguendo il cambio di variabile:

$$x \to y = \frac{1}{x}, \tag{56}$$

si ha:

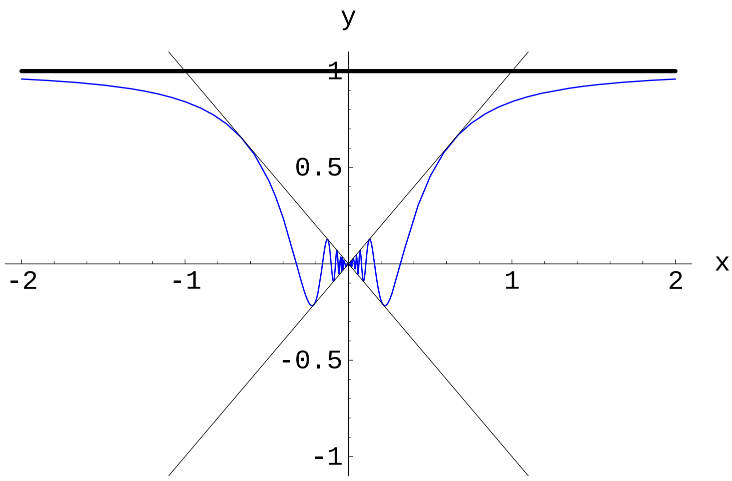


Figura 13: Grafico di $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$. Per $|x| \ll 1$ il grafico oscilla tra le due rette $y = x, y = -x$

$$\lim_{x \to \infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$$

Il grafico di $f(x)$ è riportato in figura 13

N. 3

Eseguendo il solito cambio di variabile:

$$\begin{aligned} l &= \lim_{y \to 0} \left(\frac{1}{y^{n-1}} \cdot \frac{\sin y}{y} \right) \\ &= \lim_{y \to 0} \frac{1}{y^{n-1}} = \infty \end{aligned}$$

Per $n = 2$ il grafico della funzione $f(x) = x^2 \sin x^{-1}$ oscilla tra le curve $y = x^2, y = -x^2$ per tutti i valori di x tali che $|x| \ll 1$ (figure 14-15) .

N. 4

Eseguendo il cambio di variabile (56):

$$l(m, n, p) = \lim_{y \to 0} \frac{\sin^p (y^n)}{y^m} \tag{57}$$

Per $(m, n, p) = (1, 1, 2)$:

$$l(1, 1, 2) = \lim_{y \to 0} \frac{\sin^2 y}{y} = 0$$

Il grafico di $f(x) = x \sin^2 x^{-1}$ per $|x| \ll 1$ compie oscillazioni tra l'asse x e la retta $y = x$, come possiamo vedere dalla figura 16.

Di contro, è visibile l'asintoto orizzontale $y = 0$ nel limite $|x| \to +\infty$ (figura 17).

Per $(m, n, p) = (1, 2, 2)$:

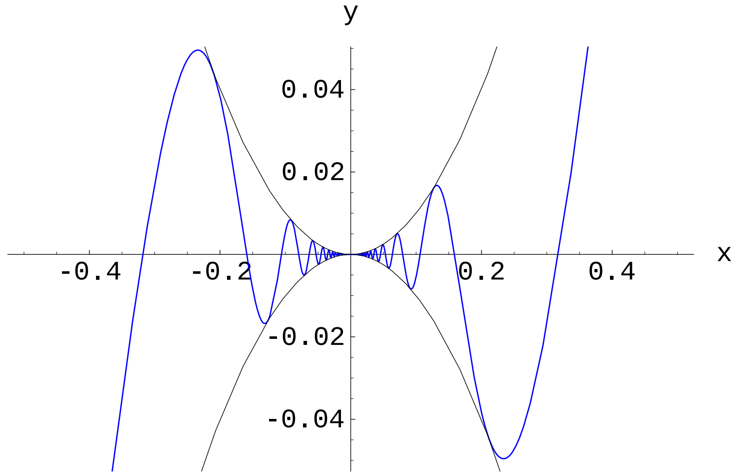


Figura 14: Grafico di $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$. Per $|x| \ll 1$ il grafico oscilla tra le curve $y = x^2, y = -x^2$.

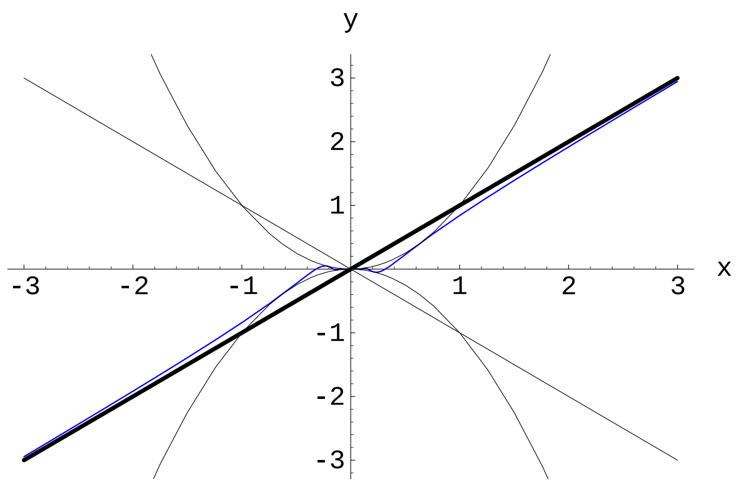


Figura 15: Grafico di $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$. Nel limite per $x \to \infty$ presenta due asintoti obliqui: $y = x$, $y = -x$.

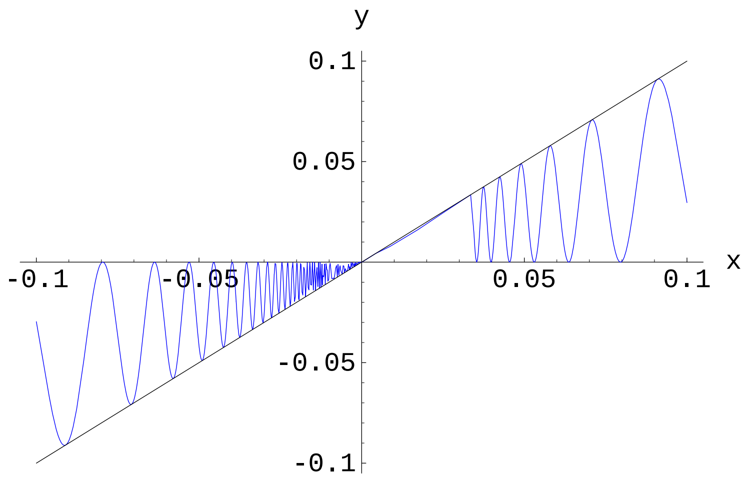


Figura 16: Grafico di $f(x) = x \sin^2 \frac{1}{x}$. Per $|x| \ll 1$ il grafico oscilla tra le curve tra l'asse x e la retta di equazione $y = x$.

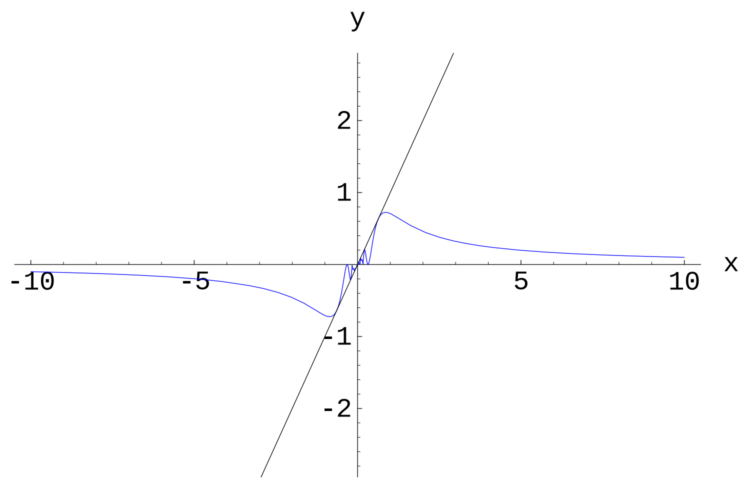


Figura 17: Grafico di $f(x) = x \sin^2 \frac{1}{x}$ nel limite $|x| \gg 1$

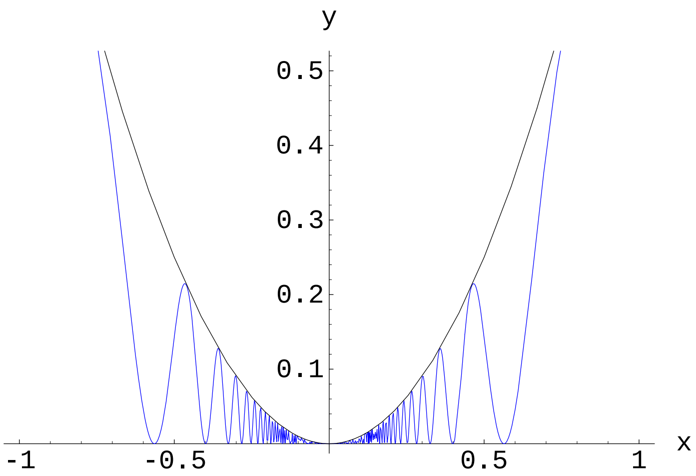


Figura 18: Grafico di $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2}$. Per $|x| \ll 1$ il grafico oscilla tra le curve tra l'asse x e la curva di equazione $y = x^2$.

$$\begin{aligned} l(1,2,2) &= \lim_{y \to 0} \frac{\sin^2(y^2)}{y} \\ &= \lim_{y \to 0} \left[y^3 \sin\left(y^2\right) \cdot \left(\frac{\sin(y^2)}{y^2} \right)^2 \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Per $(m,n,p) = (2,2,2)$:

$$\begin{aligned} l(2,2,2) &= \lim_{y \to 0} \frac{\sin^2(y^2)}{y^2} \\ &= \lim_{y \to 0} \left[y^2 \left(\frac{\sin(y^2)}{y^2} \right)^2 \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Il grafico di $f(x) = x^2 \sin^2 x^{-2}$ per $|x| \ll 1$ compie oscillazioni tra l'asse x e la curva $y = x^2$, come possiamo vedere dalla figura 18.
Di contro, è visibile l'asintoto orizzontale $y = 0$ nel limite $|x| \to +\infty$ (figura 19).
Per $(m,n,p) = (5,3,3)$

$$\begin{aligned} l(5,3,3) &= \lim_{y \to 0} \frac{\sin^3(y^3)}{y^5} \\ &= \lim_{y \to 0} y^4 \left(\frac{\sin(y^3)}{y^3} \right)^3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

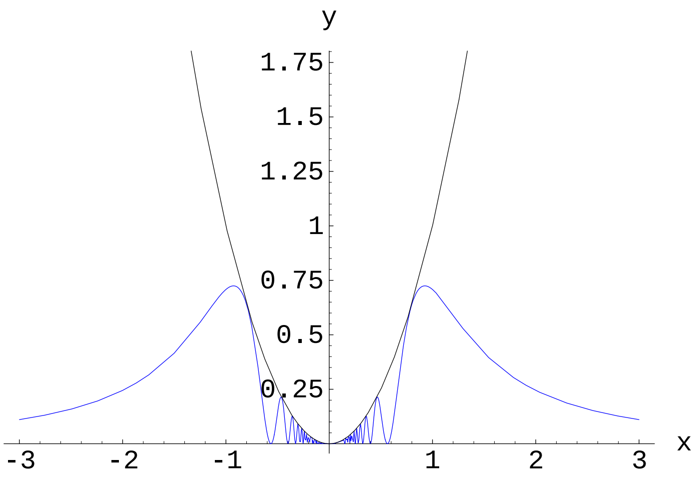


Figura 19: Grafico di $f(x) = x^2 \sin^2 \frac{1}{x^2}$ nel limite $|x| \gg 1$

N. 5

$\lim\limits_{x \to a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a} = \frac{0}{0}$

Formule di prostaferesi:

$$\sin x - \sin a = 2 \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2}$$

Implica:

$$\lim_{x \to a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a} = \lim_{x \to a} \left(\frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} \cos \frac{x+a}{2} \right) = \cos a$$

N. 6

$l = \lim\limits_{x \to -2} \frac{\tan \pi x}{x+2} = \frac{0}{0}$

Cambio di variabile:

$$\pi x = y - 2\pi \tag{58}$$

La (58) implica:

$$l = \pi \lim_{y \to 0} \frac{\tan y}{y} = \pi$$

N. 7

$l = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{0}{0}$

Formule di prostaferesi:

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

Implica:

$$l = \lim_{h \to 0} \left[\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cos \left(\frac{2x+h}{2} \right) \right] = \cos x$$

N. 8
$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{1-\tan x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sin x-\cos x}{\cos x-\sin x}\cos x\right)=-\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$
N. 9
$\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}=0\cdot\infty$
Cambio di variabile: $x\to y=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}x$:
$\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}=\frac{2}{\pi}\lim\limits_{y\to 0}y\tan y=\frac{2}{\pi}\cdot 1=\frac{2}{\pi}$
N. 10
$\lim\limits_{x\to 0}\cot 2x\cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=0\cdot\infty=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos 2x}{\sin 2x}\frac{\sin x}{\cos x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos 2x}{2\sin xv\cos x}\frac{\sin x}{\cos x}\right)=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x}{\cos^2 x}=\frac{1}{2}$
N. 11
$l=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sin\frac{x}{2}}{\pi-2}=\frac{0}{0}$
Cambio di variabile: $x\to y=\pi-x\Longrightarrow l=\lim\limits_{y\to 0}\frac{1-\cos\frac{y}{2}}{y}=\frac{1}{4}\lim\limits_{y\to 0}\frac{1-\cos\frac{y}{2}}{\left(\frac{y}{2}\right)^2}=\frac{1}{4}\cdot 0=0$
N. 12
$l=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{1-2\cos x}{\pi-3x}=\frac{0}{0}$
Cambio di variabile: $x\to y=\frac{\pi}{3}-x\Longrightarrow\cos x=\cos\left(\frac{\pi}{3}-y\right)=\frac{1}{2}\cos y+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin y$. Il limite diventa:

$$l=\frac{1}{3}\left(\lim_{y\to 0}y\frac{1-\cos y}{y^2}-\lim_{y\to 0}\sqrt{3}\frac{\sin y}{y}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

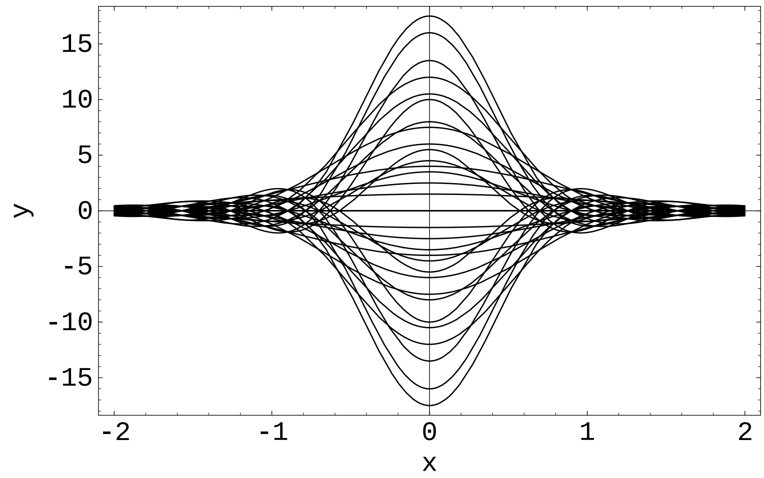
N. 13
$l=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos mx-\cos nx}{x^2}=\frac{0}{0}$
Per le formule di prostaferesi:

$$\cos mx-\cos nx=-2\sin\frac{(m+n)\,x}{2}\sin\frac{(m-n)\,x}{2}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}l&=-\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin\left(\frac{m-n}{2}x\right)}{\frac{m-n}{2}x}\frac{(m^2-n^2)}{2}\frac{\sin\left(\frac{m+n}{2}x\right)}{\frac{m+n}{2}x}\right]\\&=\frac{n^2-m^2}{2}\end{aligned}$$

