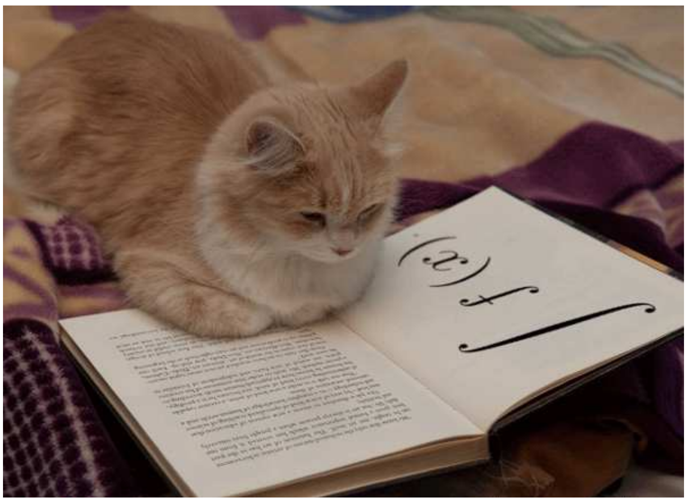
SCIENTIA – http://www.scientiajournal.org/
International Review of Scientific Synthesis – ISSN 2282-2119
Quaderni di Matematica – 2015

Matematica Open Source – http://www.extrabyte.info

Esercizi svolti sugli integrali indefiniti

Parte 01. Formule fondamentali di integrazione

Marcello Colozzo



1 Principali regole di integrazione

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx, \qquad c \in \mathbb{R} \tag{1}$$

$$\int \sum_{k=1}^{n} c_k f_k(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} c_k \int f_k(x)\,dx, \qquad c_k \in \mathbb{R}, \quad (k = 1, 2, ..., n) \tag{2}$$

Siano φ e f due funzioni reali, definite rispettivamente negli intervalli (limitati o non) A e X:

$$\varphi : t \in A \to \varphi(t), \qquad f : x \in X \to f(x)$$

Supponiamo he $\varphi(t) \in X$, per cui a $\varphi(t)$ corrisponde tramite f, il numero reale $f[\varphi(t)]$. In parole povere, abbiamo la funzione composta $f[\varphi(t)]$. Formuliamo le seguenti ipotesi:

- $f \in C^0(X)$
- $\varphi \in C^1(A)$,

per cui hanno senso gli integrali:

$$F(x) = \int f(x)\,dx, \qquad \Phi(t) = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$$

Sussiste la seguente proposizione:

Proposizione 1 ***(Regola di integrazione per sostituzione)***

$$F[\varphi(t)] = \Phi(t), \quad \forall t \in A$$

Dimostrazione. Applicando la nota regola di derivazione delle funzioni composte:

$$\frac{d}{dt}F[\varphi(t)] = \frac{dF}{dx}\frac{dx}{dt} = f(x)\,\varphi'(t),$$

cioè

$$\frac{d}{dt}F[\varphi(t)] = f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)$$

Derivando la funzione $\Phi(t)$:

$$\frac{d}{dt}\Phi(t) = f[\varphi(t)]\,\varphi'(t),$$

onde l'asserto. ■

Nello svolgimento pratico degli esercizi si scrive:

$$\left[\int f(x)\,dx\right]_{x=\varphi(t)} = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt, \tag{3}$$

per poi ripristinare la variabile x nell'espressione finale dell'integrale. Osserviamo che la (3) è intuitivamente ovvia, poich+ se si esegue la sostituzione $x = \varphi(t)$ nell'argomento della funzione integranda f, occorre poi sostituire il differenziale dx con $\varphi'(t)\,dt$, conformemente all'espressione del differenziale primo della funzione $\varphi(t)$:

$$dx = \varphi'(t)\,dt$$

Di seguito la tavola degli integrali fondamentali.

