SCIENTIA – http://www.scientiajournal.org/
International Review of Scientific Synthesis – ISSN 2282-2119
Quaderni di Matematica – 2015

Matematica Open Source – http://www.extrabyte.info

Esercizi svolti sugli integrali indefiniti

Parte 02. Integrazione per introduzione sotto il segno di differenziale

Marcello Colozzo

1 Integrali di somma di funzioni

Riportiamo innanzitutto la tavola degli integrali fondamentali:

$\int x^\lambda dx = \frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1} + C, \quad (\lambda \neq -1)$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C'$
$\int \frac{dx}{x} = \ln \lvert x \rvert + C$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C = -\operatorname{arccot} x + C'$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (a > 0)$	$\int \sinh x dx = \cosh x + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int \cosh x dx = \sinh x + C$
$\int \sin x dx = \cos x + C$	$\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh$
$\int \cos x dx = -\sin x + C$	$\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x + C$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C = \text{arcsinh} x + C$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \begin{cases} \text{arccosh} x + C, & x \in (1, +\infty) \\ \ln \left\lvert x + \sqrt{x^2-1} \right\rvert, & x \notin (-1, 1) \end{cases}$
	$\int \frac{dx}{1-x^2} = \begin{cases} \text{arctanh} x, & x \in (-1, 1) \\ \frac{1}{2} \ln \left\lvert \frac{1+x}{1-x} \right\rvert, & x \notin (-1, 1) \end{cases}$

Esercizio 1 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int (\cos x + \sin x)\, dx} \tag{1}$$

Soluzione

$$I(x) = \int \cos x dx + \int \sin x dx = \sin x - \cos x + C$$

Esercizio 2 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int \left(\sqrt[5]{x^4} - \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}} \right) dx} \tag{2}$$

Soluzione

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \sqrt[5]{x^4} dx - \int \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}} dx \\ &= \int x^{4/5} dx - \int x^{-4/5} dx \\ &= \frac{x^{\frac{4}{5}+1}}{\frac{4}{5}+1} - \frac{x^{-\frac{4}{5}+1}}{-\frac{4}{5}+1} \end{aligned}$$

Cioè

$$I(x) = \frac{5}{9} \sqrt[5]{x^9} - 5 \sqrt[5]{x} + C$$

Esercizio 3 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int \frac{2x^3 - x^2 + 6}{x} dx} \tag{3}$$

Soluzione

$$\begin{aligned}I(x) &= \int \left(2x^2 - x + \frac{6}{x}\right) dx \\ &= 2\int x^2 dx - \int x dx + 6\int \frac{dx}{x} \\ &= \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 6\ln|x| + C\end{aligned}$$

Esercizio 4 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int \frac{4x^5 - x^3 + 2}{x^3} dx} \tag{4}$$

Soluzione

$$\begin{aligned}I(x) &= \int \left(4x^2 - 1 + \frac{2}{x^3}\right) dx \\ &= 4\int x^2 dx - \int dx + 2\int x^{-3} dx \\ &= \frac{4}{3}x^3 - x - \frac{1}{x^2} + C\end{aligned}$$

Esercizio 5 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int \left(\frac{4}{\sin^2 x} + \frac{3}{\cos^2 x}\right) dx} \tag{5}$$

Soluzione

$$\begin{aligned}I(x) &= 4\int \frac{dx}{\sin^2 x} + 3\int \frac{dx}{\cos^2 x} \\ &= 3\tan x - 4\cot x + C\end{aligned}$$

Esercizio 6 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int \frac{\sin 2x + 2\cos x}{\cos x} dx} \tag{6}$$

Soluzione

$$\begin{aligned}I(x) &= \int \frac{\sin 2x}{\cos x} dx + 2\int dx \\ &= 2\int \frac{\sin x \cos x}{\cos x} dx + 2\int dx \\ &= -2\cos x + 2x + C\end{aligned}$$

Cioè

$$I(x) = 2(x - \cos x) + C$$

Esercizio 7 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int \left(\frac{3}{1 + x^2} - \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}}\right) dx} \tag{7}$$

Soluzione

$$\begin{aligned} I(x) &= 3\int \frac{dx}{1+x^2} - 2\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= 3\arctan x - 2\arcsin x + C \end{aligned}$$

Esercizio 8 *Calcolare:*

$$I(x) = \int \frac{3x^7 - 2x^2 + x}{x^3} dx \tag{8}$$

Soluzione

$$\begin{aligned} I(x) &= 3\int x^4 dx - 2\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x^2} \\ &= \frac{3}{5}x^5 - 2\ln|x| - \frac{1}{x} + C \end{aligned}$$

Esercizio 9 *Calcolare:*

$$I(x) = \int \frac{\cos 2x}{\sin x - \cos x} dx \tag{9}$$

Soluzione
Dalle formule di duplicazione:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x - \cos x} dx \\ &= -\int \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\cos x - \sin x} dx \\ &= -\int (\cos x + \sin x)\, dx \\ &= -\int \cos x dx - \int \sin x dx = -\sin x + \cos x + C \end{aligned}$$

Cioè

$$I(x) = \cos x - \sin x + C$$

Esercizio 10 *Calcolare:*

$$I(x) = \int \left(2\sin x + \frac{\sin 2x}{\sin x}\right) dx \tag{10}$$

Soluzione

$$\begin{aligned} I(x) &= 2\int \sin x dx + 2\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x} dx \\ &= -2\cos x + 2\sin x, \end{aligned}$$

per cui

$$I(x) = 2(\sin x - \cos x) + C$$

Esercizio 11 *Calcolare:*

$$I(x) = \int \left(e^{4x} + \frac{5}{x}\right) dx \tag{11}$$

Soluzione

$$\begin{aligned} I(x) &= \int e^{4x}dx + 5\int \frac{dx}{x} \\ &= \frac{1}{4}\int e^{4x}d(4x) + 5\int \frac{dx}{x} \\ &= \frac{1}{4}e^{4x} + 5\ln|x| + C \end{aligned}$$

Esercizio 12 *Calcolare:*

$$I(x) = \int \left(\frac{3}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx \tag{12}$$

Soluzione

$$\begin{aligned} I(x) &= 3\int \frac{dx}{\sin^2 x} + \int \frac{dx}{\cos^2 x} \\ &= -3\cot^2 x + \tan^2 x + C \end{aligned}$$

2 Integrazione per introduzione sotto il segno di differenziale

In realtà abbiamo già avuto occasione di applicare tale metodo in alcuni degli esercizi precedenti. Si tratta della regola di integrazione per sostituzione, studiata nella prima dispensa. Abbiamo:

$$\left[\int f(x)\,dx \right]_{x=\varphi(t)} = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt \tag{13}$$

Esercizio 13 *Calcolare:*

$$I(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{5x+1}} \tag{14}$$

Soluzione
Poniamo $5x + 1 = t \Longrightarrow x = \frac{1}{5}(t-1) \Longrightarrow dx = \frac{dt}{5}$. Quindi

$$I(t) = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{5}\int t^{-1/2}dt = \frac{2}{5}\sqrt{t} + C$$

Ripristinando la variabile x

$$I(x) = \frac{2}{5}\sqrt{5x+1} + C$$

Per procedere in maniera più spedita:

$$I(x) = \frac{1}{5}\int (5x+1)^{-1/2}\,d(5x+1) = \frac{2}{5}\sqrt{5x+1} + C$$

Esercizio 14 *Calcolare:*

$$I(x) = \int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^4}} \tag{15}$$

Soluzione
Posto $t = x^2 \Longrightarrow dt = 2xdx \Longrightarrow xdx = \frac{1}{2}dt$, l'integrale diventa:

$$I(t) = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{2}\text{arcsinh}t + C$$

Ripristinando la variabile x:

$$I(x) = \frac{1}{2}\text{arcsinh}x^2 + C$$

Esercizio 15 *Calcolare:*

$$I(x) = \int \sin(3x-5)\, dx \tag{16}$$

Soluzione

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{1}{3}\int \sin(3x-5)\, d(3x-5) \\ &= \frac{1}{3}\cos(3x-5) + C \end{aligned}$$

Esercizio 16 *Calcolare:*

$$I(x) = \int (x-5)^5\, dx \tag{17}$$

Soluzione

$$I(x) = \int (x-5)^5\, d(x-5) = \frac{1}{6}(x-5)^6 + C$$

Esercizio 17 *Calcolare:*

$$I(x) = \int (ax+b)^n\, dx, \quad (a \neq 0,\, n \in \mathbb{N} - \{0\}) \tag{18}$$

Soluzione

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{1}{a}\int (ax+b)^n\, d(ax+b) \\ &= \frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} + C \end{aligned}$$

Esercizio 18 *Calcolare:*

$$I(x) = \int e^{\cos x} \sin x dx \tag{19}$$

Soluzione

$$I(x) = -\int e^{\cos x} d(\cos x) = -e^{\cos x} + C$$

Esercizio 19 *Calcolare:*

$$I(x) = \int \frac{3}{1+9x^2} dx \tag{20}$$

Soluzione

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{3dx}{1+(3x)^2} = \int \frac{d(3x)}{1+(3x)^2} \\ &= \arctan 3x + C \end{aligned}$$

Esercizio 20 *Calcolare:*

$$I(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{1-2x^2}} \tag{21}$$

Soluzione

$$I(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\sqrt{2}x\right)^2}}$$

Abbiamo $d\left(\sqrt{2}x\right) = \sqrt{2}dx \Longrightarrow dx = \frac{d\left(\sqrt{2}x\right)}{\sqrt{2}}$, per cui l'integrale si scrive:

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d\left(\sqrt{2}x\right)}{\sqrt{1-\left(\sqrt{2}x\right)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin\left(\sqrt{2}x\right) + C \end{aligned}$$