In figura 1.5.1 è riportato l'andamento di $f(x)=x^{-2}(\cos mx-\cos nx)$ per diversi valori di $m,n\in\mathbb{N}$ con $m\neq n$.
N. 14
$l=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\frac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$
N. 15
$l=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\frac{0}{0}$
Cambio di variabile: $x\to y=$arcsin $x\Longrightarrow x=\sin y$. Quindi: $l=\lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}=1$
N. 16
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan 2x}{\sin 3x}=\frac{0}{0}=\frac{2}{3}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\arctan 2x}{2x}}{\frac{\sin 3x}{3x}}=\frac{2}{3}$
N. 17



$l = \lim\limits_{x \to 1} \frac{1-x^2}{\sin \pi x} = \frac{0}{0} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(1-x)(1+x)}{\sin \pi x}$

Cambio di variabile: $x \to y = \pi x - \pi \Longrightarrow l = \frac{1}{\pi} \lim\limits_{y \to 0} \left[\frac{y}{\sin y} \left(2 + \frac{y}{\pi} \right) \right] = \frac{2}{\pi}$

N. 18

$l = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \sin 2x}{x + \sin 3x} = \frac{0}{0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - 2\frac{\sin 2x}{2x}}{1 + 3\frac{\sin 3x}{3x}} = \frac{1-2}{1+3} = -\frac{1}{4}$

N. 19

$l = \lim\limits_{x \to 1} \frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{1 - \sqrt{x}} = \frac{0}{0}$

Cambio di variabile: $x \to y = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{2} \Longrightarrow$

$l = \lim\limits_{y \to 0} \frac{\sin y}{1 - \sqrt{1 - \frac{2}{\pi} y}} = \lim\limits_{y \to 0} \left(\frac{\sin y}{1 - \sqrt{1 - \frac{2}{\pi} y}} \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{2}{\pi} y}}{1 + \sqrt{1 - \frac{2}{\pi} y}} \right) = \frac{\pi}{2} \lim\limits_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{2}{\pi} y} \right) = \pi.$

N. 20

$l = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2} = \frac{0}{0} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2} \cdot \frac{1 + \sqrt{\cos x}}{1 + \sqrt{\cos x}} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+1} = \frac{1}{4}$

N. 21

$l = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{x} = \frac{0}{0} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{x} \cdot \frac{\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x}}{\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x}} \right) = 1$

1.6 Regola di De L'Hospital

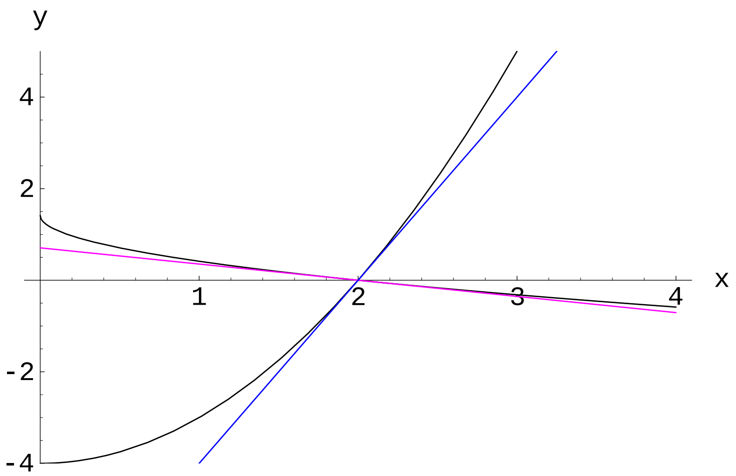
Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni reali di variabile reale e sia x_0 un punto di accumulazione (al finito o all'infinito) per i rispettivi insiemi di definizione delle suddette funzioni. Supponiamo inoltre che siano verificate le seguenti ipotesi:

1. f e g sono entrambe inifinitesime o infinite in x_0.
2. f e g sono entrambe derivabili in un intorno di x_0 escluso al più x_0, ed in tale intorno g è priva di zeri.
3. Il rapporto delle derivate $f'(x)/g'(x)$ è regolare in x_0.

Le ipotesi 1-2-3 implicano:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{59}$$

Esempi



Calcolare il limite:

$$l = \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{2}-\sqrt{x}}{x^2-4} \tag{60}$$

Poniamo: $f(x) = \sqrt{2} - \sqrt{x}$; $g(x) = x^2 - 4$. Applicando la (59):

$$l = \frac{0}{0} \underset{\text{H}}{=} -\lim_{x\to 2} \frac{1}{4x\sqrt{x}} = -\frac{1}{8\sqrt{2}}$$

In figura 1.6 sono riportate le curve $y = f(x)$, $y = g(x)$ e le rispettive rette tangenti.

***

Calcolare il limite:

$$l = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \tag{61}$$

Poniamo: $f(x) = \sin x$; $g(x) = x$. Applicando la (59):

$$l = \frac{0}{0} \underset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0} \cos x = 1$$

In figura 1.6 sono riportate le curve $y = f(x)$, $y = g(x)$ e le rispettive rette tangenti: le curve $y = \sin x$ e $y = x$ hanno la medesima retta tangente nel punto $(0, 0)$.

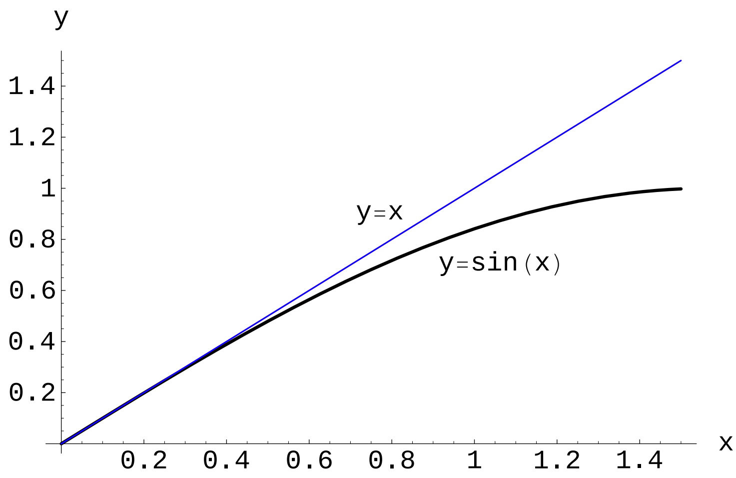
***

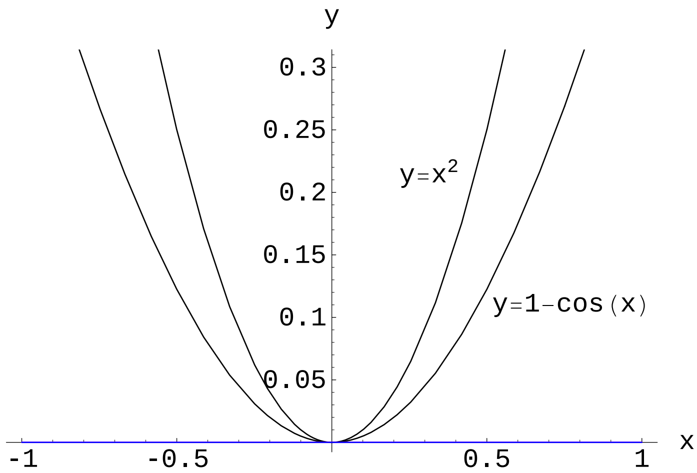
Calcolare il limite:

$$l = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \tag{62}$$

Poniamo: $f(x) = 1 - \cos x$; $g(x) = x^2$. Applicando la (59):

$$l = \frac{0}{0} \underset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{0}{0}$$





In figura 1.6 sono riportate le curve $y = f(x)$, $y = g(x)$ e le rispettive rette tangenti. Da tale grafico vediamo che $y = 1 - \cos x$ e $y = x^2$ hanno in $(0, 0)$ la medesima retta tangente che si identifica con l'asse delle ascisse, per cui il rapporto tra le derivate si presenta nella forma indeterminata $0/0$. In questo caso possiamo ricorrere nuovamente alla regola di De L'Hospital, passando alle derivate seconde:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x} \underset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

In figura 1.6 sono riportate le curve $y = f(x)$, $y = g(x)$ e le rispettive rette tangenti.

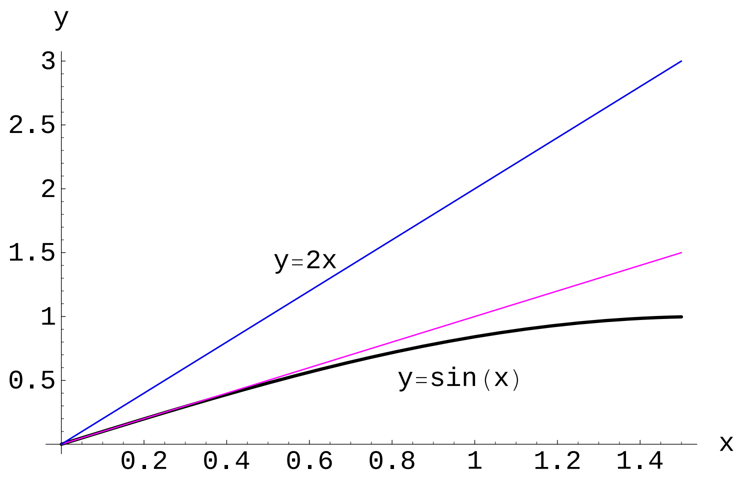
***

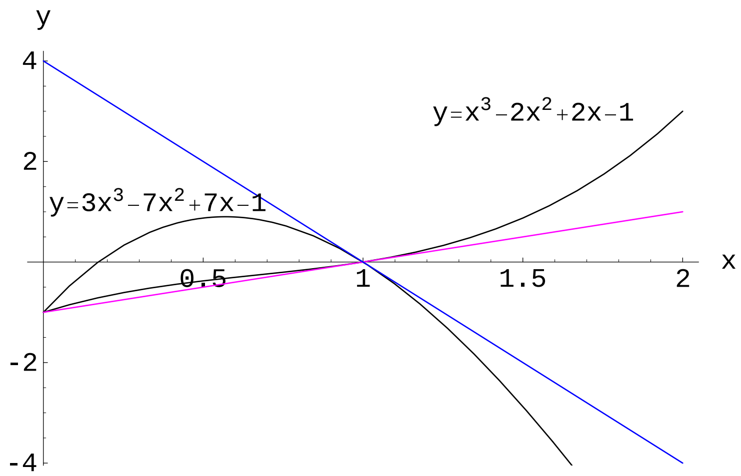
Calcolare il limite:

$$l = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)},$$

essendo: $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$; $g(x) = x^3 - 7x^2 + 7x - 1$. Abbiamo:

$$l = \frac{0}{0} \underset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{3x^2 - 4x + 2}{3x^2 - 14x + 7} = -\frac{1}{4}$$


y
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
x
y=2x
y=sin(x)


y
4
2
-2
-4
0.5
1
1.5
2
x
y=x^3-2x^2+2x-1
y=3x^3-7x^2+7x-1

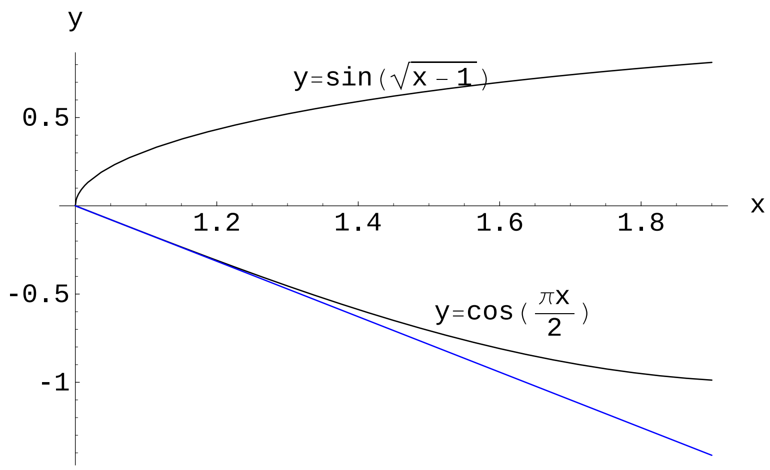


Figura 20: In questo caso la retta tangente a $y = f(x)$ si indentifica con l'asse y.

In figura 1.6 sono riportate le curve $y = f(x)$, $y = g(x)$ e le rispettive rette tangenti.

***

Calcolare il limite:

$$l = \lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{g(x)},$$

essendo: $f(x) = \sin \sqrt{x-1}$; $g(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$. Abbiamo:

$$l = \frac{0}{0} \underset{\text{H}}{=} \lim_{x \to 1^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\frac{1}{\pi} \lim_{x \to 1^+} \frac{\cos \sqrt{x-1}}{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\sqrt{x-1}} = -\frac{1}{\pi} \frac{1^-}{1^- 0^+} = -\infty$$

In figura 20 sono riportate le curve $y = f(x)$, $y = g(x)$ e le rispettive rette tangenti.
Calcolare il limite:

$$l = \lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{g(x)},$$

essendo: $f(x) = \sin \sqrt{x} + x^2$; $g(x) = \tan x$. Abbiamo:

$$l = \frac{0}{0} \underset{\text{H}}{=} \lim_{x \to 1^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 1^+} \left(\frac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + 2x \right) \cos^2 x = +\infty$$

In figura 21 sono riportate le curve $y = f(x)$, $y = g(x)$ e le rispettive rette tangenti.

***

Calcolare il limite:

$$l = \lim_{x \to -2^+} \frac{f(x)}{g(x)},$$

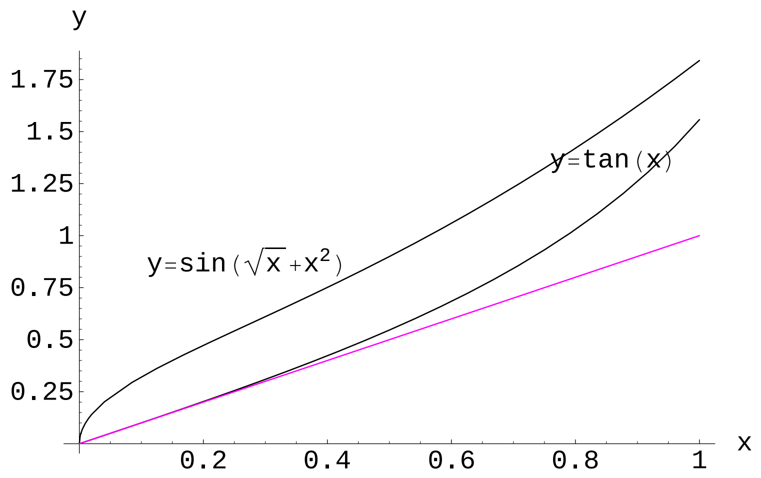


Figura 21: In questo caso la retta tangente a $y = f(x)$ si indentifica con l'asse y, quindi il rapporto diverge.

essendo: $f(x) = |x^3 - 1| - 2x^2 - 1$; $g(x) = \sqrt{2+x}$. Il limite si presenta nella forma indeterminata $0/0$. Per applicare la regola di De L'Hospital valutiamo a parte la derivata di $f(x)$. A tale scopo osserviamo che:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 2x^2 - 2, \text{ se } x > 1 \\ f(x) &= -x^3 - 2x^2, \quad \text{se } x < 1 \end{aligned}$$

Quindi la derivata:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 4x, \quad \text{se } x > 1 \\ f'(x) &= -3x^2 - 4x, \text{ se } x < 1 \end{aligned}$$

Da ciò segue:

$$l = -\lim_{x \to -2^+} \frac{x^3 + 2x^2}{\sqrt{2+x}} = \frac{0}{0} \underset{\mathrm{H}}{=} -2 \lim_{x \to -2^+} \left(3x^2 + 4x\right) \sqrt{2+x} = 0^+$$

In figura 22 sono riportate le curve $y = f(x)$, $y = g(x)$ e le rispettive rette tangenti.