$\int x^\lambda dx = \frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1} + C, \quad (\lambda \neq -1)$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C'$
$\int \frac{dx}{x} = \ln \lvert x \rvert + C$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C = -\operatorname{arccot} x + C'$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (a > 0)$	$\int \sinh x dx = \cosh x + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int \cosh x dx = \sinh x + C$
$\int \sin x dx = \cos x + C$	$\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh$
$\int \cos x dx = -\sin x + C$	$\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x + C$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln \left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C = \text{arcsinh} x + C$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \begin{cases} \text{arccosh} x + C, & x \in (1, +\infty) \\ \ln \left\lvert x + \sqrt{x^2-1} \right\rvert, & x \notin (-1, 1) \end{cases}$
	$\int \frac{dx}{1-x^2} = \begin{cases} \text{arctanh} x, & x \in (-1, 1) \\ \frac{1}{2} \ln \left\lvert \frac{1+x}{1-x} \right\rvert, & x \notin (-1, 1) \end{cases}$

2 Esercizi

Esercizio 2 *Calcolare:*

$$I(x) = \int 5a^2 x^6 dx, \qquad (a \in \mathbb{R}) \tag{4}$$

Soluzione.
Il termine $5a^2$ è un fattore costante, per cui:

$$I(x) = 5a^2 \int x^6 dx = 5a^2 \cdot \frac{1}{7} x^7 + C$$

Cioè:

$$I(x) = \frac{5}{7} a^2 x^7 + C$$

Esercizio 3 *Calcolare:*

$$I(x) = \int \left(6x^2 + 8x + 3\right) dx, \tag{5}$$

Soluzione

$$\begin{aligned} I(x) &= 6 \int x^2 s dx + 8 \int x dx + 3 \int dx \\ &= 2x^3 + 4x^2 + 3x + C \end{aligned}$$

Esercizio 4 *Calcolare:*

$$I(x) = \int x(x+a)(x+b)\, dx, \qquad (a, b \in \mathbb{R}) \tag{6}$$

Soluzione
Sviluppiamo la funzione integranda:

$$x(x+a)(x+b) = x^3 + (a+b)x^2 + abx,$$

per cui

$$\begin{aligned}
I(x) &= \int \left[x^3 + (a+b)\,x^2 + abx\right] dx \\
&= \int x^3 dx + (a+b) \int x^2 dx + ab \int x dx \\
&= \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}(a+b)\,x^3 + \frac{1}{2}abx^2 + C
\end{aligned}$$

Esercizio 5 *Calcolare:*

$$I(x) = \int \left(a + bx^3\right)^2 dx, \qquad (a, b \in \mathbb{R}) \tag{7}$$

Soluzione
Sviluppando la funzione integranda:

$$\begin{aligned}
I(x) &= \int \left(a^2 + 2abx^3 + b^2x^6\right) dx \\
&= a^2 \int dx + 2ab \int x^3 dx + b^2 \int x^6 dx \\
&= a^2x + \frac{1}{2}abx^4 + \frac{1}{7}b^2x^7 + C
\end{aligned}$$

Esercizio 6 *Calcolare:*

$$I(x) = \int \sqrt{2px}dx, \qquad (p > 0) \tag{8}$$

Soluzione

$$\begin{aligned}
I(x) &= \sqrt{2p} \int x^{1/2} dx = \sqrt{2p} \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C \\
&= \frac{2}{3}\sqrt{2p}x^{3/2} + C
\end{aligned}$$

Cioè:

$$I(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{2px} + C$$

Esercizio 7 *Calcolare:*

$$I(x) = \int \frac{dx}{\sqrt[n]{x}} \tag{9}$$

Soluzione

$$\begin{aligned}
I(x) &= \int x^{-1/n} dx = \frac{x^{-\frac{1}{n}+1}}{-\frac{1}{n}+1} + C \\
&= \frac{x^{\frac{n-1}{n}}}{\frac{n-1}{n}} + C = \frac{n}{n-1}x^{\frac{n-1}{n}} + C,
\end{aligned}$$

da cui

$$I(x) = \frac{n}{n-1}x^{\frac{n-1}{n}} + C = \frac{n}{n-1}\frac{x}{\sqrt[n]{x}} + C$$