Esercizio 21 *Calcolare:*

$$I(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{1+4x^2}} \tag{22}$$

Soluzione

$$I(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{1+(2x)^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{d(2x)}{\sqrt{1+(2x)^2}} = \frac{1}{2}\text{arcsinh}2x + C$$

Esercizio 22 *Calcolare:*

$$I(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-1}} \tag{23}$$

Soluzione

Posto $t = \sqrt{2}x$, segue $dx = \frac{dt}{\sqrt{2}}$, per cui:

$$I(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}$$

Dalla tavola degli integrali fondamentali:

$$I(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}\text{arccosh}t + C, & \text{se } t > 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|t + \sqrt{t^2-1}\right| + C, & t \notin (-1,1) \end{cases} \tag{24}$$

Osservazione 23 *Fissiamo la nostra attenzione sul secondo membro della (24). La funzione $\frac{1}{\sqrt{2}}$arccosh$t$+ C è definita per $t \in [1,+\infty)$ e la funzione $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|t+\sqrt{t^2-1}\right| + C$ è definita per $t \in (-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$. Tuttavia, la funzione integranda $\frac{1}{\sqrt{t^2-1}}$ non è definita in $t = \pm 1$, onde per definizione di funzione primitiva, dobbiamo omettere tali punti.*

Ripristinando la variabile x:

$$I(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}\text{arccosh}\left(\sqrt{2}x\right) + C, & x > \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\sqrt{2}x + \sqrt{2x^2-1}\right| + C, & x \notin \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{cases} \tag{25}$$

La seconda delle (25) può essere messa in una forma più elegante.

$$\begin{aligned}\forall x \notin \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \ I(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left|\sqrt{2}x + \sqrt{2x^2-1}\right| + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left|\sqrt{2}x + \sqrt{2x^2-1}\right| + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left|\frac{2}{\sqrt{2}}\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2x^2-1}\right)\right| + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2x + \sqrt{2}\sqrt{2x^2-1}\right)\right| + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2x + \sqrt{4x^2-2}\right)\right| + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\ln \left|2x + \sqrt{4x^2-2}\right| - \ln\sqrt{2}\right) + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left|2x + \sqrt{4x^2-2}\right| - \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\sqrt{2} + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left|2x + \sqrt{4x^2-2}\right| - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln 2 + C\end{aligned}$$

Incorporiamo $-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln 2$ nella costante di integrazione, ponendo: $C' = C - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln 2$, si ha:

$$I(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left|2x + \sqrt{4x^2-2}\right| - C', \quad \forall x \notin \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Esercizio 24 *Calcolare:*

$$I(x) = \int x^2 e^{x^3} dx \tag{26}$$

Soluzione
$d(x^3) = 3x^2 dx \Longrightarrow x^2 dx = \frac{1}{3} d(x^3)$, per cui l'integrale si scrive:

$$I(x) = \frac{1}{3}\int e^{x^3} d\left(x^3\right) = \frac{1}{3}x^3 + C$$

Esercizio 25 *Calcolare:*

$$I(x) = \int \frac{dx}{2^x + 3} \tag{27}$$

Soluzione

$$I(x) = \int \frac{2^{-x}dx}{1 + 3 \cdot 2^{-x}}$$

Riesce $d(1 + 3 \cdot 2^{-x}) = -3\ln 2 \cdot 2^{-x}dx \Longrightarrow 2^{-x}dx = -\frac{1}{3\ln 2} d(1 + 3 \cdot 2^{-x})$, onde:

$$I(x) = -\frac{1}{3\ln 2}\int \frac{d(1 + 3 \cdot 2^{-x})}{1 + 3 \cdot 2^{-x}} = -\frac{1}{3\ln 2} \ln\left(1 + 3 \cdot 2^{-x}\right) + C$$

Cerchiamo di esprimere il risultato in una forma più elegante.

$$\begin{aligned}\ln\left(1 + 3 \cdot 2^{-x}\right) &= \ln\left[2^{-x}(2^x + 3)\right] \\ &= \ln 2^{-x} + \ln(2^x + 3) \\ &= -x\ln 2 + \ln(2^x + 3),\end{aligned}$$

ottenendo

$$I(x) = \frac{x}{3} - \frac{1}{3\ln 2}\ln(2^x + 3) + C$$

Esercizio 26 *Calcolare:*

$$I(x) = \int \frac{a^x dx}{1 + a^{2x}}, \quad a > 0, \, a \neq 1 \tag{28}$$

Soluzione
$t = a^x \Longrightarrow dt = a^x \ln a dx \Longrightarrow a^x dx = \frac{dt}{\ln a}$, per cui

$$I(t) = \frac{1}{\ln a} \int \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{1}{\ln a} \arctan t + C$$

Esercizio 27 *Calcolare:*

$$I_\lambda(x) = \int \frac{e^{-\lambda x} dx}{\sqrt{1 - e^{-2\lambda x}}}, \quad (\lambda \neq 0) \tag{29}$$

Soluzione
$t = e^{-\lambda x} \Longrightarrow dt = -\lambda e^{-\lambda x} dx \Longrightarrow e^{-\lambda x} dx = -\frac{1}{\lambda} dt$, onde

$$I_\lambda(t) = -\frac{1}{\lambda} \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = -\frac{1}{\lambda} \arcsin t + C$$

Ripristinando la variabile x:

$$I_\lambda(x) = -\frac{1}{\lambda} \arcsin e^{-\lambda x} + C$$

Esercizio 28 *Calcolare:*

$$I(x) = \int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x} + 1}} \tag{30}$$

Soluzione
$t = e^x \Longrightarrow dt = e^x dx$, per cui

$$I(t) = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 1}} = \text{arcsinh} t + C = \ln\left(t + \sqrt{t^2 + 1}\right) + C$$

Ripristinando la variabile x:

$$I(x) = \text{arcsinh} e^x + C = \ln\left(e^x + \sqrt{e^{2x} + 1}\right) + C$$

Esercizio 29 *Calcolare:*

$$I(x) = \int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \tag{31}$$

Soluzione
$t = \sqrt{x} \Longrightarrow dt = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \Longrightarrow \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2dt$, quindi

$$I(t) = 2 \int \cos t dt = 2 \sin t + C$$

Ripristinando la variabile x:

$$I(x) = 2 \sin \sqrt{x} + C$$

Esercizio 30 *Calcolare:*

$$I(x) = \int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx \tag{32}$$

Soluzione
$t = \ln x \Longrightarrow dt = \frac{dx}{x}$, per cui

$$I(t) = \int \sin t dt = -\cos t + C$$

Ripristinando la variabile x:

$$I(x) = -\cos(\ln x) + C$$

In maniera più spedita:

$$I(x) = \int \sin(\ln x)\, d(\ln x) = -\cos(\ln x) + C$$

Esercizio 31 *Calcolare:*

$$I(x) = \int \frac{xdx}{\cos^2 x^2} \tag{33}$$

Soluzione
$t = x^2 \Longrightarrow dt = 2xdx \Longrightarrow xdx = \frac{1}{2}dt$, per cui

$$I(t) = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{2}\tan t + C$$

Ripristinando la variabile x:

$$I(x) = \frac{1}{2}\tan x^2 + C$$

Esercizio 32 *Calcolare:*

$$I(x) = \int x \sin\left(1 - x^2\right) dx \tag{34}$$

Soluzione
$t = 1 - x^2 \Longrightarrow dt = -2xdx \Longrightarrow xdx = -\frac{1}{2}dt$, per cui l'integrale si scrive:

$$I(t) = -\frac{1}{2}\int \sin t dt = \frac{1}{2}\cos t + C$$

Ripristinando la variabile x:

$$I(x) = \frac{1}{2}\cos\left(1 - x^2\right) + C$$

Esercizio 33 *Calcolare:*

$$I(x) = \int \tan x dx \tag{35}$$

Soluzione

$$I(x) = \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$$

Esercizio 34 *Calcolare:*

$$I(x) = \int \cot x dx \tag{36}$$

Soluzione

$$I(x) = \int \frac{\cos x dx}{\sin x} = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln|\sin x| + C$$

Esercizio 35 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int \frac{dx}{3x^2 + 5}} \tag{37}$$

Soluzione

$$I(x) = \frac{1}{5} \int \frac{dx}{1 + \left(\sqrt{\frac{3}{5}}x\right)^2}$$

Poniamo $t = \sqrt{\frac{3}{5}}x \Longrightarrow dt = \sqrt{\frac{3}{5}}dx \Longrightarrow dx = \sqrt{\frac{5}{3}}dt$, per cui

$$I(t) = \frac{1}{5}\sqrt{\frac{5}{3}} \int \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{1}{\sqrt{15}} \arctan t + C$$

Ripristinando la variabile x:

$$I(x) = \frac{1}{\sqrt{15}} \arctan \left(x\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + C$$

Esercizio 36 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int \frac{x^2}{x^2 + 2} dx} \tag{38}$$

Soluzione

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{x^2 + 2 - 2}{x^2 + 2} dx = \int \left(1 - \frac{2}{x^2 + 2}\right) dx \\ &= \int dx - 2J(x), \end{aligned}$$

dove

$$J(x) = \int \frac{dx}{x^2 + 2} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1}$$

Poniamo $t = \frac{x}{\sqrt{2}} \Longrightarrow dx = \sqrt{2}dt$, per cui:

$$J(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan t + C$$

Cioè

$$J(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + C$$

Quindi

$$I(x) = x + C' - \sqrt{2} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} - 2C$$

Introducendo la costante di integrazione $C'' = C' - 2C$, si ha:

$$I(x) = x - \sqrt{2} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + C''$$

Esercizio 37 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{7 + 8x^2}}} \tag{39}$$

Soluzione

$$I(x) = \frac{1}{\sqrt{7}} \int \frac{dx}{\sqrt{1 + \left(\frac{7}{8}x\right)^2}}$$