***

Calcolare il limite:

$$l_\mu = \lim_{x \to 0^+} \frac{f_\mu(x)}{g(x)},$$

essendo: $f_\mu(x) = \sin\left(x^{1/\mu}\right) + x^\mu$; $g(x) = \tan x$. Qui è $\mu \in (1, +\infty)$. Il limite si presenta nella forma indeterminata $0/0$, quindi:

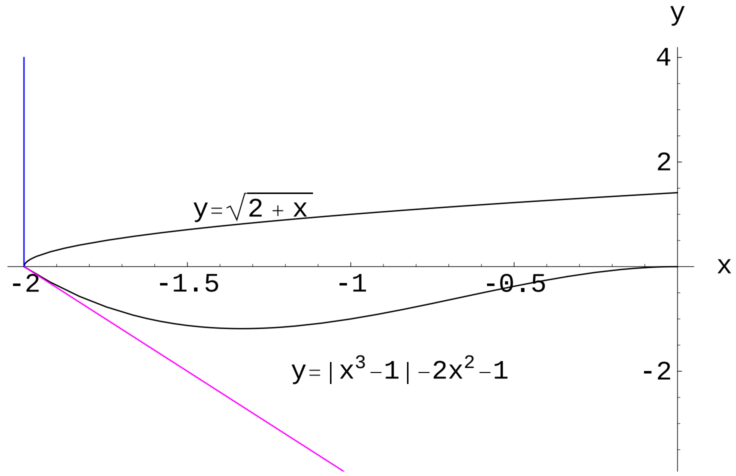


Figura 22: La retta tangente a $y = g(x)$ ha equazione $x = -2$, quindi il rapporto tra i coefficienti angolari è $\frac{f'(2)}{\infty} = 0$.

$$
\begin{aligned}
l_\mu &= \lim_{x \to 0^+} \frac{f'_\mu(x)}{g'(x)} \\
&= \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{\mu} x^{\frac{1-\mu}{\mu}} \cos\left(x^{1/\mu}\right) + \mu x^{\mu-1}}{\frac{1}{\cos^2 x}} \\
&= \lim_{x \to 0^+} \left[\cos^2 x \left(\frac{1}{\mu} \frac{\cos\left(x^{1/\mu}\right)}{x^{\frac{\mu-1}{\mu}}} + \mu x^{\mu-1} \right) \right] \\
&= \frac{0}{+\infty} = +\infty,
\end{aligned}
$$

cioè $l_\mu = +\infty$, $\forall \mu \in (1, +\infty)$.

***

Calcolare il limite:

$$
l = \lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{\cot x}
$$

Abbiamo:

$$
l = \frac{0}{0} \underset{\mathrm{H}}{=} - \lim_{x \to x_0} \frac{\sin^2 x}{x} = - \lim_{x \to x_0} \frac{\sin x}{x} \sin x = -1 \cdot 0 = 0
$$

***

Calcolare il limite:

$$l = \lim_{x \to -1^-} \frac{f(x)}{g(x)},$$

essendo: $f(x) = \sin(\pi x)$; $g(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$. Il limite si presenta nella forma indeterminata 0/0, quindi:

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x \to -1^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} \\ &= \frac{3\pi}{2} \lim_{x \to -1^-} \frac{\sqrt[3]{(x^2-1)^2} \cos(\pi x)}{x} \\ &= \frac{3\pi}{2} \cdot \frac{0^+ \cdot (-1^-)}{(-1^-)} \\ &= 0^+ \end{aligned}$$

Calcolare il limite:

$$l = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)},$$

essendo: $f(x) = xe^x$; $g(x) = 1 - \cos x$. Il limite si presenta nella forma indeterminata 0/0, quindi:

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{e^x (1+x)}{1 - \cos x} \\ &= \frac{1 \cdot (1+0)}{0} \\ &= \infty \end{aligned}$$

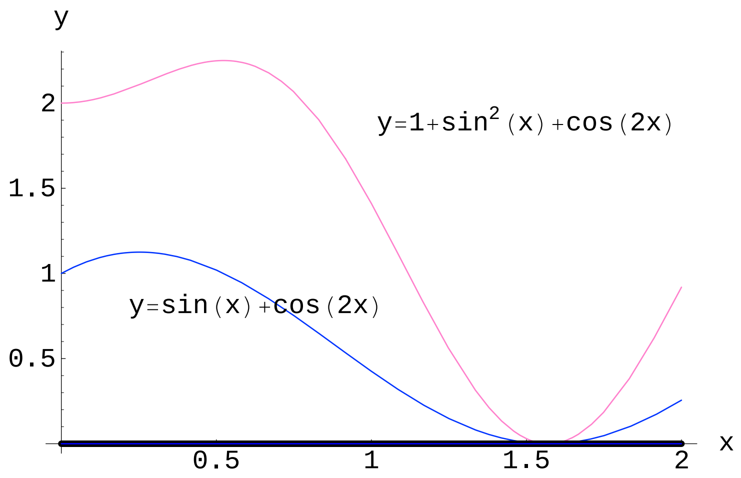
Precisamente:

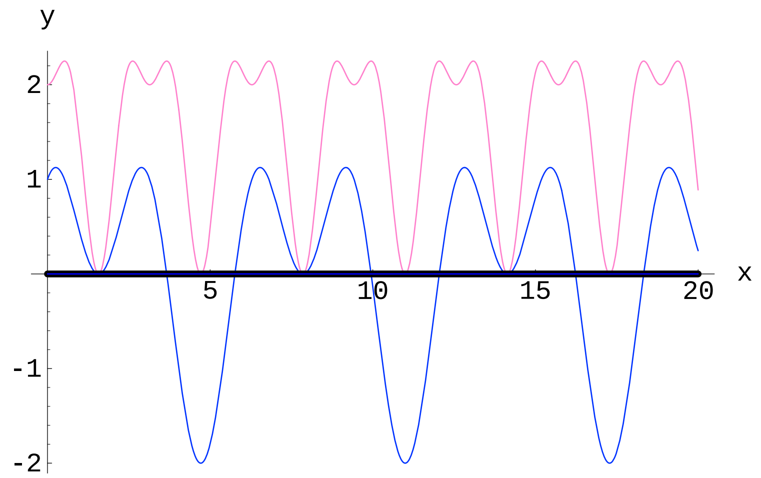
$$\begin{aligned} l_+ &= \lim_{x \to 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1^+ \cdot (1+0^+)}{0^+} = +\infty \\ l_- &= \lim_{x \to 0^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1^- \cdot (1+0^-)}{0^-} = -\infty \end{aligned}$$

Calcolare il limite:

$$l = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{g(x)},$$

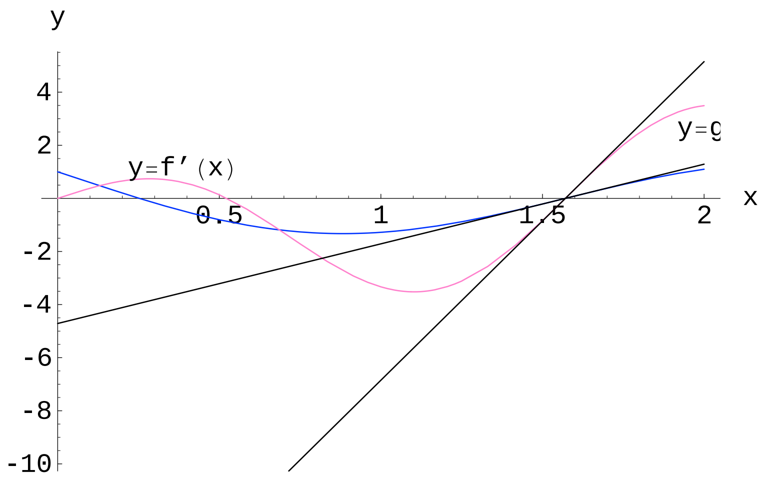
essendo: $f(x) = \sin x + \cos 2x$; $g(x) = 1 + \sin^2 2x + \cos 2x$. Il limite si presenta nella forma indeterminata 0/0, quindi:





$$
\begin{aligned}
l &= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{f'(x)}{g'(x)} \\
&= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - 2\sin 2x}{4\sin 2x - 2\sin 2x} \\
&= \frac{0}{0}
\end{aligned}
$$

Cioè anche il rapporto tra le derivate prime si presenta nella forma indeterminata $0/0$. Dal grafico di figura 1.6 vediamo infatti che le due curve $y = f(x)$ e $y = g(x)$ hanno in $P(\pi/2, 0)$ la medesima retta tangente che si identifica con l'asse x (grassettato in figura.
In figura 1.6 è riportato il grafico delle medesime funzioni nell'intervallo $[0, 6\pi]$).
In tal caso si riapplica la regola di De L'Hospital calcolando il limite del rapporto delle derivate seconde che non sono infinitesime in x_0 (figura 1.6).
Abbiamo:



$$
\begin{aligned}
l &= -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + 4\cos 2x}{8\cos 2x - 4\cos 2x} \\
&= -\frac{1}{-8+4} = \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

***

Calcolare il limite:

$$
l = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)},
$$

essendo: $f(x) = ax + \sin x$; $g(x) = bx + \sin x$ con $a, b \in \mathbb{R}$, e $a \neq b$. Questo è un esempio di limite in cui la regola di De L'Hospital dà un risultato diverso. Apparentemente il limite non esiste, poiché la funzione $\sin x$ è non regolare per $x \to \infty$. In realtà il limite esiste:

$$
\begin{aligned}
l &= \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(a + \frac{\sin x}{x}\right)}{x\left(b + \frac{\sin x}{x}\right)} \\
&= \frac{a+1}{b+1}
\end{aligned}
$$

Di contro, se utilizziamo la regola di De L'Hospital, si trova:

$$
l = \lim_{x\to\infty} \frac{a + \cos x}{b + \cos x},
$$

che non porta ad alcun risultato, giacché la funzione $\cos x$ è non regolare per $x \to \infty$.

***

Calcolare il limite:

$$
l(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x,a)}{g(x,a)},
$$

essendo: $f(x,a)=\sin\sqrt{x-a}$; $g(x)=\cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right)$ con $a\in(0,+\infty)$. Abbiamo:

$$\begin{aligned}
l(a) &= \frac{0}{0}\\
&\underset{\mathrm{H}}{=} -a\lim_{x\to a^+}\frac{\cos\sqrt{x-a}}{\sin\left(\frac{\pi x}{2a}\right)\sqrt{x-a}}\\
&= -a\cdot\frac{1}{0^+}\\
&= a\cdot(-\infty)\\
&\underset{(a>0)}{=} -\infty
\end{aligned}$$

1.6.1 Esercizi proposti

1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x}{x-\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cosh x-1}{1-\cos x}$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x-\sin x}$
6. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 x-2\tan x}{1+\cos 4x}$
7. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{\tan 5x}$
8. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$
9. $\lim\limits_{x\to 0}(\arcsin x)\cot x$
10. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\left(\frac{a}{x}\right)$
11. $\lim\limits_{x\to\infty}x^n\sin\left(\frac{a}{x}\right)$, $n\in(0,+\infty)$
12. $\lim\limits_{x\to 1}\ln x\ln(x-1)$
13. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$
14. $\lim\limits_{x\to 0}x^x$
15. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{1}{2\left(1-\sqrt{x}\right)}-\frac{1}{3\left(1-\sqrt[3]{x}\right)}\right]$

16. $\lim_{x \to +\infty} x^{1/x}$

17. $\lim_{x \to 0} x^{\frac{2}{4+lonx}}$

18. $\lim_{x \to 0} x^{\sin x}$

19. $\lim_{x \to 1} (1-x)^{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$

20. $\lim_{x \to 1} (ax^2+bc+1)^{\frac{1}{ax^2+bx}}$

21. $\lim_{x \to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

22. $\lim_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{1-x}}$

23. $\lim_{x \to 1} \left(\tan \frac{\pi x}{4}\right)^{\tan \frac{\pi x}{2}}$

24. $\lim_{x \to 0} (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$

25. $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$

26. $\lim_{x \to 0} (\cot x)^{\sin x}$

27. $\lim_{x \to 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\ln(\sin x)}}$

28. $\lim_{x \to 0} \frac{e^{ax}-1}{x} \quad (a > 0)$

29. $\lim_{x \to 1} \frac{1+\cos(\pi x)}{x^2-2x+1}$

30. $\lim_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

31. $f(x) = (e^{ax} - bx)^{\frac{1}{x}}$ con $a, b > 0$, determinare:$l_0 = \lim_{x \to 0} f(x)$; $l_{\pm\infty} = \lim_{x \to \pm\infty} f(x)$

32. $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)$

33. $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}-\sin x-\cos x}{\ln(\sin 2x)}$

34. $\lim_{x \to 1^+} [\ln x \cdot \ln(\ln x)]$

35. $\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2-\arctan x^2}{(1-\cos x)^3}$

36. $\lim_{x \to 0} \frac{x-\arctan x}{\arcsin x-x}$

37. $\lim_{x \to 0} \frac{x-\arcsin x}{\sin^3 x}$

38. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1+\ln(1-x)}{\tan x-x}$

39. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2e^x)}{\sqrt{1+x^2}}$

40. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$

41. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2\ln\left(\cos\frac{1}{x}\right)$

42. $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}\tan x$

43. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\frac{\ln|\tan x|}{\ln|\pi-2x|}$

44. $\lim\limits_{x\to 0^+}(\arcsin x\ln x)$

45. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\cot x\right)$

46. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\cot^2 x\right)$

47. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{1-\cos x}-\frac{2}{x^2}\right)$

48. $\lim\limits_{x\to 0}|x|^{\sin x}$

49. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{e^{e^x}}{e^x}$

50. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\pi-2\arctan x}$

51. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(ax)-ax}{\sin(bx)-bx},\ a\neq b$

52. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}$

53. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{\pi}{4}-\arctan x}{\sqrt{1-x^2}}$

54. $\lim\limits_{x\to +\infty}(1+a^x)^{\frac{1}{x}};\ \ a>0$

55. $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}-\sin\sqrt{x}}{\tan x\sqrt{\sin x}}$

56. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}{\sin x-x\cos x}$

57. $\lim\limits_{x\to 0}(x-\sin x)\ln x$

58. $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)\ \frac{1}{\log_a x}$

59. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$

60. $\lim_{x\to 0^+} \frac{(1+x)^{1/x}\sqrt{1+x}-e}{x^2}$

61. Calcolare: $l_{\pm} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^{\pm}} f(x)$, con $f(x) = \sqrt{1+\tan x+\tan^2 x}\,(1-e^{\pi-2x})$

62. $\lim_{x\to 0} \frac{2^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt[4]{1-\cos x}}$

63. $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \left(2\sin^2 x\right)^{1/\cos 2x}$

64. $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} (\pi-4x)\ln(1-\tan^2 x)$

65. $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(1+\pi-4\arctan x)}{\sin(1-x)}$

66. $\lim_{x\to \sqrt{3}} \frac{3\arctan x-\pi}{3\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)-\pi}$

1.6.2 Soluzioni

1. $l = \frac{0}{0} \overset{H}{=} \lim_{x\to 1} \frac{3x^2-4x-1}{3x^2-7} = \frac{1}{2}$

2. $l = \frac{0}{0} \overset{H}{=} -\frac{1}{3}\lim_{x\to 1} \frac{\sin x}{x} = -\frac{1}{3}$

3. $l = \frac{0}{0} \overset{H}{=} \frac{2}{\pi}\lim_{x\to 1} \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{0} = \infty$

4. $l = \frac{0}{0} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sinh x}{\sin x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sinh x}{x}\cdot\frac{x}{\sin x}\right) = 1$

5. $l = \frac{0}{0} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}-\cos x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^3 x}{\cos^2 x(1-\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)\left(1+\cos x+\cos^2 x\right)}{\cos^2 x(1-\cos x)} = \lim_{y\to 1} \frac{y^2+y+1}{y^2} = 3$

6. $l = \frac{\frac{1}{2}-2}{1-1} = \infty$

7. $l = \frac{0}{0} \overset{H}{=} \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 5x}{\cos^2 x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 10x}{\sin 2x} = \frac{0}{0} \overset{H}{=} 5\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 10x}{\cos 2x} = 5$

8. $l = 0\cdot\infty = \lim_{x\to 1} \frac{1-x}{\cot\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = \frac{0}{0} \overset{H}{=} \frac{2}{\pi}\lim_{x\to 1}\sin^2\frac{\pi x}{2} = \frac{2}{\pi}$

9. $l = 0\cdot\infty = \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{\tan x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin x}{x}\cdot\frac{x}{\tan x}\right) = 1$

10. $l = \lim_{y\to 0} \frac{\sin ay}{y} = a$

    Il grafico di $f(x) = x\sin\left(\frac{a}{x}\right)$ è riportato in figura 23.