Esercizio 8 *Calcolare:*

$$I(x) = \int (nx)^{\frac{1-n}{n}}\, dx \tag{10}$$

Soluzione

$$\begin{aligned} I(x) &= n^{\frac{1-n}{n}} \int x^{\frac{1-n}{n}} dx = n^{\frac{1-n}{n}} \frac{x^{\frac{1-n}{n}+1}}{\frac{1-n}{n}+1} + C \\ &= n \cdot n \frac{1-n}{n} x^{1/n} + C = n^{1+\frac{1-n}{n}} x^{1/n} + C \\ &= n^{1/n} x^{1/n} + C, \end{aligned}$$

cioè

$$I(x) = (nx)^{1/n} + C = \sqrt[n]{nx} + C$$

Esercizio 9 *Calcolare:*

$$I(x) = \int \left(a^{2/3} - x^{2/3}\right)^3 dx, \qquad (a \in \mathbb{R}) \tag{11}$$

Soluzione
Sviluppando l'integrando

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \left(a^2 - 3a^{4/3}x^{2/3} + 3a^{2/3}x^{4/3} - x^2\right) dx \\ &= a^2 \int dx - 3a^{4/3} \int x^{2/3} dx + 3a^{2/3} \int x^{4/3} dx - \int x^2 dx \\ &= a^2 x - 3a^{4/3} \cdot \frac{3}{5} x^{5/3} + 3a^{2/3} \cdot \frac{x^{7/3}}{7/3} - \frac{1}{3} x^3 + C \\ &= a^2 x - \frac{9}{5} a^{4/3} x^{5/3} + \frac{9}{7} a^{2/3} x^{7/3} - \frac{1}{3} x^3 + C \end{aligned}$$

Esercizio 10 *Calcolare:*

$$I(x) = \int \left(\sqrt{x} + 1\right)\left(x - \sqrt{x} + 1\right) dx \tag{12}$$

Soluzione
Svilppando l'integrando

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \left(x^{3/2} + 1\right) dx = \int x^{3/2} dx + \int dx \\ &= \frac{2}{5} x^{5/2} + x + C \end{aligned}$$

Cioè

$$I(x) = \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + x + C$$

Esercizio 11 *Calcolare:*

$$I(x) = \int \frac{\left(x^2+1\right)\left(x^2-2\right)}{\sqrt[3]{x^2}} dx, \qquad (a, b \in \mathbb{R}) \tag{13}$$

Soluzione
Sviluppando l'integrando

$$
\begin{aligned}
I(x) &= \int \left(x^{10/3} - x^{4/3}2x^{-2/3}\right) \\
& \int x^{10/3}dx - \int x^{4/3}dx - 2\int x^{-2/3}dx \\
&= \frac{x^{\frac{10}{3}+1}}{\frac{10}{3}+1} - \frac{x^{\frac{4}{3}+1}}{\frac{4}{3}+1} - 2\frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} + C
\end{aligned}
$$

Si ottiene

$$
I(x) = \sqrt[3]{x}\left(\frac{3}{13}x^4 - \frac{3}{7}x^2 - 6\right) + C
$$

Esercizio 12 *Calcolare:*

$$
I(x) = \int \frac{(x^m - x^n)^2}{\sqrt{x}}dx \tag{14}
$$

Soluzione
Sviluppando l'integrando

$$
\begin{aligned}
I(x) &= \int \frac{x^{2m} - 2x^{m+n} + x^{2n}}{x^{1/2}}dx \\
&= \int \left(x^{2m-\frac{1}{2}} - 2x^{m+n-\frac{1}{2}} + x^{2n-\frac{1}{2}}\right)dx \\
&= \int x^{2m-\frac{1}{2}}dx - 2\int x^{m+n-\frac{1}{2}}dx + \int x^{2n-\frac{1}{2}}dx \\
&= \frac{x^{2m+\frac{1}{2}}}{2m+\frac{1}{2}} - 2\frac{x^{m+n+\frac{1}{2}}}{m+n+\frac{1}{2}} + \frac{x^{2n+\frac{1}{2}}}{2n+\frac{1}{2}} + C \\
&= x^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x^{2m}}{2m+\frac{1}{2}} - 2\frac{x^{m+n}}{m+n+\frac{1}{2}} + \frac{x^{2n}}{2n+\frac{1}{2}}\right) + C
\end{aligned}
$$

Ne concludiamo

$$
I(x) = \sqrt{x}\left(\frac{2x^{2m}}{4m+1} - 4\frac{x^{m+n}}{2m+2n+1} + \frac{2x^{2n}}{4n+1}\right) + C,
$$

formula valida per $m \neq -\frac{1}{4},\ n \neq -\frac{1}{4},\ m+n \neq -\frac{1}{2}$.