Poniamo $t = \sqrt{\frac{8}{7}}x \Longrightarrow dt = \sqrt{\frac{8}{7}}dx \Longrightarrow dx = \sqrt{\frac{7}{8}}dt$, per cui l'integrale si scrive:

$$I(t) = \frac{1}{\sqrt{8}} \int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{8}} \ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right) + C_1$$

Per ripristinare la variabile x, calcoliamo

$$\begin{aligned} \ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right) &= \ln\left(\sqrt{\frac{8}{7}}x + \sqrt{1 + \frac{8}{7}x^2}\right) \\ &= \ln\left[\frac{1}{\sqrt{7}}\left(\sqrt{8}x + \sqrt{7+8x^2}\right)\right] \\ &= \ln\left(\sqrt{8}x + \sqrt{7+8x^2}\right) - \frac{1}{2}\ln 7 \end{aligned}$$

Quindi:

$$I(x) = \frac{1}{\sqrt{8}} \ln\left(\sqrt{8}x + \sqrt{7+8x^2}\right) - \frac{1}{2\sqrt{8}}\ln 7 + C_1$$

Possiamo incorporare il termine $-\frac{1}{2\sqrt{8}}\ln 7$ nella costante di integrazione, con la posizione $C = C_1 - \frac{1}{2\sqrt{8}}\ln 7$. Il risultato è:

$$I(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left(2\sqrt{2}x + \sqrt{7+8x^2}\right) + C$$

Esercizio 38 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{7-5x^2}}} \tag{40}$$

Soluzione

$$I(x) = \frac{1}{\sqrt{7}} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\sqrt{\frac{5}{7}}x\right)^2}}$$

Poniamo $t = \sqrt{\frac{5}{7}}x \Longrightarrow dx = \sqrt{\frac{7}{5}}dt$, onde:

$$I(t) = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \arcsin t + C$$

Ripristinando la variabile x:

$$I(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \arcsin\sqrt{\frac{5}{7}}x + C$$

Esercizio 39 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int \frac{2x-5}{\sqrt{3x^2-2}}dx} \tag{41}$$

Soluzione

$$\begin{aligned} I(x) &= 2\int \frac{xdx}{\sqrt{3x^2-2}} - 5\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}} \\ &= 2I_1(x) - 5I_2(x), \end{aligned}$$

essendo:

$$I_1(x) = \int \frac{xdx}{\sqrt{3x^2-2}}, \quad I_2(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}$$

Per calcolare $I_1(x)$ poniamo $t = 3x^2 - 2 \Longrightarrow dt = 6xdx \Longrightarrow xdx = \frac{dt}{6}$, per cui l'integrale si scrive:

$$I_1(t) = \frac{1}{6}\int t^{-1/2}dt = \frac{1}{3}\sqrt{t} + C$$

Ripristinando la variabile x:

$$I_1(x) = \frac{1}{3}\sqrt{3x^2-2} + C_1$$

Calcoliamo $I_2(x)$:

$$\begin{aligned} I_2(x) &= \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2\left(\frac{3}{2}x^2-1\right)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2-1}} \end{aligned}$$

Eseguiamo il cambio di variabile $t = \sqrt{\frac{3}{2}}x \Longrightarrow dx = \sqrt{\frac{2}{3}}dt$, onde

$$I_2(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arccosh}t + C_2, & t > 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|t+\sqrt{t^2-1}\right| + C_2, & t \notin (-1,1) \end{cases}$$

Cioè

$$I_2(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arccosh}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right) + C_2, \quad x > \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Esprimiamo $\ln\left|t+\sqrt{t^2-1}\right|$ come funzione di x:

$$\begin{aligned} \ln\left|t+\sqrt{t^2-1}\right| &= \ln\left|\sqrt{\frac{3}{2}}x + \sqrt{\frac{3}{2}x^2-1}\right| \\ &= \ln\left(\sqrt{2}\left|\sqrt{3}x+\sqrt{3x^2-2}\right|\right) \\ &= \ln\left|\sqrt{3}x+\sqrt{3x^2-2}\right| + \frac{1}{2}\ln 2 \end{aligned}$$

Quindi:

$$I_2(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\sqrt{3}x+\sqrt{3x^2-2}\right| + \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln 2 + C_2, \qquad x \in \left(-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty\right)$$

Ponendo $C_2' = C_2 + \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln 2$:

$$I(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arccosh}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right) + C_2, & x \in \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty\right) \\ \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\sqrt{3}x+\sqrt{3x^2-2}\right| + \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln 2 + C_2, & x \in \left(-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty\right) \end{cases}$$

Esercizio 40 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int \frac{3-2x}{5x^2+7}dx} \tag{42}$$

Soluzione

$$\begin{aligned} I(x) &= 3\int \frac{dx}{5x^2+7} - 2\int \frac{xdx}{5x^2+7} \\ &= 3I_1(x) - 2I_2(x), \end{aligned}$$

dove:

$$I_1(x) = \int \frac{dx}{5x^2+7}, \quad I_2(x) = \int \frac{xdx}{5x^2+7}$$

Calcoliamo il primo integrale.

$$I_1(x) = \frac{1}{7}\int \frac{dx}{\left(\sqrt{\frac{5}{7}}x\right)^2+1}$$

Eseguendo il cambio di variabile $t = \sqrt{\frac{5}{7}}x$:

$$I_1(t) = \frac{1}{7}\sqrt{\frac{7}{5}}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{\sqrt{35}}\arctan t + C_1$$

Ritornando alla variabile x:

$$I_1(x) = \frac{1}{\sqrt{35}}\arctan\left(\sqrt{\frac{5}{7}}x\right) + C_1$$

Calcoliamo il secondo integrale, eseguendo il cambio di variabile $t = 5x^2+7$:

$$I_2(t) = \frac{1}{10}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{10}\ln|t| + C_2$$

Ovvero

$$I_2(x) = \frac{1}{10}\ln\left(5x^2+7\right) + C_2,$$

dove abbiamo omesso il valore assoluto nell'argomento del logaritmo, giacchè $\forall x \in \mathbb{R},\ 5x^2+7>0$. In definitiva:

$$I(x) = \frac{3}{\sqrt{35}}\arctan\left(\sqrt{\frac{5}{7}}x\right) - \frac{1}{5}\ln\left(5x^2+7\right) + C$$

Esercizio 41 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int \frac{3-2x}{5x^2+7}dx} \tag{43}$$

Soluzione

$$I(x) = \int \frac{xdx}{\sqrt{5x^2+1}} + \int \frac{dx}{\sqrt{5x^2+1}} = 3I_1(x) + I_2(x),$$

essendo

$$I_1(x) = \int \frac{xdx}{\sqrt{5x^2+1}}$$

Eseguendo il cambio di variabile $t = 5x^2+1$:

$$I_1(t) = \frac{1}{10}\int t^{-1/2}dt = \frac{1}{5}\sqrt{t} + C_1$$

Ripristinando la variabile x:

$$I_1(x) = \frac{1}{5}\sqrt{5x^2+1} + C_1$$

Passiamo al secondo integrale.

$$I_2(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x\sqrt{5}\right)^2 + 1}}$$

Poniamo $t = x\sqrt{5}$:

$$I_2(t) = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{arcsinh} t + C_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln\left(t + \sqrt{t^2+1}\right) + C_2,$$

per cui

$$I_2(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{arcsinh}\left(\sqrt{5}x\right) + C_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln\left(\sqrt{5}x + \sqrt{5x^2+1}\right) + C_2$$

Ne consegue che la soluzione può essere espressa in due modi:

$$\begin{aligned}
I(x) &= \frac{3}{5}\sqrt{5x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{5}} \text{arcsinh}\left(\sqrt{5}x\right) + C \\
I(x) &= \frac{3}{5}\sqrt{5x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{5}} \ln\left(\sqrt{5}x + \sqrt{5x^2+1}\right) + C
\end{aligned}$$

Esercizio 42 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int \frac{x+3}{\sqrt{x^2-4}} dx} \tag{44}$$

Soluzione

$$I(x) = \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-4}} + 3\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}} = I_1(x) + 3I_2(x),$$

dove

$$I_1(x) = \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-4}}, \quad I_2(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$$

Il primo integrale è quasi immediato:

$$I_1(x) = \frac{1}{2} \int \left(x^2-4\right)^{-1/2} d\left(x^2-4\right) = \sqrt{x^2-4} + C_1$$

Per il secondo scriviamo

$$I_2(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1}}$$

Ponendo $t = \frac{x}{2}$

$$I_2(t) = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} = \begin{cases} \text{arccosh} t + C_2, & t > 1 \\ \ln\left|t + \sqrt{t^2-1}\right| + C_2, & t \notin (-1, 1) \end{cases}$$

Ritorniamo alla variabile x:

$$\begin{aligned}
\ln\left|t + \sqrt{t^2-1}\right| &= \ln\left|\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{x^2-4}\right| \\
&= \ln\left(\frac{1}{2}\left|x + \sqrt{x^2-4}\right|\right) \\
&= \ln\left|x + \sqrt{x^2-4}\right| - \ln 2,
\end{aligned}$$

per cui

$$I_2(x) = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - 4}\right| - \ln 2 + C_2, \quad x \notin (-2, 2)$$

In definitiva:

$$I(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 4} + \operatorname{arccosh}\frac{x}{2} + C, & x > 2 \\ \sqrt{x^2 - 4} + 3\ln\left|x + \sqrt{x^2 - 4}\right| + C, & x \notin (-2, 2) \end{cases}$$

Esercizio 43 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int \frac{xdx}{2x^2 + 3}} \tag{45}$$

Soluzione
Poniamo $t = 2x^2 + 3 \Longrightarrow dt = 4xdx \Longrightarrow xdx = \frac{1}{4}dt$, per cui l'integrale si scrive:

$$I(t) = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{4}\ln|t| + C$$

Ripristinando la variabile x:

$$I(x) = \frac{1}{4}\ln\left(2x^2 + 3\right) + C$$

Esercizio 44 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int \frac{ax + b}{a^2x^2 + b^2}dx, \quad (a \neq 0,\, b \neq 0)} \tag{46}$$

Discutere il caso $b = 0$.