11. $l = \lim_{y\to 0} \frac{\sin ay}{y^n} = \lim_{y\to 0} \frac{a}{y^{n-1}}\left(\frac{\sin ay}{ay}\right) = \begin{cases} a, & n=1 \\ +\infty, & n>1 \\ 0, & n<1 \end{cases}$

    Il grafico di $f(x) = x^n\sin\left(\frac{a}{x}\right)$ è riportato in figura 24.

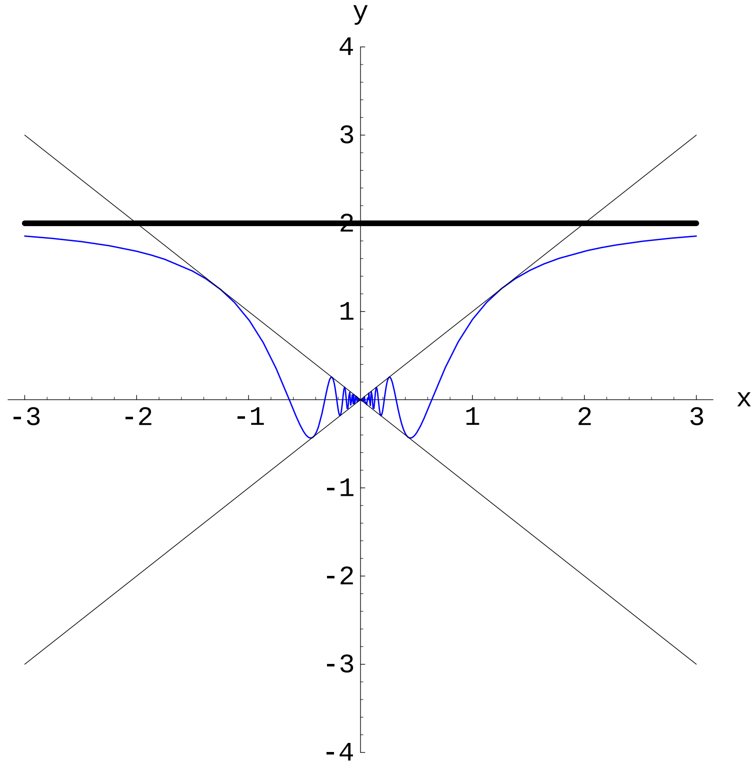


Figura 23: Grafico di $f(x) = x \sin \frac{a}{x}$ per $a = 2$.

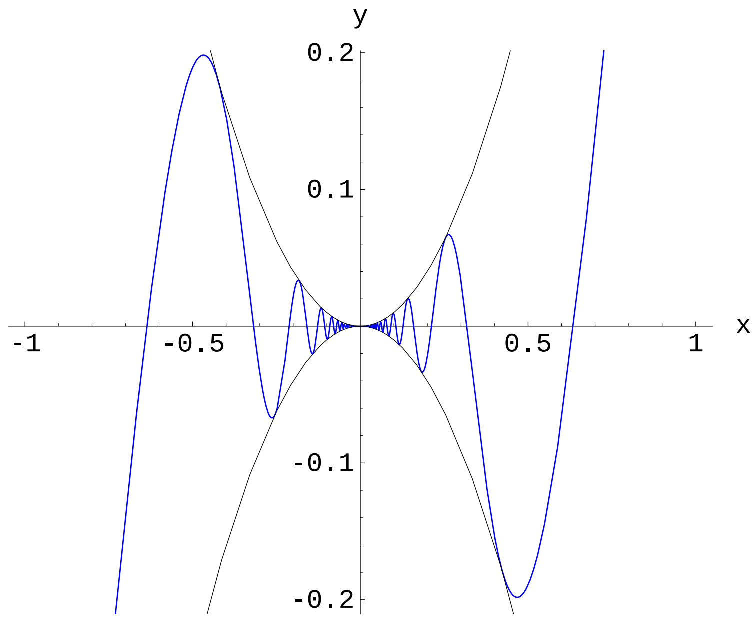


Figura 24: Grafico di $f(x) = x^n \sin \frac{a}{x}$ per $a = 2$, $n = 2$.

12. $l = 0 \cdot \infty$. Eseguiamo il cambio di variabile: $x = e^y$, quindi:

$$\begin{aligned} l &= \lim_{y\to 0} y \ln\left(e^y - 1\right) \\ &= \lim_{y\to 0} \frac{\ln\left(e^y-1\right)}{y^{-1}} \\ &\overset{H}{=} \lim_{y\to 0} \frac{y^2 e^y}{e^y - 1} \\ &\overset{H}{=} -\lim_{y\to 0}\left(2y + y^2\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

13. $l = \infty - \infty = \lim_{x\to 1} \frac{x\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x} = \frac{0}{0} \overset{H}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{\ln x + \frac{x-1}{x}} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}$

14. $l = 0^0 = \lim_{x\to 0} e^{\ln x^x} = \lim_{x\to 0} e^\lambda$, $\lambda = \lim_{x\to 0} x\ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\mathrm{H}}{=} -\lim_{x\to 0} x = 0^- \Longrightarrow l = e^{0^-} = 1^-$

15. $l = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{x^{1/6}-1}{x^{2/3}}}{\frac{-3x^{1/6}+5\sqrt{x}-2}{x^{2/3}}} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{2+5x^{1/6}+5\sqrt{x}} = \frac{1}{12}$

16. $l = \lim_{x\to +\infty} x^{1/x} = \infty^0 = \lim_{x\to+\infty} e^\lambda$; $\lambda = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \frac{\infty}{\infty} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0^+ \Longrightarrow l = e^{0^+} = 1^+$

17. $l = 0^0$; $l = e^\lambda$, $\lambda \overset{def}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\ln x}{4+\ln x} = \frac{\infty}{\infty} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{x}}{4+\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{4x+1} = 2 \Longrightarrow l = e^2$

18. $l = 0^0$; $l = e^\lambda$, $\lambda \overset{def}{=} \lim_{x\to 0} \sin x \ln x = 0 \cdot \infty = -\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x}\right) = 0 \Longrightarrow l = 1$

19. $l = 0^0$; $l = e^\lambda$; $\lambda \overset{def}{=} \lim_{x\to 1}\left[\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\ln\left(1-x\right)\right] = 0 \cdot \infty = \lim_{x\to 1} \frac{\ln(1-x)}{\left[\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]^{-1}} = \frac{\infty}{\infty}$

$\overset{\mathrm{H}}{=} \frac{2}{\pi}\lim_{x\to 1}\left[\frac{\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{1-x} \cdot \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}\right] = \frac{2}{\pi}\lim_{x\to 1} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{1-x} = \frac{0}{0} \overset{\mathrm{H}}{=} -\lim_{x\to 1} \sin\left(\pi x\right) = 0 \Longrightarrow l = 1$

20. $l = 1^\infty$; $l = e^\lambda$, $\lambda \overset{def}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(ax^2+bx+1\right)}{ax^2+bx} = \frac{0}{0} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2ax+b}{(ax^2+bx)(ax^2+bx+1)} = b \Longrightarrow l = e^b$

21. $l = 1^\infty$; $l = e^\lambda$, $\lambda \overset{def}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{1-x} = \frac{0}{0} \overset{\mathrm{H}}{=} -\lim_{x\to 1} \frac{1}{x} = -1 \Longrightarrow l = \frac{1}{e}$

22. $l = \infty^0$; $l = e^\lambda$, $\lambda \overset{def}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{1-x} = \frac{\infty}{\infty} \overset{\mathrm{H}}{=} -\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0^- \Longrightarrow l = e^{0^-} = 1^-$

23. $l = 1^\infty$; $l = e^\lambda$, $\lambda \overset{def}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\ln\left(\tan\frac{\pi x}{2}\right)}{\cot\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = \frac{0}{0} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{\pi}{4}\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{-\frac{\pi}{2}\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = -1 \Longrightarrow l = \frac{1}{e}$

24. $l = \infty^0$; $l = e^\lambda$, $\lambda \overset{def}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cot x)}{\ln x} = \frac{\infty}{\infty} \overset{\mathrm{H}}{=} -\lim_{x\to 0} \frac{x}{\cos x \sin x} = -1 \Longrightarrow l = -\frac{1}{e}$

25. $l = \infty^0$; $l = e^\lambda$, $\lambda \overset{def}{=} \lim_{x\to 0} \tan x \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\lim_{x\to 0} \tan x \ln x = 0 \cdot \infty = -\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\cot x} = \frac{\infty}{\infty} \overset{def}{=}$
$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x} = 0 \Longrightarrow l = 1$

26. $l=\infty^0$; $l=e^\lambda$, $\lambda\overset{def}{=}\lim\limits_{x\to 0}\sin x\ln(\cot x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cot x)}{(\sin x)^{-1}}=\frac{\infty}{\infty}\overset{def}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos^2 x}=0\Longrightarrow l=1$

27. $l=\infty^0$; $l=e^\lambda$, $\lambda\overset{def}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(\cot x)}{\ln(\sin x)}=\frac{\infty}{\infty}\overset{\mathrm{H}}{=}-\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{\cot x}\cdot\frac{1}{\sin^2 x}}{\cot x}=-\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\cos^2 x}=-1\Longrightarrow l=\frac{1}{e}$

28. $l=\frac{0}{0}\overset{\mathrm{H}}{=}a\lim\limits_{x\to 0}e^{ax}=a$

29. $l=\frac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1+\cos(\pi x)}{(x-1)^2}\overset{\mathrm{H}}{=}\lim\limits_{x\to 1}\frac{-\pi\sin(\pi x)}{2(x-1)}=-\frac{\pi}{2}\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(\pi x)}{x-1}\overset{\mathrm{H}}{=}-\frac{\pi^2}{2}\lim\limits_{x\to 1}\cos\pi x=\frac{\pi^2}{2}$

30. $l=1^\infty$; $l=e^\lambda$, $\lambda\overset{def}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}=\frac{0}{0}\overset{\mathrm{H}}{=}-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{2x}=-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=-\frac{1}{2}$, $l=\frac{1}{\sqrt{e}}$

31. $l_{+\infty}=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\infty^0$; $l_{+\infty}=e^{\lambda_{+\infty}}$,

$\lambda_{+\infty}\overset{def}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(e^{ax}-bx)}{x}=\frac{\infty}{\infty}\overset{\mathrm{H}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a-be^{-ax}}{1-2xe^{-ax}}=a\Longrightarrow l_{+\infty}=e^a$

$l_{-\infty}=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{ax}-bx)^{\frac{1}{x}}=\infty^0$; $l_{-\infty}=e^{\lambda_{-\infty}}$; $\lambda_{-\infty}\overset{def}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(e^{ax}-bx)}{x}=$

$=\frac{\infty}{\infty}\overset{\mathrm{H}}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{ae^{-ax}-b}{e^{-ax}-bx}=\frac{0-b}{+\infty}=-b\cdot 0^+=0^-$

$l_0=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1^\infty$; $l_0=e^{\lambda_0}$, $\lambda_0\overset{def}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(e^{ax}-bx)}{x}=\frac{0}{0}\overset{\mathrm{H}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{ae^{ax}-b}{e^{ax}-bx}=a-b\Longrightarrow l_0=e^{a-b}$

32. $l=\infty-\infty=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2}=\frac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4}\cdot\frac{x^2}{\sin^2 x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4}\overset{\mathrm{H}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x-\sin 2x}{4x^3}\overset{\mathrm{H}}{=}$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2-2\sin 2x}{12x^2}=$

$=\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=\frac{1}{3}$

33. $l=\frac{0}{0}\overset{\mathrm{H}}{=}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x(\sin x-\cos x)}{\cos 2x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{0}{0}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}=-\frac{1}{4}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x+\cos x}{\sin 2x}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$

34. $l=0\cdot\infty=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\ln(\ln x)}{(\ln x)^{-1}}=\frac{\infty}{\infty}\overset{\mathrm{H}}{=}\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x\ln x}}{-\frac{1}{\ln^2 x}\frac{1}{x}}=-\lim\limits_{x\to 1^+}\ln x=0^-$

35. $l=\frac{0}{0}\overset{\mathrm{H}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x-\frac{2x}{1+x^4}}{3(1-\cos x)^2\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\left(1+x^4\right)-2x}{3(1-\cos x)^2\sin x}=\frac{2}{3}\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^5}{\sin x(1-\cos x)^2(1+x^4)}=$

$=\frac{2}{3}\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{x}{\sin x}\cdot\left(\frac{x^2}{1-\cos x}\right)^2\frac{1}{1+x^4}\right]=\frac{2}{3}\lim\limits_{x\to 0}\left[1\cdot 4\cdot\frac{1}{1+x^4}\right]=\frac{8}{3}$

36. $l=\frac{0}{0}\overset{\mathrm{H}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{1-\sqrt{1-x^2}}\frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\sqrt{1-x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}2\sqrt{1-x^2}=2$

37. $l=\frac{0}{0}\overset{\mathrm{H}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3\sin^2 x\cos x}=\frac{1}{3}\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sin^2 x}\right)\cdot\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x\sqrt{1-x^2}}\right)=\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sin^2 x}=$

$=\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{2\sin x\cos x}=-\frac{1}{3}\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{2\sin x}\right)\cdot\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\right)=-\frac{1}{6}$