Soluzione

$$\begin{aligned} I(x) &= a\int \frac{xdx}{a^2x^2 + b^2} + b\int \frac{dx}{a^2x^2 + b^2} \\ &= aI_1(x) + bI_2(x), \end{aligned}$$

dove

$$I_1(x) = \int \frac{xdx}{a^2x^2 + b^2}, \quad I_2(x) = \int \frac{dx}{a^2x^2 + b^2}$$

Per calcolare $I_1(x)$ poniamo $t = a^2x^2 + b^2 \Longrightarrow dt = 2a^2xdx \Longrightarrow xdx = \frac{1}{2a^2}dt$, per cui

$$I_1(t) = \frac{1}{2a^2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2a^2}\ln|t| + C_1$$

Ripristinando la variabile x:

$$I_1(x) = \frac{1}{2a^2}\ln\left(a^2x^2 + b^2\right) + C_1$$

Passiamo a $I_2(x)$:

$$I_2(x) = \int \frac{dx}{a^2x^2 + b^2} = \frac{1}{b^2}\int \frac{dx}{\left(\frac{a}{b}x\right)^2 + 1}$$

Poniamo $t = \frac{a}{b}x \Longrightarrow dx = \frac{b}{a}dt$:

$$I_2(t) = \frac{1}{ab}\int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{ab}\arctan t + C_2$$

Ritornando a x:

$$I_2(x) = \frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{a}{b}x\right) + C_2$$

Finalmente

$$I(x) = \frac{1}{2a^2}\ln\left(a^2x^2+b^2\right) + \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{a}{b}x\right) + C$$

Per $b=0$:

$$I(x) = \int \frac{ax}{a^2x^2}dx \underset{a\neq 0}{=} \frac{1}{a}\int\frac{dx}{x} = \frac{1}{a}\ln|x| + C$$

Esercizio 45 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int \frac{xdx}{\sqrt{x^4-a^4}}}, \qquad (a>0) \tag{47}$$

Soluzione
Poniamo $t=x^2 \Longrightarrow dt = 2xdx \Longrightarrow xdx = \frac{1}{2}dt$, per cui

$$\begin{aligned}
I(t) &= \frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-a^4}} = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{a^4\left(\frac{t^2}{a^4}-1\right)}}\\
&= \frac{1}{2a^2}\int\frac{dt}{\sqrt{\left(\frac{t}{a}\right)^2-1}}
\end{aligned}$$

Eseguiamo l'ulteriore cambio di variabile $\tau = \frac{t}{a^2} \Longrightarrow d\tau = \frac{dt}{a^2} \Longrightarrow dt = a^2 d\tau$. Quindi:

$$I(\tau) = \frac{1}{2}\int\frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2-1}} = \begin{cases} \frac{1}{2}\text{arccosh}\tau + C, & \tau>1\\ \frac{1}{2}\ln\left|\tau+\sqrt{\tau^2-1}\right| + C, & \tau\notin(-1,1)\end{cases}$$

Ripristiniamo la variabile t:

$$\begin{aligned}
\ln\left|\tau+\sqrt{\tau^2-1}\right| &= \ln\left|\frac{t}{a^2}+\sqrt{\frac{t^2}{a^4}-1}\right|\\
&= \ln\left(\frac{1}{a^2}\left|t+\sqrt{t^2-a^4}\right|\right)\\
&= \ln\left|t+\sqrt{t^2-a^4}\right| - 2\ln a
\end{aligned}$$

Otteniamo:

$$I(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\text{arccosh}\left(\frac{t}{a^2}\right) + C, & \frac{t}{a^2}>1\\ \ln\left|t+\sqrt{t^2-a^4}\right| - 2\ln a + C, & \frac{t}{a^2}<-1,\ \frac{t}{a^2}>1\end{cases}$$

Riesce:

$$\begin{aligned}
&\frac{t}{a^2}>1 \Longleftrightarrow t\in\left(a^2,+\infty\right)\\
&\frac{t}{a^2}<-1,\ \frac{t}{a^2}>1 \Longleftrightarrow t\in\left(-\infty,-a^2\right)\cup\left(a^2,+\infty\right)
\end{aligned}$$

Ripristiniamo la variabile x, osservando che

$$t>a^2 \Longleftrightarrow x^2>a^2 \Longleftrightarrow x\in(-\infty,-a)\cup(a,+\infty)$$

Inoltre

$$t<-a^2,\ t>a^2 \Longleftrightarrow x^2 \underset{\text{mai!}}{<} -a^2,\ \ x^2>a^2$$

Qui siamo interessati all'unione delle soluzioni di $t<-a^2$, $t>a^2$ o ciò che è lo stesso di $x^2 < -a^2$, $x^2>a^2$. L'insieme delle soluzioni di $x^2<-a^2$ è l'insieme vuoto, per cui l'insieme delle soluzioni di $x^2 < -a^2$, $x^2 > a^2$ è $\emptyset \cup S = S$, dove S è l'insieme delle soluzioni di $x^2 > a^2$, cioè $S = (-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$. Pertanto abbiamo una delle due espressioni per ciò che riguarda $I(x)$:

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{1}{2}\text{arccosh}\left(\frac{x^2}{a^2}\right) + C \\ I(x) &= \frac{1}{2}\ln\left|x^2 + \sqrt{x^4 - a^4}\right| + C, \end{aligned}$$

entrambe definite per $x \in (-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$.

Esercizio 46 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int \frac{xdx}{1 + x^4}} \tag{48}$$

Soluzione
Poniamo $t = x^2 \Longrightarrow dt = 2xdx$, per cui l'integrale si scrive:

$$I(t) = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{1}{2}\arctan t + C$$

Cioè

$$I(x) = \frac{1}{2}\arctan\left(x^2\right) + C$$

Esercizio 47 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^6 - 1}}} \tag{49}$$

Soluzione
Poniamo $t = x^3 \Longrightarrow dt = 3x^2dx$, così l'integrale diventa:

$$I(t) = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}}$$

Al solito otteniamo:

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{1}{3}\text{arccosh}t + C, \quad t > 1 \\ I(t) &= \frac{1}{3}\ln\left|t + \sqrt{t^2 - 1}\right| + C, \quad t \notin (-1, 1) \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{1}{3}\text{arccosh}\left(x^3\right) + C, \quad x > 1 \\ I(x) &= \frac{1}{3}\ln\left|x^3 + \sqrt{x^6 - 1}\right| + C, \quad x \notin (-1, 1) \end{aligned}$$

Esercizio 48 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1 - x^2}}dx} \tag{50}$$

Soluzione

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \sqrt{\arcsin x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int (\arcsin x)^{1/2} d(\arcsin x) \\ &= \frac{2}{3} (\arcsin x)^{3/2} + C \end{aligned}$$

o, ciò che è lo stesso

$$I(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(\arcsin x)^3} + C$$

Esercizio 49 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int \sqrt{\frac{arcsinhx}{1+x^2}} dx} \tag{51}$$

Soluzione

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \sqrt{\mathrm{arcsinh} x} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int (\mathrm{arcsinh} x)^{1/2} d(\mathrm{arcsinh} x) \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{(\mathrm{arcsinh} x)^3} + C \end{aligned}$$

Esercizio 50 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int \sqrt{\frac{arccoshx}{x^2-1}} dx} \tag{52}$$

Soluzione

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \sqrt{\mathrm{arccosh} x} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \int (\mathrm{arccosh} x)^{1/2} d(\mathrm{arccosh} x) \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{(\mathrm{arccosh} x)^3} + C \end{aligned}$$

Esercizio 51 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int \frac{\arctan \frac{x}{2}}{4+x^2} dx} \tag{53}$$

Soluzione

$$I(x) = \frac{1}{4} \int \arctan \frac{x}{2} \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

Poniamo $t = \frac{x}{2} \Longrightarrow dx = 2dt$, onde

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{1}{2} \int \arctan t \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} \int \arctan t d(\arctan t) \\ &= \frac{1}{4} (\arctan t)^2 + C \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x

$$I(x) = \frac{1}{4}\left(\arctan \frac{x}{2}\right)^2 + C$$

Esercizio 52 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int \frac{x - \sqrt{\arctan 2x}}{1+4x^2} dx} \tag{54}$$

Soluzione

$$I(x) = \int \frac{xdx}{1+4x^2} - \int \frac{\sqrt{\arctan 2x}}{1+4x^2} dx = I_1(x) - I_2(x),$$

dove

$$I_1(x) = \int \frac{xdx}{1+4x^2}, \quad I_2(x) = \int \frac{\sqrt{\arctan 2x}}{1+4x^2}$$

Calcoliamo il primo integrale, osservando che $d(1+4x^2) = 8xdx$:

$$I_1(x) = \frac{1}{8} \int \frac{d(1+4x^2)}{1+4x^2} = \frac{1}{8} \ln\left(1+4x^2\right) + C_1$$

Passiamo al secondo integrale. Riesce: $d(\arctan 2x) = \frac{2dx}{1+4x^2}$, onde

$$\begin{aligned} I_2(x) &= \frac{1}{2} \int (\arctan 2x)^{1/2} d(\arctan 2x) \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{(\arctan 2x)^3} + C_2 \end{aligned}$$

Pertanto l'integrale proposto è dato da:

$$I(x) = \frac{1}{8} \ln\left(1+4x^2\right) - \frac{1}{3} \sqrt{(\arctan 2x)^3} + C$$

Esercizio 53 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}}} \tag{55}$$

Soluzione

Poniamo $t = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) \Longrightarrow dt = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$, quindi:

$$I(t) = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int t^{-1/2} dt = 2t^{1/2} + C$$

Cioè

$$I(x) = 2\sqrt{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)} + C$$

Esercizio 54 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int 4^{2-3x} dx} \tag{56}$$

Soluzione

$$I(x) = -\frac{1}{3} \int 4^{2-3x} d(2-3x) = -\frac{4^{2-3x}}{3\ln 4} + C$$

Esercizio 55 *Calcolare:*

$$\boxed{I(y) = \int \left(e^y - e^{-y}\right) dy} \tag{57}$$

Soluzione

$$\begin{aligned} I(y) &= \int e^y dy - \int e^{-y} dy \\ &= \int e^y dy + \int e^{-y} d(-y) \\ &= e^y + e^{-y} + C \end{aligned}$$

Esercizio 56 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2 dx} \tag{58}$$

Soluzione

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \left(e^{2\frac{x}{a}} + 2 + e^{-2\frac{x}{a}}\right) dx \\ &= \int e^{2\frac{x}{a}} dx + 2\int dx + \int e^{-2\frac{x}{a}} dx \end{aligned}$$

Calcoliamo a parte i singoli integrali:

$$\begin{aligned} \int e^{2\frac{x}{a}} dx &= \frac{a}{2}\int e^{2\frac{x}{a}} d\left(2\frac{x}{a}\right) = \frac{a}{2}e^{2\frac{x}{a}} + C_1 \\ \int dx &= x + C_2 \\ \int e^{-2\frac{x}{a}} dx &= -\frac{a}{2}\int e^{-2\frac{x}{a}} d\left(-2\frac{x}{a}\right) = -\frac{a}{2}e^{-2\frac{x}{a}} + C_3 \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} I(x) &= 2x + \frac{a}{2}\left(e^{2\frac{x}{a}} - e^{-2\frac{x}{a}}\right) + C \\ &= 2x + a\sinh\left(2\frac{x}{a}\right) + C \end{aligned}$$

Esercizio 57 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int \cot\left(\frac{x}{\alpha-\beta}\right) dx, \qquad \alpha \neq \beta} \tag{59}$$

Soluzione

$$I(x) = \int \frac{\cos\left(\frac{x}{\alpha-\beta}\right)}{\sin\left(\frac{x}{\alpha-\beta}\right)} dx$$

Poniamo $t = \sin\left(\frac{x}{\alpha-\beta}\right) \Longrightarrow dt = \frac{1}{\alpha-\beta}\cos\left(\frac{x}{\alpha-\beta}\right) dx \Longrightarrow \cos\left(\frac{x}{\alpha-\beta}\right) dx = (\alpha-\beta)\, dt$, per cui

$$I(t) = (\alpha-\beta)\int \frac{dt}{t} = (\alpha-\beta)\ln|t| + C$$

Cioè

$$I(x) = (\alpha-\beta)\ln\left|\sin\left(\frac{x}{\alpha-\beta}\right)\right| + C$$

Esercizio 58 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int \frac{dx}{\tan\frac{x}{5}}} \tag{60}$$

Soluzione

$$I(x) = \int \frac{\cos\frac{x}{5}}{\sin\frac{x}{5}} dx$$

Poniamo $t = \sin\frac{x}{5} \Longrightarrow dt = \frac{1}{5}\cos\frac{x}{5}dx \Longrightarrow \cos\frac{x}{5}dx = dt$ che ci consente di esprimere l'integrale in funzione della nuova variabile t:

$$I(t) = 5\int \frac{dt}{t} = 5\ln|t| + C$$

Ritornando alla vecchia variabile

$$I(x) = 5\ln\left|\frac{x}{5}\right| + C$$

Esercizio 59 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int \tan\sqrt{x}\frac{dx}{\sqrt{x}}} \tag{61}$$

Soluzione
Poniamo $t = \sqrt{x} \Longrightarrow dt = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$, onde

$$\begin{aligned} I(x) &= 2\int \tan t dt = 2\int \frac{\sin t}{\cos t}dt \\ &= 2\int \frac{d(-\cos t)}{\cos t} \\ &= -2\int \frac{d(\cos t)}{\cos t} = -2\ln|\cos t| + C \end{aligned}$$

Dalla $t = \sqrt{x}$:

$$I(x) = -2\ln\left|\cos\sqrt{x}\right| + C$$

Esercizio 60 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int x\cot\left(x^2+1\right)dx} \tag{62}$$

Soluzione
Poniamo $t = x^2 + 1 \Longrightarrow xdx = \frac{dt}{2}$, quindi

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{1}{2}\int \cot t dt = \frac{1}{2}\int \frac{\cos t}{\sin t}dt \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{d(\sin t)}{\sin t} \\ &= \frac{1}{2}\ln|\sin t| + C = \ln\sqrt{|\sin t|} + C \end{aligned}$$

Cioè

$$I(x) = \ln\sqrt{|\sin(x^2+1)|} + C$$

Esercizio 61 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int \cos\frac{x}{\alpha}\sin\frac{x}{\alpha}dx, \quad (\alpha \neq 0)} \tag{63}$$

Soluzione
Poniamo $t = \sin\frac{x}{\alpha} \Longrightarrow dt = \frac{1}{\alpha}\cos\frac{x}{\alpha}dx \Longrightarrow \cos\frac{x}{\alpha}dx = \alpha dt$, per cui

$$I(t) = \alpha\int tdt = \frac{\alpha}{2}t^2 + C$$

Ritornando alla variabile x:

$$I(x) = \frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{x}{\alpha} + C$$

Esercizio 62 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int \sin^3 6x\cos 6xdx} \tag{64}$$

Soluzione
Poniamo $t = \sin 6x \Longrightarrow dt = 6\cos 6x dx \Longrightarrow \cos 6x dx = \frac{1}{6}dt$, quindi:

$$I(t) = \frac{1}{6}\int t^3 dt = \frac{1}{24}t^4 + C$$

Ripristinando x

$$I(x) = \frac{1}{24}\sin^4 6x + C$$

Esercizio 63 *Calcolare:*

$$\boxed{I_\lambda(x) = \int \frac{\cos \lambda x}{\sin^5 \lambda x}dx, \qquad (\lambda \neq 0)} \tag{65}$$

Soluzione
Poniamo $t = \sin \lambda x \Longrightarrow dt = \lambda \cos \lambda x dx \Longrightarrow \cos \lambda x dx = \frac{1}{\lambda}dt$

$$I_\lambda(t) = \frac{1}{\lambda}\int t^{-5}dt = -\frac{1}{4\lambda}\frac{1}{t^4} + C$$

Ripristinando la variabile x

$$I_\lambda(x) = -\frac{1}{4\lambda\sin^4 \lambda x} + C$$

Esercizio 64 *Calcolare:*

$$\boxed{I_\lambda(x) = \int \frac{\sin \lambda x}{\lambda + \cos \lambda x}dx} \tag{66}$$

Discutere il caso $\lambda = 0$

Soluzione
Poniamo $t = \lambda + \cos \lambda x \Longrightarrow dt = -\lambda \sin \lambda x dx$

$$I_\lambda(t) = -\frac{1}{\lambda}\int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{\lambda}\ln|t| + C$$

Cioè

$$I_\lambda(x) = -\frac{1}{\lambda}\ln|\lambda + \cos \lambda x| + C$$

Per $\lambda = 0$ l'integrale proposto si scrive:

$$I_0(x) = \int \frac{\sin 0}{0+1}dx = \int 0 dx = C$$

Ne consegue che per $\lambda \neq 0$ la più generale primitiva ha un andamento del tipo $\ln|\lambda + \cos \lambda x|$, mentre per $\lambda = 0$ si riduce a una costante.

Esercizio 65 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{\cos^2 x - \sin^2 x}}dx} \tag{67}$$

Soluzione
Dalle formule di duplicazione:

$$I(x) = \frac{1}{2} \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}} dx$$

Poniamo $t = \cos 2x \Longrightarrow dt = -2 \sin 2x dx$

$$I(t) = -\frac{1}{4} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{4} \frac{t^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C = -\frac{1}{2}\sqrt{t} + C$$

Ripristinando la variabile x

$$I(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{\cos 2x} + C$$

Esercizio 66 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int \sqrt{1 + 3\cos^2 x} \sin 2x dx} \tag{68}$$

Soluzione
Poniamo $t = 1 + 3\cos^2 x \Longrightarrow dt = -6 \sin x \cos x dx = -3 \sin 2x dx$, cosicchè l'integrale si scrive:

$$I(t) = -\frac{1}{3} \int t^{1/2} dt = -\frac{1}{3} \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{9} t\sqrt{t} + C$$

Cioè

$$I(x) = -\frac{2}{9}\sqrt{(1 + 3\cos^2 x)^3} + C$$

Esercizio 67 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int \frac{\tan^3 \frac{x}{3}}{\cos^2 \frac{x}{3}} dx} \tag{69}$$

Soluzione
Poniamo $t = \frac{x}{3}$, per cui

$$I(t) = 3 \int \frac{\tan^3 t}{\cos^2 t} dt = 3 \int \tan^3 t d(\tan t) = \frac{3}{4} \tan^4 t + C,$$

da cui la soluzione

$$I(x) = \frac{3}{4} \tan^4 \frac{x}{3} + C$$

Esercizio 68 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int \frac{\sqrt{\tan x}}{\cos^2} dx} \tag{70}$$

Soluzione

$$\begin{aligned} I(x) &= \int (\tan x)^{1/2} d(\tan x) = \frac{2}{3} (\tan x)^{3/2} + C \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{\tan^3 x} + C \end{aligned}$$

Esercizio 69 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int \frac{\cot^{1/3} x dx}{\sin^2 x}} \tag{71}$$

Soluzione

$$I(x) = -\int \cot^{2/3} x d(\cot x) = -\frac{(\cot x)^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + C,$$

cioè

$$I(x) = -\frac{3}{5}\sqrt[3]{\cot^5 x} + C$$

Esercizio 70 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int \frac{(a^x - b^x)^2}{a^x b^x}, \qquad (a \neq b)} \tag{72}$$