38. $l=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-\frac{1}{1-x}}{\frac{1}{\cos^2 x}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{[e^x(1-x)-1]\cos^2 x}{(1-\cos^2 x)(1-x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x(1-x)-1}{\sin^2 x}\overset{\mathrm{H}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x(1-x)-e^x}{2\sin x\cos x}=-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}e^x=$ $-\frac{1}{2}$

39. $l = \frac{\infty}{\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\frac{2e^x}{1+2e^x \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1+x^2}}} \right] = \left[\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2e^x}{2e^x(1+2e^{-x})} \right] \cdot \left(\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} \right) = 1$

40. $l = 0 \cdot \infty = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{\ln x}{x^{-1}} = \frac{\infty}{\infty} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim\limits_{x\to0^+} \frac{x^{-1}}{-x^{-2}} = -\lim\limits_{x\to0^+} x = 0^-$

41. $l = 0 \cdot \infty = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\cos\left(x^{-1}\right)\right)}{x^{-1}} \overset{\mathrm{H}}{=} -\frac{1}{2} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{\cos \frac{1}{x}} = -\frac{1}{2};$

ricordiamo che: $\lim\limits_{x\to+\infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim\limits_{y\to0} \frac{\sin y}{y} = 1, \ \lim\limits_{x\to+\infty} \cos \frac{1}{x} = \cos 0 = 1$

42. $l = 0 \cdot \infty = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\cot x} = \frac{\infty}{\infty} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim\limits_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim\limits_{x\to0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$

43. $l = \frac{\infty}{\infty} \overset{\mathrm{H}}{=} -\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{1}{\tan x}\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{2}{\pi-2x}} = -\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \left(\frac{\cos x}{\sin x} \frac{1}{\cos^2 x} \frac{\pi - x}{2} \right) = \frac{1}{2} \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{2x-\pi}{\sin x \cos x} = \frac{1}{2} \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{2x-\pi}{\cos x} =$

$\overset{\mathrm{H}}{=} \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{2}{\sin x} = -1$

44. $l = 0 \cdot \infty = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{\ln x}{\arcsin x} = \frac{\infty}{\infty} \overset{\mathrm{H}}{=} -\lim\limits_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{(\arcsin x)^2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = -\lim\limits_{x\to0^+} \frac{(\arcsin x)^2}{x} = -\lim\limits_{x\to0^+} \left(\frac{\arcsin x}{x} \right) \cdot$

$\lim\limits_{x\to0^+} \arcsin x = 0^-$

45. $l = \infty - \infty = \lim\limits_{x\to0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x} \right) = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{\sin x - x\cos x}{x \sin x} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim\limits_{x\to0^+} \frac{x \sin x}{\sin x + x\cos x} = 0$

46. $l = \infty - \infty = \lim\limits_{x\to0} \frac{1 - x^2 \cot^2 x}{x^2} = \frac{0}{0} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim\limits_{x\to0} \frac{2x\cot^2 x + 2x^2 \cot x \cdot \frac{1}{\sin^2 x}}{x} =$

$= \lim\limits_{x\to0} \left(-\cot^2 x + x \cot x \cdot \frac{1}{\sin^2 x} \right) =$

$= \lim\limits_{x\to0} \left(-\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + x \frac{\cos x}{\sin^3 x} \right) = \lim\limits_{x\to0} \frac{x\cos x - \sin x \cos^2 x}{\sin^3 x} =$

$= \left(\lim\limits_{x\to0} \cos x \right) \cdot \lim\limits_{x\to0} \frac{x - \sin x \cos x}{\sin^3 x} = \frac{1}{2} \lim\limits_{x\to0} \frac{x - \sin 2x}{\sin^3 x} =$

$= \frac{0}{0} \overset{\mathrm{H}}{=} \frac{1}{2} \lim\limits_{x\to0} \frac{1 - 2\cos 2x}{3 \sin^2 x \cos x} = \frac{1}{6} \lim\limits_{x\to0} \frac{1 - 2\cos 2x}{\sin^2 x} = \frac{1}{6} \lim\limits_{x\to0} \frac{4 \sin 2x}{2 \sin x \cos x} = \frac{2}{3}$

47. $l = \infty - \infty = \lim\limits_{x\to0} \frac{x^2 - 2 + \cos x}{x^2(1-\cos x)} = \frac{0}{0} = \lim\limits_{x\to0} \left(\frac{x^2 - 2 + \cos x}{x^4} \cdot \frac{x^2}{1 - \cos x} \right) = 2 \lim\limits_{x\to0} \frac{x^2 - 2 + \cos x}{x^4} =$

$\overset{\mathrm{H}}{=} \lim\limits_{x\to0} \frac{x - \sin x}{x^3} \overset{\mathrm{H}}{=} \ldots \overset{\mathrm{H}}{=} \frac{1}{6}$

48. $l = 0^0;\ l = e^\lambda,\ \lambda \overset{def}{=} \lim\limits_{x\to0} \sin x \ln|x| = \lim\limits_{x\to0} \frac{\ln|x|}{(\sin x)^{-1}} = \frac{\infty}{\infty} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim\limits_{x\to0} \frac{\frac{1}{|x|} \frac{d}{dx}|x|}{-\frac{1}{\sin^2 x} \cos x} =$

$= -\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin^2 x}{|x|} \frac{d}{dx} |x| = 0 \Longrightarrow l = 1$

49. $l = \frac{\infty}{\infty} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x e^{e^x}}{e^x} = +\infty$

50. $l = \frac{0}{0} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{1+x^{-1}} \cdot \frac{1}{x^2}}{\frac{2}{1+x^2}} = \frac{1}{2} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+x^2}{x(1+x)} = \frac{1}{2}$

51. $l=\frac{0}{0}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{a\cos(ax)-a}{b\cos(bx)-b}=\frac{a}{b}\lim_{x\to 0}\left[\frac{\cos(ax)-1}{(ax)^2}\cdot\frac{(bx)^2}{\cos(bx)-1}\cdot\frac{a^2}{b^2}\right]=\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{a^2}{b^2}=\frac{a^3}{b^3}$

52. Dall'es. 40: $\lim_{x\to 0}x\ln x=0\Longrightarrow l=\frac{0}{0}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)\ln(1+x)+x}{(1+x)\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)+x}{\sin x}=$

$=\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{\ln(1+x)}{x}\right]=1+\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1+\frac{0}{0}\overset{\text{H}}{=}1+\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x}=2$

53. $l=\frac{0}{0}\overset{\text{H}}{==}\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x(1+x^2)}=0$

54. $l=\infty^0=e^{\lambda};\ \lambda\overset{def}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+a^x)}{x}=\frac{\infty}{\infty}\overset{\text{H}}{=}\ln a\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{1+a^x}$

$=\ln a\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{a^x(a^{-x}+1)}=\ln a\Longrightarrow l=e^{\ln a}=a$

55. $l=\frac{0}{0}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{\sin x}}{\cos^2 x}+\frac{\tan x\cos x}{2\sqrt{\sin x}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{\frac{\sin x}{2\sqrt{\sin x}}+\frac{\sqrt{\sin x}}{\cos^2 x}}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1-\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x}}{\frac{\sin x\cos^2 x+2\sin x}{2\sqrt{\sin x}\cos^2 x}}=$

$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0^+}\frac{2\sqrt{x\sin x}\cos^2 x}{\sin x\cos^2 x+2\sin x}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0^+}\frac{2\sqrt{x\sin x}}{\sin x\cos^2+2\sin x}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0^+}\frac{2\sqrt{\frac{\sin x}{x}}}{\frac{\sin x}{x}\cos^2 x+2\frac{\sin x}{x}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$

56. $l=\frac{0}{0}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x\sin x}=\frac{0}{0}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin x+x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2\cos x-x\sin x}=\frac{1}{2}$

57. $l=0\cdot\infty=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{(x-\sin x)^{-1}}=\frac{\infty}{\infty}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-(x-\sin x)^{-2}(1-\cos x)}=-\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)^2}{x(1-\cos x)}$

$=-\lim_{x\to 0}\left[\frac{(x-\sin x)^2}{x^3}\frac{x^2}{1-\cos x}\right]=$

$=-2\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)^2}{x^3}=\frac{0}{0}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 0}-2\lim_{x\to 0}\frac{2(x-\sin x)(1-\cos x)}{3x^2}=-\frac{4}{3}\cdot 0\cdot\frac{1}{2}=0$

58. $l=0^0=\lim_{x\to 0}a^{\log_a\left[(\sin x)^{1/\log_a x}\right]}=a^{\lim_{x\to 0}\log_a\left[(\sin x)^{1/\log_a x}\right]}=a^{\lambda};\ \lambda\overset{def}{=}\lim_{x\to 0}\log_a\left[(\sin x)^{1/\log_a x}\right]$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(\sin x)}{\log_a x}=\frac{\infty}{\infty}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\frac{1}{\log_a e}\cdot x\cdot\log_a e\right)=1\Longrightarrow l=a$

59. $l=\infty^0=\lim_{x\to 0^+}e^{\ln\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}}=\lim_{x\to 0^+}e^{\tan x\ln\left(\frac{1}{x}\right)}=e^{\lambda};\ \lambda\overset{def}{=}\lim_{x\to 0^+}\tan x\ln\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\cot x}=$

$=\frac{\infty}{\infty}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 0^+}x\cdot\frac{\sin x}{x}=0\Longrightarrow l=1$

60. $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e\Longrightarrow\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/x}\sqrt{1+x}-e}{x^2}=\frac{0}{0}$. Calcoliamo la derivata del numeratore:

$f(x)=(1+x)^{1/x}\sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{x}+\frac{1}{2}}$

$\ln f(x)=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)\ln(1+x)\Longrightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{x(x+2)-2(1+x)\ln(1+x)}{2x^2(1+x)}\Longrightarrow$

$\Longrightarrow f'(x)=f(x)\frac{x(x+2)-2(1+x)\ln(1+x)}{2x^2(1+x)}$

$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}+\frac{1}{2}}}{x^2}=\left[\lim_{x\to 0}f(x)\right]\left[\lim_{x\to 0}\frac{x(x+2)-2(1+x)\ln(1+x)}{2x^2(1+x)}\right]=e\lim_{x\to 0}\frac{x(x+2)-2(1+x)\ln(1+x)}{4x^3(1+x)}$

$= \frac{e}{4}\left[\lim_{x\to 0}\frac{x(x+2)-2(1+x)\ln(1+x)}{x^3}\right]\cdot \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x} = \frac{e}{4}\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x-2(1+x)\ln(1+x)}{x^3} = \frac{0}{0} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2x-2\ln(1+x)}{3x^2} = \frac{0}{0.} =$

$= \lim_{x\to 0}\frac{2-\frac{2}{1+x}}{3x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{3(1+x)} = \frac{e}{12}$

61. Determiniamo l_-; eseguiamo il cambio di variabile:

$$y = \tan x,$$

quindi:

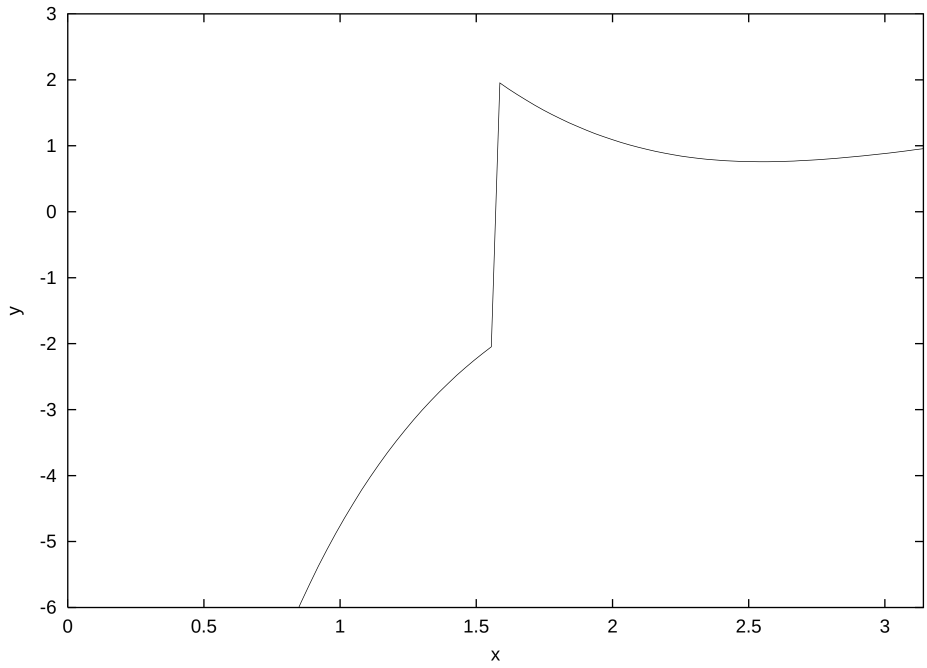
$$l_- = \lim_{y\to +\infty} f(y), \quad \text{con } f(y) = \sqrt{1+y+y^2}e^{\pi - 2\arctan y}$$

Risulta:

$$\begin{aligned}
l_- &= 0\cdot\infty \\
&= \lim_{y\to +\infty}\frac{1-e^{\pi-2\arctan y}}{\sqrt{1+y+y^2}} \\
&= \frac{0}{0} \\
&\overset{\mathrm{H}}{=} -4\left[\lim_{y\to +\infty}\frac{(1+y+y^2)^{3/2}}{2y^3+y^2+2y+1}\right]\left(\lim_{y\to +\infty}e^{\pi-2\arctan y}\right) \\
&= -4\left[\lim_{y\to +\infty}\frac{(1+y^{-1}+y^{-2})^{3/2}}{2+y^{-1}+2y^{-2}+y^{-3}}\right] \\
&= -4\cdot\frac{1}{2} = -2
\end{aligned}$$

Il limite destro è:

$$\begin{aligned}
l_+ &= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+}\frac{1-e^{\pi-2x}}{(1+\tan x+\tan^2 x)^{-1/2}} \\
&= \frac{0}{0} \\
&\overset{\mathrm{H}}{=} 4\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+}\frac{e^{\pi-2x}}{\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{2\sin x}{\cos^3 x}\right)(1+\tan x+\tan^2 x)^{-3/2}} \\
&= 4\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+}\left[\frac{(1+\tan x+\tan^2 x)^{3/2}}{\cos x+2\sin x}\cdot\cos^3 x\right] \\
&= 2\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+}\cos^3 x\left(1+\tan x+\tan^2 x\right)^{3/2} = 0\cdot\infty \\
&= 2\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+}\left(\cos^2 x+\frac{\sin 2x}{2}+\sin^2 x\right)^{3/2} \\
&= +2
\end{aligned}$$



Quindi:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x) = +2, \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = -2$$

Si conclude che la funzione $f(x)$ presenta in $x_0 = \pi/2$ una **discontinuità di prima specie**. Come vedremo più avanti tale locuzione si riferisce alla circostanza secondo cui la funzione non è continua in x_0. Incidentalmente, essa è ivi non regolare, esistendo i due limiti sinistro e destro, ma con valori diversi. La grandezza:

$$s(x_0) = l_+ - l_- = 4,$$

esprime il **salto** della funzione in x_0. Il grafico della funzione è riportato in figura 61, in cui è visibile la discontintuità.

62. Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$, tuttavia non è conveniente applicare direttamente la regola di De l'Hospital, se non dopo alcune manipolazioni. Più precisamente:

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{2^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt[4]{1-\cos x}}\\&=\left(\lim_{x\to 0}\frac{2^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}}\right)\left(\lim_{x\to 0}\sqrt[4]{\frac{x^2}{1-\cos x}}\right)\end{aligned}$$

Il limite del secondo termine tra parentesi vale $\sqrt[4]{2}$, per cui eseguendo il cambio di variabile $x \to y = \sqrt{x}$, abbiamo:

$$\begin{aligned} l &= \sqrt[4]{2} \lim_{y \to 0} \frac{2^y - 1}{y} \\ &\overset{\mathrm{H}}{=} \sqrt[4]{2} \ln 2 \lim_{x \to 0} 2^y \\ &= \sqrt[4]{2} \ln 2 \end{aligned}$$

63. $l = 1^\infty$; $l = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} e^{\ln\left(2\sin^2 x\right)^{1/\cos 2x}} = e^\lambda$;

$\lambda = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\ln\left(2\sin^2 x\right)}{\cos 2x} \overset{\mathrm{H}}{=} -\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{1}{2\sin^2 x} = -1 \Longrightarrow l = \frac{1}{e}$

64. $l = 0 \cdot \infty = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\ln\left(1-\tan^2 x\right)}{(\pi-4x)^{-1}} = \frac{0}{0} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{-\frac{2\tan x}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{1-\tan^2 x}}{4(\pi-4x)^{-2}} = -\frac{1}{2} \left(\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos^2 x} \right) \left[\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{(\pi-4x)^2}{1-\tan^2 x} \right] =$

$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{(\pi-4x)^2}{1-\tan^2 x} = \frac{0}{0} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{-8(\pi-4x)}{-2\frac{\tan x}{\cos^2 x}} = 4 \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{(\pi-4x)\cos^2 x}{\tan x} = 0$

65. Eseguiamo il cambio di variabile: $x \to y = 1 - x$:

$$\begin{aligned} l &= \lim_{y \to 0} \frac{\ln\left[1 + \pi - 4\arctan(1-y)\right]}{\sin y} \\ &= \lim_{y \to 0} \frac{\ln\left[1 + \pi - 4\arctan(1-y)\right]}{y} \cdot \lim_{y \to 0} \frac{y}{\sin y} \\ &= \lim_{y \to 0} \frac{\ln\left[1 + \pi - 4\arctan(1-y)\right]}{y} \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{\ln\left(1 + \pi - 4\arctan x\right)}{1 - x} \\ &\overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x \to 1} \frac{4}{(1+x^2)\left(1 + \pi - 4\arctan x\right)} \\ &= 2 \end{aligned}$$

66. $l = \frac{0}{0} \overset{\mathrm{H}}{=} 2 \lim_{x \to \sqrt{3}} \frac{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}{1+x^2} = \frac{1}{4}$

2 Infinitesimi ed infiniti (parte seconda)

2.1 Parte principale di un infinitesimo

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due infinitesimi in x_0. Supponiamo che $f(x)$ sia di ordine non inferiore a $g(x)$:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda_1 \in \mathbb{R}$$

Si definisce **parte principale prima** dell'infinitesimo $f(x)$ la funzione così definita:

$$p_1(x) = \lambda_1 g(x), \tag{63}$$

identicamente non nulla se e solo se f e g sono dello stesso ordine. Nel caso contrario (cioè f è di ordine superiore a g), risulta $\lambda_1 g(x) \equiv 0$, poiché è $\lambda_1 = 0$.
Poniamo:

$$f_1(x) = f(x) - \lambda_1 g(x) \tag{64}$$

La funzione f_1 è un infinitesimo di ordine superiore a $g(x)$:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} - \lambda_1 = 0$$

Dalla (64):

$$f(x) = \underbrace{\lambda_1 g(x)}_{\text{p.p.}} + \underbrace{f_1(x)}_{\text{infinit. sup.}} \tag{65}$$

La (65) esprime lo sviluppo dell'infinitesimo $f(x)$ in termini della sua parte principale e di un infinitesimo di ordine superiore a $g(x)$.
Supponiamo che l'infinitesimo $f_1(x)$ di ordine superiore a $g(x)$, sia di ordine non inferiore a $[g(x)]^2$; ciò implica:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g(x)^2} = \lambda_2 \in \mathbb{R} \tag{66}$$

Si definisce **parte principale seconda** dell'infinitesimo $f(x)$ la funzione:

$$p_2(x) = \lambda_2 g(x)^2 \tag{67}$$

Poniamo:

$$f_2(x) = f_1(x) - \lambda_2 g(x)^2 = f(x) - \lambda_1 g(x) - \lambda_2 g(x)^2 \tag{68}$$

La funzione $f_2(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore a $[g(x)]^2$:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_2(x)}{g(x)^2} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g(x)^2} - \lambda_2 = 0$$

Dalla (68) otteniamo lo sviluppo dell'infinitesimo $f(x)$ in termini della sua parte principale prima, della sua parte principale seconda e di un infinitesimo di ordine superiore a $[g(x)]^2$:

$$f(x) = \lambda_1 g(x) + \lambda_2 g(x)^2 + f_2(x) \tag{69}$$

Possiamo definire una **parte principale terza** dell'infinitesimo $f(x)$, confrontando $f_2(x)$ con $[g(x)]^3$ (nell'ipotesi in cui $f_2(x)$ sia di ordine non inferiore a $[g(x)]^3$):

$$p_3(x) = \lambda_3 g(x)^3; \ \mathbb{R} \ni \lambda_3 = \lim_{x \to x_0} \frac{f_2(x)}{g(x)^3}$$

Definiamo:

$$f_3(x) = f_2(x) - \lambda_3 g(x)^3$$

Risulta:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_3(x)}{g(x)^3} = 0$$

Otteniamo quindi lo sviluppo dell'infinitesimo $f(x)$ in termini della sua parte principale prima, della sua parte principale seconda, della sua parte principale terza e di un infinitesimo di ordine superiore a $[g(x)]^3$:

$$f(x) = \lambda_1 g(x) + \lambda_2 g(x)^2 + \lambda_3 g(x)^3 + f_3(x) \tag{70}$$

Tale procedimento può essere iterato, pertanto la (70) si scrive:

$$f(x) = \lambda_1 g(x) + \lambda_2 g(x)^2 + ...\lambda_n g(x)^n + f_n(x) \tag{71}$$

Qui la funzione $f_n(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore a $[g(x)]^n$. Per esprimere ciò, è consuetidine scrivere la (71) nella forma:

$$f(x) = \lambda_1 g(x) + \lambda_2 g(x)^2 + ...\lambda_n g(x)^n + O\left[g(x)^{n+1}\right], \tag{72}$$

dove $O\left[g(x)^{n+1}\right]$ è un termine dello stesso ordine di $[g(x)]^{n+1}$.

2.1.1 Esempi

Assegnati i due infinitesimi in $x_0 = 1$:

$$f(x) = x^2 - 1, \quad g(x) = x - 1$$

Abbiamo:

$$\lambda_1 = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 2$$

Quindi $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesimi dello stesso ordine, e la parte principale prima di $f(x)$ è $p_1(x) = 2(x-1)$. La funzione (64) è:

$$f_1(x) = x^2 - 1 - 2(x-1) = (x-1)^2$$

Determiniamo il limite λ_2:

$$\lambda_2 = \lim_{x \to 1} \frac{f_1(x)}{g(x)^2} = 1$$

Quindi la parte principale seconda è:

$$p_2(x) = (x-1)^2$$

La funzione (68):

$$f_2(x) = f_1(x) - p_2(x) \equiv 0$$

Si conclude che lo sviluppo di $f(x)$ è:

$$x^2 - 1 = \underbrace{2(x-1)}_{\text{p.p. prima}} + \underbrace{(x-1)^2}_{\text{infinit. sup.}}$$

***

Assegnati i due infinitesimi in $x_0 = 1$:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+x^2}{2}\right); \quad g(x) = 1 - x,$$

determinare la parte principale prima e la parte principale seconda di f.
Soluzione.
Il limite λ_1 è:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \lim_{x\to 1} \frac{\ln\left(\frac{x+x^2}{2}\right)}{1-x} \\
&= -\lim_{x\to 1} \frac{1+2x}{x+x^2} \\
&= -\frac{3}{2},
\end{aligned}$$

per cui la parte principale di f è:

$$\lambda_1 g(x) = -\frac{3}{2}(1-x)$$

La funzione $f_1(x)$ definita dalla (64) è:

$$f_1(x) = \ln\left(\frac{x+x^2}{2}\right) + \frac{3}{2}(1-x)$$

Calcoliamo:

$$\begin{aligned}
\lambda_2 &= \lim_{x\to 1} \frac{f_1(x)}{g(x)^2} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{\ln\left(\frac{x+x^2}{2}\right) + \frac{3}{2}(1-x)}{(1-x)^2} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{x\to 1} \frac{\frac{2x+1}{x^2+x} - \frac{3}{2}}{x-1} \\
&= -\frac{1}{4}\lim_{x\to 1} \frac{3x^2 - x - 2}{(x-1)(x^2+x)} \\
&= -\frac{5}{8}
\end{aligned}$$

Quindi la parte principale seconda di f è:

$$\lambda_2 g(x)^2 = -\frac{5}{8}(1-x)^2$$

Si conclude che la decomposizione di f in parti principali è:

$$f(x) = -\frac{3}{2}(1-x) - \frac{5}{8}(1-x)^2 + f_3(x)$$

Qui $f_3(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $(1-x)^2$. Utilizzando la convenzione (71), l'ultima equazione va scritta come:

$$f(x) = -\frac{3}{2}(1-x) - \frac{5}{8}(1-x)^2 + O\left[(1-x)^3\right]$$

***

Assegnati gli infinitesimi nel limite per $x \to +\infty$:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x, \quad g(x) = \frac{1}{x},$$

determinare: parte principale prima, parte principale seconda e parte principale terza dell'infinitesimo $f(x)$ rispetto all'infinitesimo $g(x)$, scrivendo quindi il corrispondente sviluppo di f.

Soluzione

Determinamo il limite:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}} \\
&= \frac{0}{0} \\
&\overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1
\end{aligned}$$

Quindi la parte principale prima di f è:

$$\lambda_1 g(x) = \frac{1}{x}$$

La funzione $f_1(x)$ è:

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= f(x) - \lambda_1 g(x) \\
&= \frac{\pi}{2} - \arctan x - \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

Il limite λ_2:

$$
\begin{aligned}
\lambda_2 &= \lim_{x\to+\infty}\frac{f_1(x)}{g(x)^2} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} \\
&= \frac{0}{0} \overset{\mathrm{H}}{=} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{x^2}}{-\frac{2}{x^3}} \\
&= -\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1+x^2} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Quindi la parte principale seconda è identicamente nulla, giacché la funzione $f_1(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore a $[g(x)]^2$:

$$p_2(x) \equiv 0$$

Ciò implica che la funzione $f_2(x)$ è:

$$f_2(x) \equiv f_1(x)$$

Calcoliamo il limite λ_3:

$$
\begin{aligned}
\lambda_3 &= \lim_{x\to+\infty}\frac{f_2(x)}{g(x)^3} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^3}} \\
&= \frac{0}{0} \overset{\mathrm{H}}{=} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{x^2}}{-\frac{3}{x^4}} \\
&= -\frac{1}{3}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2} \\
&= -\frac{1}{3}
\end{aligned}
\tag{73}
$$

Dalla (73) segue:

$$p_3(x) = -\frac{1}{3x^3}$$

La funzione $f_3(x)$:

$$f_3(x) = f_2(x) - p_3(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3}$$

Pertanto lo sviluppo di $f(x)$ si scrive:

$$\frac{\pi}{2} - \arctan x = \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + f_3(x),$$

con $f_3(x)$ infinitesimo di ordine superiore a x^{-3}. Utilizzando la convenzione (71), l'ultima equazione va scritta come:

$$\frac{\pi}{2} - \arctan x = \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + O\left(\frac{1}{x^3}\right) \tag{74}$$

2.2 Determinazione dell'ordine di un infinitesimo/infinito

2.2.1 Esercizi proposti

1. Assegnata la funzione:

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sqrt[3]{x}},$$

verificare che è un infinitesimo per $x \to 0^+$, determinando poi il suo ordine.

2. Applicando il principio di sostituzione degli infinitesimi, calcolare il limite:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sin x(\cos x - 1) - \tan^3 x}{\sqrt{\sin x} + x^2 \cos x + x \cdot \ln(1+x)}$$

3. Determinare nel limite per $x \to 0^+$ l'ordine del seguente infinitesimo:

$$f(x) = \ln\left(1 + x^2\right)$$

4. Determinare nel limite per $x \to 1$ l'ordine del seguente infinitesimo:

$$f(x) = \ln x$$

5. Determinare nel limite per $x \to 1$ l'ordine del seguente infinitesimo:

$$f(x) = \frac{(1-\cos x)^4 + x^5 + \sqrt{x}\sin^3 x}{\sin x + 7x^4}$$

6. Si consideri nel limite per $x \to +\infty$, l'infinitesimo:

$$f(x) = (x^n + 1)^{-\frac{1}{1+\lambda^2}},$$

con λ parametro reale.

Determinare per quale valore di λ tale infinitesimo è di ordine massimo.

7. Si consideri nel limite per $x \to 0$ l'infinitesimo:

$$f(x) = 1 - \cos x + \lambda \sin^2 x$$

Determinare il valore del parametro reale λ tale che f sia di ordine superiore al secondo.

8. Assegnata la funzione:

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^3 + x^5}{x + \sin x}},$$

verificare che è infinitesima in $x_0 = 0$, determinando poi il suo ordine.

9. Confrontare le seguenti coppie di infinitesimi (in $x_0 = 0$):

a $f(x) = x - \ln(1 + x)$; $g(x) = 1 - \cos x$

b $f(x) = x - \sin x$; $g(x) = \tan^2 x - \sin^2 x$

c $f(x) = x \sin x$; $g(x) = 1 - \cos x$

d $f(x) = 1 - \cos x - \frac{x^2}{2}$; $g(x) = \tan x - x$

10. Calcolare i seguenti limiti:

a $\lim_{x \to 0} \frac{3x + x^4 + \cos x \sin^2 x}{x + x \tan x + \sin x \tan^2 x}$

b $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x} + \tan^2 x + \sqrt{x} \sin^2 x}{x + x^2 \cos^2 x - \tan^3 x}$

c $f(x) = x \sin x$; $g(x) = 1 - \cos x$

d $f(x) = 1 - \cos x - \frac{x^2}{2}$; $g(x) = \tan x - x$

2.2.2 Soluzioni

N. 1

Il limite per $x \to 0^+$ si calcola facilmente con la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1 + x)}{\sqrt[3]{x}} = \frac{0}{0} \underset{\mathrm{H}}{=} 3 \lim_{x \to 0^+} \frac{x^{2/3}}{1 + x} = 0$$

Assumendo come infinitesimo di riferimento la funzione $u(x) = x$, abbiamo che se f è dotato di ordine, esso deve verificare la condizione:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1 + x)}{x^\alpha \sqrt[3]{x}} = l \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Quindi:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1 + x)}{x^\alpha \sqrt[3]{x}} \underset{\mathrm{H}}{=} \frac{3}{3\alpha + 1} \lim_{x \to 0^+} \frac{x^{\frac{2}{3} - \alpha}}{x + 1} = l \in \mathbb{R} - \{0\} \Longleftrightarrow \alpha = \frac{2}{3}$$

Si conclude che $f(x)$ è di ordine $2/3$. Più precisamente, per $x \to 0^+$ è $f(x) \sim g(x)$, giacché è $l = 1$. Quindi nel limite per $x \to 0^+$, $f(x)$ si comporta come $x^{2/3}$.