Soluzione

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{a^{2x} - 2a^x b^x + b^{2x}}{a^x b^x} dx \\ &= \int \left(a^x b^{-x} - 2 + a^{-x} b^x\right) dx \\ &= \int a^x b^{-x} dx - 2\int dx + \int a^{-x} b^x dx \end{aligned}$$

Calcoliamo a parte i singoli integrali:

$$\begin{aligned} \int a^x b^{-x} dx &= \int \left(\frac{a}{b}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^x}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} \\ \int a^{-x} b^x dx &= \int \left(\frac{b}{a}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^x}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{a^x}{b^x}\frac{1}{\ln a - \ln b} - 2x + \frac{b^x}{a^x}\frac{1}{\ln b - \ln a} \\ &= \frac{1}{\ln a - \ln b}\left(\frac{a^x}{b^x} - \frac{b^x}{a^x}\right) - 2x + C \end{aligned}$$

Esercizio 71 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int 3^x e^x dx} \tag{73}$$

Soluzione

$$I(x) = \int (3 - e^x) dx = \frac{(3-e)^x}{\ln(3e)} + C$$

Cioè

$$I(x) = \frac{3^x e^x}{e + \ln 3} + C$$

Esercizio 72 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int \frac{a^{2x} - 1}{\sqrt{a^x}} dx} \tag{74}$$

Soluzione
Poniamo $t = a^x \Longrightarrow dt = a^x \ln a dx \Longrightarrow dx = \frac{dt}{a^x \ln a} \Longrightarrow dx = \frac{dt}{t \ln a}$, onde

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{1}{\ln a} \int \frac{t^2-1}{\sqrt{t}} \frac{dt}{t} = \frac{1}{\ln a} \int \frac{t^2-1}{t^{3/2}} \\ &= \frac{1}{\ln a} \int \left(t^{1/2} - t^{-3/2}\right) dt \\ &= \frac{1}{\ln a} \left(\int t^{1/2} dt - \int t^{-3/2} dt \right) \\ &= \frac{1}{\ln a} \left(\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{t^{-1/2}}{-\frac{1}{2}} \right) + C \\ &= \frac{1}{\ln a} \left(\frac{2}{3}\sqrt{t^3} + \frac{2}{\sqrt{t}} \right) + C \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$I(x) = \frac{1}{\ln a} \left(\frac{2}{3}\sqrt{a^{3x}} + \frac{2}{\sqrt{a^x}} \right) + C$$

Cioè

$$I(x) = \frac{2\left(a^{2x}+3\right)}{3\sqrt{a^x}\ln a} + C$$

Esercizio 73 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int e^{-\left(x^2+3\right)} dx} \tag{75}$$

Soluzione
Poniamo $t = -\left(x^2+3\right) \Longrightarrow dt = -2x dx$, onde

$$I(t) = -\frac{1}{2} \int e^t dt = -\frac{1}{2} e^t + C$$

Ripristinando la variabile x

$$I(x) = -\frac{1}{2} e^{-\left(x^2+3\right)} + C$$

Esercizio 74 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int x \cdot 2^{x^2} dx} \tag{76}$$

Soluzione
Poniamo $t = x^2 \Longrightarrow dt = 2x dx$, quindi in funzione di t

$$I(t) = \frac{1}{2} \int 2^t dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{2^t}{\ln 2} + C$$

Cioè

$$I(x) = \frac{2^{x^2}}{2 \ln 2} + C$$

Esercizio 75 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int \frac{e^{1/x}}{x^2} dx} \tag{77}$$

Soluzione
Poniamo $t = \frac{1}{x} \Longrightarrow dt = -\frac{dx}{x^2}$, per cui

$$I(t) = -\int e^t dt = -e^t + C$$

In funzione di x

$$I(x) = -e^{1/x} + C$$

Esercizio 76 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int 5^{\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}}} \tag{78}$$

Soluzione
Poniamo $t = \sqrt{x} \Longrightarrow dt = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$, quindi

$$I(t) = 2\int 5^t dt = 2\frac{5^t}{\ln 5} + C$$

Cioè

$$I(x) = 2 \cdot \frac{5^{\sqrt{x}}}{\ln 5} + C$$

Esercizio 77 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int \frac{e^x}{e^x - 1} dx} \tag{79}$$

Soluzione

$$I(x) = \int \frac{d(e^x - 1)}{e^x - 1} = \ln|e^x - 1| + C$$

Esercizio 78 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int e^x \sqrt{a - be^x} dx, \quad (b \neq 0)} \tag{80}$$

Soluzione
Poniamo $t = a - be^x \Longrightarrow dt = -be^x dx \Longrightarrow e^x dx = -\frac{dt}{b}$

$$I(t) = -\frac{1}{b}\int t^{1/2} dt = -\frac{1}{b}\frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{3b}t^{3/2} + C$$

Cioè:

$$I(x) = -\frac{2}{3b}\sqrt{(a - be^x)} + C$$

Esercizio 79 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int \left(e^{\frac{x}{a}} + 1\right)^{1/3} e^{\frac{x}{a}} dx, \quad (a \neq 0)} \tag{81}$$

Soluzione
Poniamo $t = e^{\frac{x}{a}} + 1 \Longrightarrow dt = \frac{1}{a}e^{\frac{x}{a}}dx \Longrightarrow e^{\frac{x}{a}}dx = adt$, per cui

$$I(t) = a\int t^{1/3} dt = a\frac{t^{4/3}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4}at^{4/3} + C$$

Cioè

$$I(x) = \frac{3}{4}a\left(e^{\frac{x}{a}} + 1\right)^{4/3} + C$$

Esercizio 80 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int \sin(a + bx)\,dx, \quad (b \neq 0)} \tag{82}$$

Soluzione

$$I(x) = -\frac{1}{b}\int \sin(a + bx)\,d(a + bx) = -\frac{1}{b}\cos(a + bx) + C$$

Esercizio 81 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int \cos\frac{x}{\sqrt{2}}dx} \tag{83}$$

Soluzione

$$I(x) = \sqrt{2}\int \cos\frac{x}{\sqrt{2}}d\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\sin\frac{x}{\sqrt{2}} + C$$

Esercizio 82 *Calcolare:*

$$\boxed{I_\lambda(x) = \int (\cos\lambda x + \sin\lambda x)^2\,dx, \quad (\lambda \in \mathbb{R})} \tag{84}$$

Soluzione

$$\begin{aligned} I_{\lambda\neq 0}(x) &= \int \left(\cos^2\lambda x + \sin\lambda x + 2\sin\lambda x\cos\lambda x\right)dx \\ &= \int (1 + \sin 2\lambda x)\,dx = \int dx + \int \sin 2\lambda x dx \end{aligned}$$

Calcoliamo:

$$\int \sin 2\lambda x dx = \frac{1}{2\lambda}\int \sin 2\lambda x d(2\lambda x) = -\frac{1}{2\lambda}\cos 2\lambda x + C_1,$$

per cui

$$I(x) = x - \frac{1}{2\lambda}\cos 2\lambda x + C$$

Infine

$$I_{\lambda=0}(x) = \int dx = x + C$$

Esercizio 83 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int \frac{1 + \sin 3x}{\cos^2 3x}dx} \tag{85}$$

Soluzione

$$I(x) = \int \frac{dx}{\cos^2 3x} + \int \frac{\sin 3x}{\cos^2 3x}dx = I_1(x) + I_2(x),$$

dove

$$I_1(x) = \int \frac{dx}{\cos^2 3x}, \quad I_2(x) = \int \frac{\sin 3x}{\cos^2 3x}dx$$

Calcoliamo il primo integrale. Poniamo $t = 3x$, per cui

$$I_1(t) = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{3}\tan t + C_1$$

In funzione di x

$$I_1(x) = \frac{1}{3}\tan 3x + C$$

Calcoliamo il secondo integrale ponendo $t = \cos 3x$

$$I(t) = -\frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{3t} + C_2,$$

cioè

$$I_2(x) = \frac{1}{3\cos 3x} + C_2$$

Finalmente:

$$I(x) = \frac{1}{3}\left(\tan 3x + \frac{1}{\cos 3x}\right) + C$$

Esercizio 84 *Calcolare:*

$$\boxed{I_a(x) = \int \frac{dx}{\sin^2 3x\,(b - a\cot 3x)}} \tag{86}$$

Soluzione

Poniamo $t = b - a\cot 3x \Longrightarrow dt = a\frac{3dx}{\sin^2 3x} \Longrightarrow \frac{dx}{\sin^2 3x} = \frac{dt}{a}$

$$I_{a\neq 0}(t) = \frac{1}{3a}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3}\ln|t| + C,$$

cosicchè

$$I_{a\neq 0}(x) = \frac{1}{3a}\ln|b - a\cot 3x| + C$$

Per $a = 0$

$$I_{a=0}(x) = \frac{1}{b}\int \frac{dx}{\sin^2 3x} = -\frac{1}{3b}\cot 3x + C$$

Esercizio 85 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int (2\sinh 5x - 3\cosh 5x)\,dx} \tag{87}$$

Soluzione

$$\begin{aligned} I(x) &= 2\int \sinh 5x dx - 3\int \cosh 5x dx \\ &= \frac{2}{5}\int \sinh 5x d(5x) - \frac{3}{5}\int \cosh 5x d(5x) \\ &= \frac{2}{5}\cosh 5x - \frac{3}{5}\sinh 5x + C \end{aligned}$$

Esercizio 86 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{x^3+1}}} \tag{88}$$

Soluzione

Poniamo $t = x^3 + 1 \Rightarrow dt = 3x^2 dx$

$$I(t) = \frac{1}{3}\int t^{-1/3}dt = \frac{1}{3}\frac{t^{2/3}}{\frac{2}{3}} + C = \frac{1}{2}t^{2/3} + C,$$

cosicchè

$$I(x) = \frac{1}{2}\sqrt[3]{(x^3+1)^2} + C$$

Esercizio 87 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}}} \tag{89}$$

Soluzione
Poniamo $t = x^2 \Longrightarrow dt = 2xdx$

$$I(t) = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{2}\arcsin t + C$$

Ripristinando la variabile x

$$I(x) = \frac{1}{2}\arcsin\left(x^2\right) + C$$

Esercizio 88 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int \frac{xdx}{\cos^2 x\sqrt{4-\tan^2 x}}} \tag{90}$$

Soluzione
Poniamo $t = \tan x \Longrightarrow dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$

$$I(t) = \int \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1-\left(\frac{t}{2}\right)^2}}$$
$$= \int \frac{d\left(\frac{t}{2}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{t}{2}\right)^2}} = \arcsin\left(\frac{t}{2}\right) + C$$

Cioè

$$I(x) = \arcsin\left(\frac{\tan x}{2}\right) + C$$

Esercizio 89 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}dx} \tag{91}$$

Soluzione
Poniamo $t = 1 + \ln x \Longrightarrow dt = \frac{dx}{x}$

$$I(t) = \int t^{1/3}dt = \frac{3}{4}t^{4/3} + C$$

Cioè

$$I(x) = \frac{3}{4}\sqrt[3]{(1+\ln x)^4} + C$$

Esercizio 90 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int \frac{\tan\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}dx} \tag{92}$$

Soluzione
Poniamo $t = \sqrt{x-1} \Longrightarrow dt = \frac{dx}{2\sqrt{x-1}}$

$$I(t) = 2\int \tan t dt = 2\int \frac{\sin t dt}{\cos t} = -2\int \frac{d(\cos t)}{\cos t} = -2\ln|\cos t| + C$$

In funzione di X

$$I(x) = -2\ln\left|\cos\sqrt{x-1}\right| + C$$

Esercizio 91 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int \frac{e^{\arctan x} + x \ln(1+x^2) + 1}{1+x^2} dx} \tag{93}$$

Soluzione

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2} dx + \int \frac{x \ln(1+x^2)\, dx}{1+x^2} + \int \frac{dx}{1+x^2} \\ &= I_1(x) + I_2(x) + I_3(x) \end{aligned}$$

Calcoliamo separatamente i singoli integrali.

$$I_1(x) = \int \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2} dx$$

Poniamo $t = \arctan x \Longrightarrow dt = \frac{dx}{1+x^2}$

$$I_1(t) = \int e^t dt = e^t + C_1$$

Quindi

$$I_1(x) = e^{\arctan x} + C_1$$

Passiamo al secondo.

$$I_2(x) = \int \frac{x \ln(1+x^2)\, dx}{1+x^2}$$

Poniamo $t = \ln(1+x^2) \Longrightarrow dt = \frac{2x dx}{1+x^2}$

$$I_2(t) = \frac{1}{2} \int t dt = \frac{1}{4} t^2 + C_2 \Longrightarrow I_2(x) = \frac{1}{4} \ln^2\left(1+x^2\right) + C_2$$

Il terzo integrale è di quelli fondamentali:

$$I_3(x) = \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C_3$$

Finalmente

$$I(x) = e^{\arctan x} + \frac{1}{4} \ln^2\left(1+x^2\right) + \arctan x + C$$

Esercizio 92 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx} \tag{94}$$

Soluzione

Poniamo $t = \sin x + \cos x \Longrightarrow dt = (\cos x - \sin x)\, dx$

$$I(t) = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + C$$

Cioè

$$I(x) = -\ln|\sin x + \cos x| + C$$

Esercizio 93 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int e^{\sin^2 x} \sin 2x dx} \tag{95}$$

Soluzione

$$I(x) = 2\int e^{\sin^2 x} 2\sin x \cos x dx$$

Poniamo $t = \sin x$

$$I(t) = 2\int e^{t^2} t dt = \int e^{t^2} d\left(t^2\right) = e^{t^2} + C$$

Quindi

$$I(x) = e^{\sin^2 x} + C$$

Esercizio 94 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int \frac{5-3x}{\sqrt{4-3x^2}} dx} \tag{96}$$

Soluzione

$$I(x) = 5\underbrace{\int \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}}}_{=I_1(x)} - 3\underbrace{\int \frac{xdx}{\sqrt{4-3x^2}}}_{=I_2(x)}$$

Calcoliamo il primo integrale.

$$I_1(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2}}$$

Poniamo $t = \frac{\sqrt{3}}{2}x$

$$I_1(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin t + C_1 \Longrightarrow I_1(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_1$$

Passiamo al secondo integrale.

$$I_2(x) = \int \frac{xdx}{\sqrt{4-3x^2}}$$

Poniamo $t = 4-3x^2 \Longrightarrow dt = -6xdx$

$$I_2(t) = -\frac{1}{6}\int t^{-1/2} dt = -\frac{1}{3}\sqrt{t} + C_2 \Longrightarrow I_2(x) = -\frac{1}{3}\sqrt{4-3x^2} + C_2$$

Finalmente

$$I(x) = \frac{5}{\sqrt{3}}\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \sqrt{4-3x^2} + C$$

Esercizio 95 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int \frac{dx}{e^x+1}} \tag{97}$$

Soluzione

$$I(x) = \int \frac{dx}{e^x\left(1+e^{-x}\right)} = \int \frac{e^{-x}dx}{1+e^{-x}}$$

Poniamo $t = e^{-x} \Longrightarrow dt = -e^{-x}dx$

$$I(t) = -\int \frac{dt}{1+t} = -\int \frac{d(1+t)}{1+t} = -\ln|1+t| + C$$

Cioè

$$\begin{aligned} I(x) &= -\ln\left(1+e^{-x}\right)+C \\ &= -\ln\left[e^{-x}\left(e^{x}+1\right)\right]+C \\ &= -\ln e^{-x}-\ln\left(e^{x}+1\right)+C \\ &= x-\ln\left(e^{x}+1\right)+C \end{aligned}$$

Esercizio 96 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x)=\int\frac{e^{x}dx}{\sqrt{e^{2x}-2}}} \tag{98}$$

Soluzione
Poniamo $t=e^{x}$

$$I(t)=\int\frac{dt}{\sqrt{t^{2}-2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^{2}}},$$

per cui abbiamo le seguenti espressioni in differenti campi di esistenza:

$$\begin{aligned} I(t) &= \operatorname{arccosh}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)+C, \quad \text{se } \frac{t}{\sqrt{2}}>1 \\ I(t) &= \ln\left|\frac{t}{\sqrt{2}}+\sqrt{\frac{t^{2}}{2}-1}\right|+C, \quad \text{se } \frac{t}{\sqrt{2}}<-1 \text{ e } \frac{t}{\sqrt{2}}>1 \end{aligned}$$

Sviluppiamo il logaritmo

$$\begin{aligned} \ln\left|\frac{t}{\sqrt{2}}+\sqrt{\frac{t^{2}}{2}-1}\right| &= \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left|t+\sqrt{t^{2}-1}\right|\right) \\ &= \ln\left|t+\sqrt{t^{2}-1}\right|-\frac{1}{2}\ln 2, \end{aligned}$$

cosicchè

$$I(t)=\ln\left|t+\sqrt{t^{2}-1}\right|+C', \quad \text{se } \frac{t}{\sqrt{2}}<-1 \text{ e } \frac{t}{\sqrt{2}}>1,$$

dove $C'=C-\frac{1}{2}\ln 2$. Ripristinando la variabile x si ha $I(x)=\operatorname{arccosh}\left(\frac{e^{x}}{\sqrt{2}}\right)+C$, se $e^{x}>2$, cioè se $x>\frac{1}{2}\ln 2$. In definitiva

$$\begin{aligned} I(x) &= \operatorname{arccosh}\left(\frac{e^{x}}{\sqrt{2}}\right)+C, \quad x\in\left(\frac{1}{2}\ln 2,+\infty\right) \\ I(x) &= \ln\left|e^{x}+\sqrt{e^{2x}-1}\right|+C', \quad x\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\ln 2\right)\cup\left(\frac{1}{2}\ln 2,+\infty\right) \end{aligned}$$

Esercizio 97 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x)=\int\sin\left(\frac{2\pi t}{T}+\phi\right)dt, \ \ , (T>0)} \tag{99}$$

Soluzione
Poniamo $\tau=\frac{2\pi t}{T}+\phi\Longrightarrow d\tau=\frac{2\pi}{T}dt$

$$I(\tau)=\frac{T}{2\pi}\int\sin\tau d\tau=-\frac{T}{2\pi}\cos\tau+C$$

Cioè

$$I(t)=-\frac{T}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi t}{T}+\phi\right)+C$$

Esercizio 98 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int \frac{dx}{x\left(4 - \ln^2 x\right)^{1/2}}} \tag{100}$$

Soluzione
Poniamo $t = \ln x \Longrightarrow dt = \frac{dx}{x}$

$$\begin{aligned} I(t) &= \int \frac{dt}{\sqrt{4 - t^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{1 - \left(\frac{t}{2}\right)^2}} \\ &= \arcsin \frac{t}{2} + C \end{aligned}$$

In funzione di x

$$I(x) = \arcsin\left(\frac{\ln x}{2}\right) + C$$

Esercizio 99 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int \frac{\arccos \frac{x}{2}}{\sqrt{4 - x^2}} dx} \tag{101}$$

Soluzione
Poniamo $t = \arccos \frac{x}{2} \Longrightarrow dt = -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}} \cdot \frac{1}{2} dx = -\frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}$, per cui

$$I(t) = -\int t dt = -\frac{1}{2} t^2 + C$$

Cioè

$$I(x) = -\frac{1}{2}\left(\arccos \frac{x}{2}\right)^2 + C$$

Esercizio 100 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int \frac{e^{-\tan x}}{\cos^2 x} dx} \tag{102}$$