N. 2

Il limite può essere scritto come:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) + f_1(x)}{g(x) + g_1(x)},$$

essendo:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2},\ f_1(x) = \sin x(\cos x - 1) - \tan^3 x$$
$$g(x) = \sqrt{\sin x},\ \ g_1(x) = x^2 \cos x + x \cdot \ln(1+x)$$

Si tratta di dimostrare che $f_1(x)$ e $g_1(x)$ sono infinitesimi di ordine superiore rispetto a $f(x)$, $g(x)$ rispettivamente. Iniziamo con la coppia di infinitesimi $f(x)$, $f_1(x)$. La funzione $f(x)$ è manifestamente un infinitesimo di ordine $\alpha = 2/3$; determiniamo l'ordine di $f_1(x)$:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x(\cos x - 1) - \tan^3 x}{x^{\alpha_1}} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \left[\frac{\sin x}{x^{\alpha_1 - 2}} \cdot \frac{\cos x - 1}{x^2} \cdot \frac{\tan^3 x}{x^{\alpha_1}}\right] = l \in \mathbb{R} - \{0\} \Longleftrightarrow \alpha_1 - 2 = 1 \Longleftrightarrow \alpha_1 = 3
\end{aligned}$$

Quindi a numeratore possiamo trascurare $f_1(x)$. Passiamo alla coppia $g(x)$, $g_1(x)$. È facile rendersi conto che $g(x)$ è un infinitesimo di ordine $\beta = 1/2$. La funzione $g_1(x)$ invece è tale che:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 \cos x + x \cdot \ln(1+x)}{x^{\beta_1}} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \left[x^{2-\beta_1} \cos x + \frac{\ln(1+x)}{x^{\beta_1 - 1}}\right]
\end{aligned}$$

Questo limite è una quantità finita non nulla se, e solo se $\beta_1 = 2$. Ciò implica che $g_1(x)$ è di ordine superiore a $g(x)$. Quindi il limite proposto è:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) + f_1(x)}{g(x) + g_1(x)} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{\sin x}} = 0
\end{aligned}$$

L'ultimo passaggio si giustifica osservando che $\alpha = 2/3$, $\beta = 2$.

N. 3

Il limite si calcola facilmente con la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha} \overset{\text{H}}{=} \frac{2}{\alpha} \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{2-\alpha}}{1+x^2} = l \in \mathbb{R} - \{0\} \Longleftrightarrow \alpha = 2$$

N. 4

Qui l'infinitesimo di riferimento è $u(x) = x - 1$, donde l'ordine α di $\ln x$ è tale che esiste finito e diverso da zero il limite:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{(x-1)^{\alpha}}$$
$$=\frac{1}{\alpha}\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^{1-\alpha}}{x}\neq 0\Longleftrightarrow\alpha=1$$

N. 5

Per determinare l'ordine di f è conveniente utilizzare alcune proprietà degli infinitesimi. Precisamente, sia ϕ è infinitesimo in x_0 esprimibile come:

$$\phi(x)=\sum_{k=1}^{N}\phi_k(x),$$

essendo ϕ_k N infinitesimi di ordine β_k rispettivamente. È facile convincersi che l'ordine di ϕ è

$$\beta=\min_{k\in\mathcal{N}}\{\beta_k\},\ \text{con}\ \ \mathcal{N}=\{1,2,...N\} \tag{75}$$

Nel nostro caso è:

$$f(x)=\frac{\phi(x)}{\eta(x)}$$

Qui è:

$$\phi(x)=\sum_{k=1}^{3}\phi_k(x);\ \ \eta(x)=\sum_{k=1}^{2}\eta_k(x)$$
$$\phi_1(x)=(1-\cos x)^4,\ \phi_2(x)=x^5,\ \phi_3(x)=\sqrt{x}\sin^3 x$$
$$\eta_1(x)=\sin x,\ \eta_2(x)=7x^4$$

Determiniamo gli ordini dei singoli infinitesimi.

Infinitesimo	Ordine
$\phi_1(x)$	$\beta_1=8$
$\phi_2(x)$	$\beta_2=5$
$\phi_3(x)$	$\beta_3=7/2$

Giustifichiamo la tabella. ϕ_1 è di ordine 8 in quanto $1-\cos x$ è di ordine 2; β_2 è banale; $\phi_3(x)$ è tale che:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x^{\frac{\beta_3}{3}-\frac{1}{6}}}\right)^3\neq 0\Longleftrightarrow\beta_3=\frac{7}{2}$$

Per la (75) è $\beta=7/2$. Passiamo a η.

Infinitesimo	Ordine
$\eta_1(x) = \sin x$	$\gamma_1 = 1$
$\eta_2(x) = 7x^4$	$\gamma_2 = 4$

Quindi: $\gamma = 1$. Trattandosi di un rapporto, l'ordine di f è $\alpha = \beta - \gamma = 5/2$.

N. 6

Riscriviamo la funzione:

$$f(x) = (x^n + 1)^{-\frac{1}{1+\lambda^2}}$$

Assumiamo come infinitesimo di riferimento la funzione:

$$u(x) = \frac{1}{x}$$

Quindi l'ordine di f è tale che:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} \frac{(1+x^n)^{-\frac{1}{1+\lambda^2}}}{\frac{1}{x^\alpha}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{(x^n+1)^{\frac{1}{1+\lambda^2}}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x^{\alpha(1+\lambda^2)}}{(x^n+1)}\right]^{\frac{1}{1+\lambda^2}} \\
&= \left[\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\alpha(1+\lambda^2)}}{(x^n+1)}\right]^{\frac{1}{1+\lambda^2}} \\
&= l \in \mathbb{R} - \{0\} \Longleftrightarrow \alpha\left(1+\lambda^2\right) = n
\end{aligned}$$

L'ultimo passaggio fornisce l'ordine di f in funzione del parametro λ.

$$\alpha(\lambda) = \frac{n}{1+\lambda^2}$$

Evidentemente:

$$\alpha_{\max} = \alpha(0) = n$$

Si conclude che il valore di λ che massimizza l'ordine di f è $\lambda = 0$.

N. 7

Il valore richiesto è soluzione di:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x + \lambda \sin^2 x}{x^2} = 0$$

Risolvendo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}+\lambda\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=0$$
$$\frac{1}{2}+\lambda=0\Longrightarrow\lambda=-\frac{1}{2}$$

N. 8
Il limite per $x\to 0$ è:

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}f(x)\\&=\sqrt[3]{\lim_{x\to 0}\frac{x^3+x^5}{x+\sin x}}\\&=\sqrt[3]{\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x^4}{1+\frac{\sin x}{x}}}=0\end{aligned}$$

Poniamo:

$$\begin{aligned}\left[f(x)\right]^3&=f_1(x)+f_2(x)\\f_1(x)&=x^3+x^5\\f_2(x)&=x+\sin x\end{aligned}$$

Gli ordini di f_1 e f_2 sono rispettivamente $\alpha_1=3$, $\alpha_2=1$, quindi l'ordine di f^3 è $\alpha_1-\alpha_2=2$, da cui l'ordine di f è $\alpha=2/3$.
N. 9
a. $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}\overset{\mathrm{H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{x}{(1+x)(1+\sin x)}=0\Longrightarrow f$ è un infinitesimo di ordine superiore a g.
b. Calcoliamo il limite del rapporto:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)\cos^2 x}{\sin^4 x}$$

Il numeratore è un infinitesimo di ordine 3, mentre il denominatore è di ordine 4. Quindi $f(x)$ è un infinitesimo di ordine inferiore a $g(x)$.
c. Determiniamo separatamente gli ordini dei due infinitesimi.

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^\alpha}\\&\overset{\mathrm{H}}{=}\frac{1}{\alpha}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^{\alpha-1}}\\&\overset{\mathrm{H}}{=}-\frac{1}{\alpha(\alpha-1)}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^{\alpha-2}}\\&\neq 0\Longleftrightarrow\alpha=4\end{aligned}$$

Passiamo all'infinitesimo g.

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^{\beta}}\\
&\overset{\text{H}}{=}\frac{1}{\beta}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^{\beta-1}\cos^2 x}\\
&\overset{\text{H}}{=}-\frac{1}{\beta}\left(\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^{\beta-1}}\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2 x}\right)\\
&\neq 0 \Longleftrightarrow \beta=3
\end{aligned}
$$

Si conclude che in $x_0 = 0$ la funzione $f(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore a $g(x)$.

N. 10

Poniamo:

$$
\lim_{x\to 0}\frac{3x+x^4+\cos x\sin^2 x}{x+x\tan x+\sin x\tan^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+f_1(x)}{g(x)+g_1(x)},
$$

essendo:

$$
\begin{aligned}
&f(x)=3x,\ \ f_1(x)=x^4+\cos x\sin^2 x\\
&g(x)=x,\ g_1(x)=x\tan x+\sin x\tan^2 x
\end{aligned}
$$

f_1 e g_1 sono infinitesimi di ordine superiore rispetto a f e g rispettivamente, quindi per il principio di sostituzione degli infinitesimi:

$$
\lim_{x\to 0}\frac{3x+x^4+\cos x\sin^2 x}{x+x\tan x+\sin x\tan^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{x}=3
$$

N. 11

Poniamo:

$$
\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}+\tan^2 x+\sqrt{x}\sin^2 x}{x+x^2\cos^2 x-\tan^3 x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)+f_1(x)}{g(x)+g_1(x)},
$$

essendo:

$$
\begin{aligned}
&f(x)=\sqrt{x},\ \ f_1(x)=\tan^2 x+\sqrt{x}\sin^2 x\\
&g(x)=x,\ g_1(x)=x^2\cos^2 x-\tan^3 x
\end{aligned}
$$

f_1 e g_1 sono infinitesimi di ordine superiore rispetto a f e g rispettivamente, quindi per il principio di sostituzione degli infinitesimi:

$$
\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}+\tan^2 x+\sqrt{x}\sin^2 x}{x+x^2\cos^2 x-\tan^3 x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{x}=+\infty
$$

2.3 Complementi

Nella sezione 1.4 abbiamo introdotto la nozione di infinitesimo (e di infinito) non dotato di ordine, definendo poi gli infinitesimi di ordine infinitamente grande/piccolo (analoghe definizioni per gli infiniti). Un'applicazione diretta della regola di De L'Hospital ci permette di dimostrare le seguenti proposizioni.

Theorem 4 *Sia $\lambda \in (0, +\infty)$. La funzione $f_1(x) = e^{\lambda x}$ è per $x \to +\infty$ un infinito di ordine infinitamente grande. La funzione $f_2(x) = e^{-\lambda x}$ è per $x \to +\infty$ un infinitesimo di ordine infinitamente grande.*

Proof. Assumiamo come infinito di riferimento $v(x) = x$, quindi preso $n \in \mathbb{N}$, calcoliamo:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f_1(x)}{v(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\lambda x}}{x^n} \tag{76}$$

Il limite 76 si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$, per cui applicando n volte la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\lambda x}}{x^n} \overset{\text{H}}{=} \frac{\lambda}{n} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\lambda x}}{x^{n-1}} = \frac{\lambda^2}{n(n-1)} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\lambda x}}{x^{n-2}} = ... \overset{\text{H}}{=} \frac{\lambda^n}{n!} \lim_{x \to +\infty} e^{\lambda x} = +\infty$$

In forza dell'arbitrarietà di n:
$\left.\forall n \in \mathbb{N}, \ \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\lambda x}}{x^n} = +\infty \right) \Longrightarrow$ per $x \to +\infty$, $e^{\lambda x}$ è un infinito di ordine infinitamente grande.
La funzione $f_2(x)$ è per $x \to +\infty$, un infinitesimo. Assumiamo come infinitesimo di riferimento $u(x) = x^{-1}$. Abbiamo:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f_2(x)}{u(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-\lambda x}}{x^{-n}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^{\lambda x}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

In forza dell'arbitrarietà di n:
$\left.\forall n \in \mathbb{N}, \ \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-\lambda x}}{x^n} = +\infty \right) \Longrightarrow$ per $x \to +\infty$, $e^{-\lambda x}$ è un infinitesimo di ordine infinitamente grande.

Corollary 5 *La funzione $f_1(x) = e^{\lambda x}$ è per $x \to -\infty$, un infinitesimo di ordine infinitamente grande; la funzione $f_2(x) = e^{-\lambda x}$ è per $x \to -\infty$, un infinito di ordine infinitamente grande*

Proof. Nel caso di $f_1(x)$, assumiamo come infinitesimo di riferimento $u(x) = x^{-1}$.Eseguiamo la sostituzione $x \to y = -x$:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{\lambda x}}{x^{-n}} = \frac{1}{(-1)^{-n}} \lim_{y \to +\infty} \frac{e^{-\lambda y}}{y^{-n}} = 0,$$

ciò dimostra l'asserto, essendo n un arbitrario intero naturale.
Nel caso di $f_2(x)$ assumiamo come infinito di riferimento $v(x) = x$. Sotto la sostituzione $x \to y = -x$:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-\lambda x}}{x^n} = \frac{1}{(-1)^n} \lim_{y \to +\infty} \frac{e^{\lambda y}}{y} = +\infty,$$

donde l'asserto.

***

Un caso interessante è offerto dal comportamento agli estremi del proprio insieme di definizione, della funzione logaritmo. Precisamente, abbiamoi seguenti teoremi:

Theorem 6 *Per $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$ la funzione $f(x) = \ln x$ è un infinito di ordine infinitamente piccolo.*

Proof.
Esaminiamo prima il comportamento per $x \to 0^+$, assumendo come infinito di riferimento $v(x) = x^{-1}$. Fissiamo ad arbitrio un intero naturale n:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{v(x)^n} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-n}} = \frac{\infty}{\infty} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-nx^{-n-1}} = -\frac{1}{n}\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{n+1}}{x} = -\lim_{x\to 0^+} x^n = 0,$$

donde l'asserto.
Passiamo al limite per $x \to +\infty$, assumendo come infinito di riferimento $v(x) = x$.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{v(x)^n} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \frac{\infty}{\infty} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{nx^{-n-1}} = \frac{1}{n}\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0,$$

donde l'asserto.

Corollary 7 *Per $x \to 0^+$ la funzione $f(x) = x\ln x$ è un infinitesimo non dotato di ordine. Più precisamente, è di ordine minore di 1 e maggiore α, per ogni $\alpha \in (0,1)$*
Per $x \to +\infty$ la funzione $f(x) = x\ln x$ è un infinito non dotato di ordine. Più precisamente, è di ordine maggiore di 1 e minore di α, per ogni $\alpha > 1$.

Proof. Dimostriamo innanzitutto che $f(x)$ è un infinitesimo per $x \to 0^+$.

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0\cdot\infty = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1}} = \frac{\infty}{\infty} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0^+} x = 0$$

Quindi assumiamo come infinitesimo di riferimento $u(x) = x$.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{u(x)} = \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$$

cioè $f(x)$ è un infinitesimo di ordine minore di 1. D'altro canto, preso arbitrariamente $\alpha \in (0,1)$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{u(x)^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{\alpha-1}} = 0 \tag{77}$$

La (77) è verificata $\forall\alpha \in (0,1)$ e ciò dimostra la seconda parte dell'asserto per $x \to 0^+$.
Passiamo al limite per $x \to +\infty$, iniziando osservando banalmente che $f(x)$ è ivi un infinito.
Assumiamo come infinito di riferimento $v(x) = x$.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{v(x)} = \lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$$

cioè $f(x)$ è un infinito di ordine maggiore di 1. D'altro canto, se α è un arbitrario numero reale maggiore di 1

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{v(x)^{\alpha}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha-1}}=\frac{\infty}{\infty}\overset{\mathrm{H}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{(\alpha-1)\,x^{\alpha-2}}=\frac{1}{\alpha-1}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{\alpha-1}}=0,$$

donde l'asserto.