Soluzione

$$\begin{aligned} I(x) &= \int e^{-\tan x} d(\tan x) = \int e^{-\tan x} d(-\tan x) \\ &= -e^{-\tan x} + C \end{aligned}$$

Esercizio 101 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{2 - \sin^4 x}} dx} \tag{103}$$

Soluzione
Poniamo $t = \sin x \Longrightarrow dt = \cos x dx$, per cui

$$I(t) = \int \frac{t dt}{\sqrt{2 - t^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{t dt}{\sqrt{1 - \left(\frac{t^2}{\sqrt{2}}\right)^2}}$$

Eseguiamo l'ulteriore cambio di variabile ponendo $\tau = \frac{t^2}{\sqrt{2}} \Longrightarrow d\tau = \frac{2t}{\sqrt{2}} dt$

$$I(\tau) = \frac{1}{2} \int \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} = \frac{1}{2} \arcsin \tau + C$$

In funzione di t:

$$I(t) = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{t^2}{\sqrt{2}}\right) + C$$

In funzione di x:

$$I(x) = \frac{1}{2} arcins\left(\frac{\sin^2 x}{\sqrt{2}}\right) + C$$

Esercizio 102 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int \frac{\arcsin x + x}{\sqrt{1-x^2}} dx} \tag{104}$$

Soluzione

$$I(x) = \underbrace{\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx}_{=I_1(x)} + \underbrace{\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}}_{=I_2(x)}$$

Calcoliamo separatamente i due integrali:

$$I_1(x) = \int \arcsin x d(\arcsin x) = \frac{1}{2}(\arcsin x)^2 + C_1$$

$$\begin{aligned} I_2(x) &= -\frac{1}{2}\int \left(1-x^2\right)^{-1/2} d\left(1-x^2\right) = -\frac{1}{2}\frac{\left(1-x^2\right)^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C_2 \\ &= -\sqrt{1-x^2} + C_2 \end{aligned}$$

Finalmente

$$I(x) = \frac{1}{2}(\arcsin x)^2 - \sqrt{1-x^2} + C$$

Esercizio 103 *Calcolare:*

$$I(x) = \int \frac{\cos 2x}{\left(4+\cos^2 2x\right)^{1/2}} dx \tag{105}$$

Soluzione

$$I(x) = \int \frac{\cos 2x}{\left(5-\sin^2 2x\right)^{1/2}} dx$$

Poniamo $t = \sin 2x \Longrightarrow dt = 2\cos 2x dx$

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\left(5-t^2\right)^{1/2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{5\left(1-\frac{t^2}{5}\right)}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}}\int \frac{dt}{\sqrt{1-\left(\frac{t}{\sqrt{5}}\right)^2}} \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{d\left(\frac{t}{\sqrt{5}}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{t}{\sqrt{5}}\right)^2}} \\ &= \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{t}{\sqrt{5}}\right) + C \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x

$$I(x) = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{\sin 2x}{\sqrt{5}}\right) + C$$

Esercizio 104 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int \sqrt{\frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{1+x^2}}dx} \tag{106}$$

Soluzione

$$I(x) = \int \sqrt{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

Poniamo $t = \left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \Longrightarrow dt = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

$$I(t) = \int t^{1/2}dt = \frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{t^{3/2}} + C$$

In funzione di x:

$$I(x) = \frac{2}{3}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\sqrt{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)} + C$$

Esercizio 105 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int x^2\cosh\left(x^3+3\right)dx} \tag{107}$$

Soluzione

$$I(x) = \frac{1}{3}\int \cosh\left(x^3+3\right)d\left(x^3+3\right) = \frac{1}{3}\sinh\left(x^3+3\right) + C$$

Esercizio 106 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int \frac{3^{\tanh x}}{\cosh^2 x}dx} \tag{108}$$

Soluzione

$$I(x) = \int 3^{\tanh x}d(\tanh x) = \frac{3^{\tanh x}}{\ln 3} + C$$

Esercizio 107 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}}{4}\right)dx} \tag{109}$$

Soluzione

$$\begin{aligned} I(x) &= 3\int x^{-1/2}dx - \frac{1}{4}\int x^{3/2}dx \\ &= 3\frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}\frac{x^{5/2}}{\frac{5}{2}} + C \\ &= 6x^{1/2} - \frac{1}{10}x^{5/2} + C \end{aligned}$$

Cioè

$$I(x) = 6\sqrt{x} - \frac{1}{10}x^2\sqrt{x} + C$$

Esercizio 108 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int \frac{x^2dx}{\sqrt{x}}} \tag{110}$$

Soluzione

$$I(x) = \int x^{3/2} dx = \frac{x^{5/2}}{\frac{5}{2}} + C,$$

da cui

$$I(x) = \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + C$$

Esercizio 109 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x\sqrt{x}} + 2 \right) dx} \qquad (111)$$

Soluzione

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{dx}{x^2} + 4 \int \frac{dx}{x\sqrt{x}} + 2 \int dx \\ &= \int x^{-2} dx + 4 \int x^{-3/2} dx + 2 \int dx \\ &= -\frac{1}{x} - \frac{8}{\sqrt{x}} + 2x + C \end{aligned}$$

Esercizio 110 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}} \qquad (112)$$

Soluzione

$$I(x) = \int x^{-1/4} dx = \frac{x^{3/4}}{\frac{3}{4}} + C = \frac{4}{3} \sqrt[4]{x^3} + C$$

Esercizio 111 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int \left(x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^2 dx} \qquad (113)$$

Soluzione

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \left(x^4 + 2\frac{x^2}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \right) dx \\ &= \int x^4 dx + 2 \int x^{5/3} dx + \int x^{-2/3} dx \\ &= \frac{1}{5} x^5 + 2 \frac{x^{\frac{5}{3}+1}}{\frac{5}{3}+1} + \frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} + C \end{aligned}$$

Cioè

$$I(x) = \frac{1}{5} x^5 + \frac{3}{4} x^2 \sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x} + C$$

Esercizio 112 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int \frac{\ln x}{x} dx} \qquad (114)$$

Soluzione

$$I(x) = \int \ln x d(\ln x) = \frac{1}{2} \ln^2 x + C$$

Esercizio 113 *Calcolare:*

$$\boxed{I_\lambda(x) = \int \frac{dx}{\sin^2 \lambda x}, \qquad (\lambda \neq 0)} \tag{115}$$

Soluzione

$$I_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda} \int \frac{d(\lambda x)}{\sin^2 \lambda x} = -\frac{1}{\lambda} \cot \lambda x + C$$

Esercizio 114 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int \frac{dx}{3x-7}} \tag{116}$$

Soluzione

$$I(x) = \frac{1}{3} \int \frac{d(3x-7)}{3x-7} = \frac{1}{3} \ln|3x-7| + C$$

Esercizio 115 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int \tan 2x dx} \tag{117}$$

Soluzione

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{1}{2} \int \tan 2x d(2x) = \frac{1}{2} \int \frac{\sin 2x}{\cos 2x} d(2x) \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{d(\cos 2x)}{\cos 2x} = -\frac{1}{2} \ln|\cos 2x| + C \end{aligned}$$

Esercizio 116 *Calcolare:*

$$\boxed{I(x) = \int \cot(ax-b)\, dx} \tag{118}$$

Discutere il caso $a = 0$.

Soluzione

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{1}{a} \int \cot(ax-b)\, d(ax-b) \\ &= \frac{1}{a} \int \frac{\cos(ax-b)\, d(ax-b)}{\sin(ax-b)} \\ &= \frac{1}{a} \int \frac{d[\sin(ax-b)]}{\sin(ax-b)} \\ &= \frac{1}{a} \ln|\sin(ax-b)| + C \end{aligned}$$

Per $a = 0$ l'integrale è

$$I(x) = \int \cot(-b)\, dx = -\cot b \int dx = -x \cot b + C$$

Ne consegue che per $a \neq 0$ la più generale primitiva di $\cot(ax-b)$ ha un andamento logaritmico, mentre per $a = 0$ è lineare.

Esercizio 117 *Calcolare:*

$$\boxed{I(\tau) = \int \frac{d\tau}{\cot 3\tau}} \tag{119}$$

Soluzione

$$\begin{aligned} I(\tau) &= \int \frac{\sin 3\tau d\tau}{\cos 3\tau} = \frac{1}{3}\int \frac{\sin 3\tau d(3\tau)}{\cos 3\tau} \\ &= -\frac{1}{3}\int \frac{d(\cos 3\tau)}{\cos 3\tau} = -\frac{1}{3}\ln|\cos 3\tau| + C \end{aligned}$$

Esercizio 118 *Calcolare:*

$$\boxed{I(\tau) = \int \tan x \sec^2 x dx} \tag{120}$$

Soluzione

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \tan x \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \tan x d(\tan x) \\ &= \frac{1}{2}\tan^2 x + C \end{aligned}$$

Esercizio 119 *Calcolare:*

$$\boxed{I(\tau) = \int e^x \cot(e^x)\, dx} \tag{121}$$

Soluzione

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \cot(e^x)\, d(e^x) = \int \frac{\cos(e^x)}{\sin(e^x)} d(e^x) \\ &= \int \frac{d(\sin(e^x))}{\sin(e^x)} = \ln|\sin(e^x)| + C \end{aligned}$$

Esercizio 120 *Calcolare:*

$$\boxed{I(\tau) = \int \left(\tan 4x - \cot \frac{x}{4}\right) dx} \tag{122}$$

Soluzione

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{1}{4}\int \tan 4x d(4x) - 4\int \cot\left(\frac{x}{4}\right) d\left(\frac{x}{4}\right) \\ &= -\frac{1}{4}\int \frac{d(\cos 4x)}{\cos 4x} - 4\int \frac{d\left(\sin\frac{x}{4}\right)}{\sin\frac{x}{4}} \\ &= -\frac{1}{4}\ln|\cos 4x| - 4\ln\left|\sin\frac{x}{4}\right| + C \end{aligned}$$