Theorem 8 *Siano*

$$f(x)=x\ln x,\quad g(x)=x\ln x\cdot\ln\ln x$$

Risulta: per $x\to+\infty$, $g(x)$ è un infinito di ordine superiore a $f(x)$. Inoltre, $g(x)$ è un infinito non dotato di ordine. È di ordine maggiore di 1, e minore di α, per ogni $\alpha>1$

Proof. La prima parte si dimostra banalmente:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\ln\ln x=+\infty$$

Per la seconda parte, preso $\alpha>1$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x^{\alpha}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x\cdot\ln\ln x}{x^{\alpha-1}}\overset{\mathrm{H}}{=}\frac{1}{\alpha-1}\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\ln\ln x}{x^{\alpha-1}}=\frac{1}{(\alpha-1)^2}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{\alpha-1}\ln x}=0$$

***

Il teorema appena dimostrato si generalizza al sistema delle tre funzioni seguenti:

$$f(x)=x\ln x,\ g(x)=x\ln x\cdot\ln\ln x,\ h(x)=x\ln x\cdot\ln\ln x\cdot\ln\ln\ln x$$

Qui $h(x)$ è un infinito (per $x\to+\infty$) di ordine superiore rispetto a $g(x)$ e a sua volta quest'ultima è un infinito di ordine superiore rispetto a $f(x)$. Inoltre, $f(x), g(x), h(x)$ sono infiniti non dotati di ordine che è maggiore di 1 e minore di un qualunque $\alpha>1$. Iterando il procedimento costruiamo una classe di infiniti:

$$x\ln x,\ x\ln x\cdot\ln\ln x, ...,\ x\ln x\cdot ...\cdot\ln\ln ...\ln x,\ ...$$

ciascuno dei quali è di ordine superiore rispetto al precedente e non è dotato di ordine che è maggiore di 1 e minore di un qualunque $\alpha>1$.

3 Le funzioni continue

3.1 Introduzione

Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale definita in $X\subseteq\mathbb{R}$. Si consideri x_0 punto di accumulazione al finito per X. Se la funzione è convergente in x_0, si ha:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=l\in\mathbb{R}\tag{78}$$

Il numero reale l non è legato al valore $f(x_0)$ assunto dalla funzione in x_0, anzi la funzione può anche essere ivi non definita. Peraltro, esiste una speciale classe di funzioni per le quali risulta $f(x_0) = l$. Sono le cosiddette **funzioni continue** e nel caso in esame, diremo che la funzione $f(x)$ è **continua in** x_0, donde la (78) si scrive:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \tag{79}$$

Ricordando la definizione di limite:

$$(f(x) \text{ è continua in } x_0) \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\forall J(f(x_0)), \exists I(x_0) : x \in X \cap I(x_0) \Longrightarrow f(x) \subset J(f(x_0))), \tag{80}$$

essendo J, I due intorni di $f(x_0)$ e x_0 rispettivamente. La (80) può essere riscritta in termini dei raggi dei suddetti intorni:

Definition 9

$$(f(x) \text{ \emph{è continua in} } x_0) \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon) \tag{81}$$

Notation 10 *La definizione (80) è banalmente verificata nel caso in cui x_0 sia un punto isolato di X. Infatti, in tal caso esiste un intorno $I_0(x_0) : X \cap I_0(x_0) - \{x_0\} = \varnothing$, donde:*

$$\forall J(f(x_0)), \exists I_0(x_0) : x \in X \cap I_0(x_0) \Longrightarrow f(x) = f(x_0) \subset J(f(x_0))$$

L'Osservazione 9 implica che la definizione di continuità si estende a qualunque $x \in X$, quindi sussiste la

Definition 11 $(f(x)$ *è continua in* $X) \overset{def}{\Longleftrightarrow} (f(x)$ *è continua in ogni* $x \in X)$

***

Introduciamo una grandezza denominata **oscillazione** della funzione $f(x)$ in X.

Definition 12 *Si definisce* ***oscillazione*** *di $f(x)$ in X il numero reale $\omega(f, X)$:*

$$\omega(f, X) = \sup_{x', x'' \in X} |f(x') - f(x'')| \tag{82}$$

Ciò premesso, sussiste il seguente:

Theorem 13 *Condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione $f(x)$ sia continua in x_0, è che preso un intorno $I_\delta(x_0)$, l'oscillazione $\omega(f, X \cap I_\delta(x_0))$ sia un infinitesimo nel limite $\delta \to 0$.*

Proof. Dimostriamo la sufficienza della condizione.
Per ipotesi è:

$$\lim_{\delta\to 0}\omega\left(f, X\cap I_\delta\left(x_0\right)\right)=0,$$

cioè:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists I_{\delta_\varepsilon}\left(x_0\right): 0<\left|x-x_0\right|<\delta_\varepsilon \Longrightarrow \left|\omega\left(f, X\cap I_\delta\left(x_0\right)\right)\right|<\varepsilon \tag{83}$$

Per la (82):

$$x\in X\cap I_\delta\left(x_0\right)\Longrightarrow\left|f\left(x\right)-f\left(x_0\right)\right|\leq\sup_{x',x''\in X\cap I_\delta\left(x_0\right)}\left|f\left(x'\right)-f\left(x''\right)\right|=\omega\left(f, X\cap I_\delta\left(x_0\right)\right)<\varepsilon$$

Ciò implica:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0: x\in X\cap I_\delta\left(x_0\right)\Longrightarrow\left|f\left(x\right)-f\left(x_0\right)\right|<\varepsilon$$

cioè la (81).
Dimostriamo la necessità della condizione.
La continuità della funzione implica:

$$\begin{aligned}&\forall\varepsilon>0,\ \exists I_{\delta_\varepsilon}\left(x_0\right): x',x''\in X\cap I_{\delta_\varepsilon}\left(x_0\right)\Longrightarrow\left|f\left(x'\right)-f\left(x''\right)\right|=\\&=\left|f\left(x'\right)-f\left(x_0\right)+f\left(x_0\right)-f\left(x''\right)\right|\leq\underbrace{\left|f\left(x'\right)-f\left(x_0\right)\right|}_{<\varepsilon}+\underbrace{\left|f\left(x_0\right)-f\left(x''\right)\right|}_{<\varepsilon}<2\varepsilon\end{aligned}$$

Cioè:

$$\begin{aligned}&\forall\varepsilon>0,\ \exists I_{\delta_\varepsilon}\left(x_0\right): x',x''\in X\cap I_{\delta_\varepsilon}\left(x_0\right)\Longrightarrow\\&\Longrightarrow\left|f\left(x'\right)-f\left(x''\right)\right|\leq\sup_{x',x''\in X\cap I_{\delta_\varepsilon}\left(x_0\right)}\left|f\left(x'\right)-f\left(x''\right)\right|=\omega\left(f, X\cap I_{\delta_\varepsilon}\left(x_0\right)\right)<\varepsilon\end{aligned} \tag{84}$$

donde l'asserto.

3.2 Punti di discontinuità

Sia $f\left(x\right)$ definita in $X\subseteq\mathbb{R}$ e x_0 punto di accumulazione.

Definition 14 *$f\left(x\right)$ è **discontinua** in x_0 se **non** risulta:*

$$\lim_{x\to x_0}f\left(x\right)=f\left(x_0\right) \tag{85}$$

*In tal caso, chiamiamo x_0 **punto di discontinuità** della funzione.*

Se $f\left(x\right)$ è discontinua in x_0 significa che sono possibili i seguenti casi:

1. $\lim_{x\to x_0}f\left(x\right)=l\neq f\left(x_0\right)$, $l\in\mathbb{R}$
2. $\nexists\lim_{x\to x_0}f\left(x\right)$
3. $\lim_{x\to x_0}\left|f\left(x\right)\right|=+\infty$

Nel caso 1 si dice che x_0 è una **discontinuità eliminabile** (o **rimovibile**). Tale definizione si giustifica osservando che la funzione:

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{per } x \neq x_0 \\ l, & \text{per } x = x_0 \end{cases}, \tag{86}$$

è continua in x_0.
Nei casi 2 e 3, si dice che x_0 è una **discontinuità non eliminabile.**

Example 15 *Provare che la funzione*

$$f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \tag{87}$$

ha in $x = 0$ una discontinuità eliminabile.
Soluzione. *La funzione (87) non è definita in $x = 0$. D'altro canto, sappiamo che:*

$$\lim_{x \to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0,$$

donde $x = 0$ è una singolarità eliminabile. La funzione:

$$\begin{aligned} g(x) &= x \sin\frac{1}{x}, \text{ per } x \neq 0 \\ g(x) &= 0, \quad \text{per } x = 0, \end{aligned}$$

è continua in $x = 0$.

Le discontinuità non eliminabili si classificano in:

a. discontinuità di prima specie

b. discontinuità di seconda specie

Esaminiamole separatamente.

3.2.1 Discontinuità di prima specie

In questo caso esistono finiti i limiti destro e sinistro:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l^-, \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l^+ \tag{88}$$

tali che:

$$l^{\pm} \in \mathbb{R}, \; l^+ \neq l^-$$

La grandezza:

$$s(x_0) \stackrel{def}{=} l^+ - l^-, \tag{89}$$

si dice **salto di discontinuità** di $f(x)$. Se la funzione è definita in x_0 e risulta:

$$f(x_0) = \frac{l^+ + l^-}{2},$$

diremo che la discontinuità in x_0 è una **discontinuità simmetrica.**
Il grafico di una funzione che ha una discontinuità di prima specie nel punto x_0, presenta un'interruzione in corrispondenza della retta di equazione $x = x_0$. Il salto $s(x_0)$ è la misura del segmento $\overline{P_0'P_0''}$, essendo $P_0'(x_0, l^+)$, $P''(x_0, l^-)$. Nel caso di una discontinuità simmetrica, il punto $P_0(x_0, f(x_0))$ è il punto medio del segmento $\overline{P_0'P_0''}$.

Example 16 *Mostrare che la funzione*

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x-2}\right),$$

ha in $x = 2$ una discontinuità di prima specie.
Soluzione. *Calcoliamo il limite destro e il limite sinistro:*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2^+} f(x) &= \arctan(+\infty) = +\frac{\pi}{2} \\ \lim_{x\to 2^-} f(x) &= \arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2},\end{aligned}$$

donde l'asserto. Il salto di discontinuità è:

$$s(2) = \pi$$

Il grafico della funzione è riportato in figura 25

3.2.2 Discontinuità di seconda specie

Sono tutte e sole le discontinuità non eliminabili che non siano di prima specie. Quindi si verifica almeno una delle circostanze seguenti:

1. $\nexists \lim_{x\to x_0^-} f(x)$, $\exists \lim_{x\to x_0^+} f(x)$
2. $\nexists \lim_{x\to x_0^+} f(x)$, $\exists \lim_{x\to x_0^-} f(x)$
3. $\nexists \lim_{x\to x_0^\pm} f(x)$
4. $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \mp\infty$
5. $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = +\infty$

Se x_0 è un punto di discontinuità di seconda specie, e ad esempio non esiste il limite destro di $f(x)$ per $x \to x_0$, in ogni intorno di x_0 la funzione compie infinite oscillazioni che non si smorzano. Infatti, solo in tal caso è violata la definizione di limite.

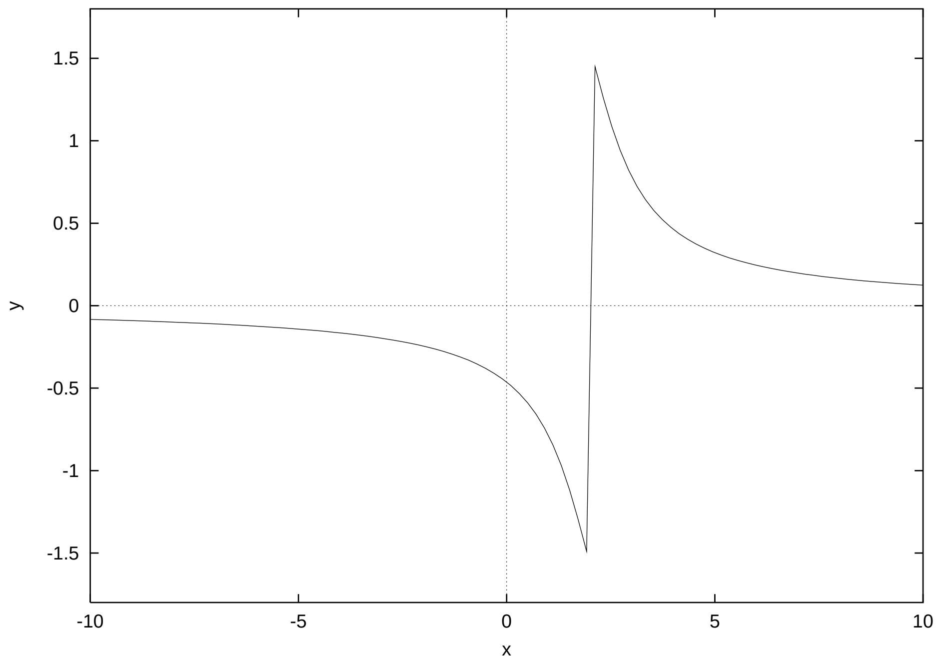


Figura 25: Grafico di $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x-2}\right)$. Si noti la discontinuità di prima specie nel punto $x = 2$.

Example 17 *Mostrare che la funzione*

$$f(x) = \sin\frac{1}{x} \tag{90}$$

ha in $x = 0$ una discontinuità di seconda specie.
Soluzione. *La funzione (90) non è definita in $x = 0$. Inoltre non esiste il limite per $x \to 0$, in quanto la funzione compie infinite oscillazioni intorno al punto $x = 0$ (si veda la fig. 7.).*

Example 18 *Provare che la funzione*

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin\frac{1}{x},\ \textit{per } x < 0 \\ f(x) &= \cos(200x),\ \textit{per } x > 0 \end{aligned} \tag{91}$$

ha in $x = 0$ una discontinuità di seconda specie.
Soluzione. *La funzione è convergente a destra:*

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$$

Il limite sinistro non esiste: per $x \to 0^-$ la funzione compie infinite oscillazioni che non si smorzano come possiamo vedere dal grafico di figura 26.

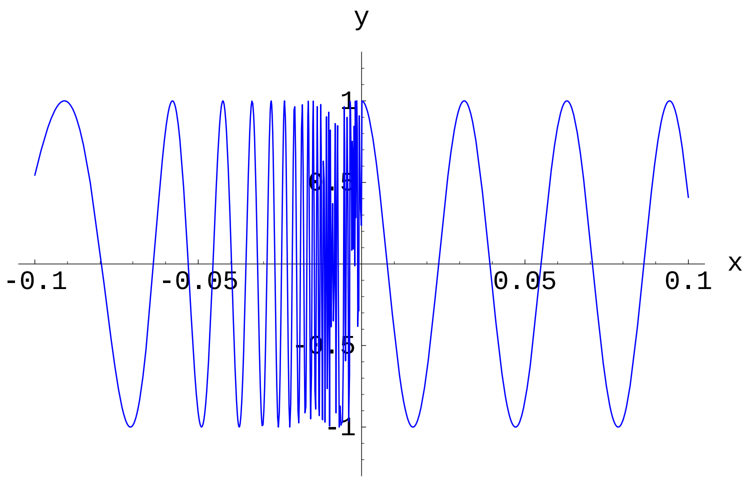


Figura 26: Grafico della funzione data dall'equazione (91).