Esercizio 13 *Calcolare:*

$$
I(x) = \int \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{x})^4}{\sqrt{ax}}dx, \quad (a > 0) \tag{15}
$$

Soluzione

Svilppando l'integrando

$$\begin{aligned}
I(x) &= \int (ax)^{-1/2}\left(a^2 - 4a\sqrt{ax} + 6ax - 4x\sqrt{ax} + x^2\right)dx \\
&= \int \left[a^2 (ax)^{-1/2} - 4a + 6(ax)^{1/2} - 4x + x^2 (ax)^{-1/2}\right]dx \\
&= \int \left(a^{3/2}x^{-1/2} - 4a + 6a^{1/2}x^{1/2} - 4x + a^{-1/2}x^{3/2}\right)dx \\
&= a^{3/2}\int x^{-1/2}dx - 4a\int dx + 6a^{1/2}\int x^{1/2}dx - 4\int xdx + a^{-1/2}\int x^{3/2}dx \\
&= a^{3/2}\frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}} - 4ax + 6a^{1/2}\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} - 2x^2 + a^{-1/2}\frac{x^{5/2}}{\frac{5}{2}} + C \\
&= 2a^{3/2}x^{1/2} - 4ax + 4a^{1/2}x^{3/2} - 2x^2 + \frac{2}{5}a^{-1/2}x^{5/2} + C
\end{aligned}$$

Cioè

$$I(x) = 2a\sqrt{ax} - 4ax + 4\sqrt{ax} - 2x^2 + \frac{2}{5}\frac{x^3}{\sqrt{ax}} + C$$

Esercizio 14 *Calcolare:*

$$I(x) = \int \frac{dx}{7+x^2} \tag{16}$$

Soluzione
Scriviamo:

$$I(x) = \frac{1}{7}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right)^2}$$

Ponendo $t = \frac{x}{\sqrt{7}}$ si ha $dx = \sqrt{7}dt$, per cui:

$$I(t) = \frac{\sqrt{7}}{7}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{\sqrt{7}}\arctan t + C$$

Ripristinando la variabile x:

$$I(x) = \frac{1}{\sqrt{7}}\arctan\frac{x}{\sqrt{7}} + C$$

Osserviamo che per procedere più spediti, non è necessario eseguire materialmente il cambio di variabile $x \to t$. Infatti, scriviamo:

$$I(x) = \frac{\sqrt{7}}{7}\int \frac{d\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right)}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{7}\arctan\frac{x}{\sqrt{7}} + C$$

Esercizio 15 *Calcolare:*

$$I(x) = \int \frac{dx}{x^2} \tag{17}$$

Soluzione

$$I(x) = \int x^{-2}dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} = -\frac{1}{x} + C$$

Esercizio 16 *Calcolare:*
$$I(x) = \int \sqrt[3]{x} dx \tag{18}$$

Soluzione

$$I(x) = \int x^{1/3} dx = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C = \frac{3}{4} x^{4/3} + C$$

Cioè
$$I(x) = \frac{3}{4} x \sqrt[3]{x} + C$$

Esercizio 17 *Calcolare:*
$$I(x) = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} \tag{19}$$

Soluzione

$$I(x) = \int x^{-2/3} dx = \frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} + C = 3x^{1/3} + C$$

Cioè
$$I(x) = 3\sqrt[3]{x} + C$$

Esercizio 18 *Calcolare:*
$$I(x) = \int \left(ax^2 + bx + c\right) dx \tag{20}$$

Soluzione

$$\begin{aligned} I(x) &= a \int x^2 dx + b \int x dx + c \int dx \\ &= \frac{a}{3} x^3 + \frac{b}{2} x^2 + cx + C \end{aligned}$$

Esercizio 19 *Calcolare:*
$$I(x) = \int (1-x) \sqrt{x} dx \tag{21}$$

Soluzione

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \sqrt{x} dx - \underbrace{\int x\sqrt{x} dx}_{=\int x^{3/2} dx} = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}+1} \\ &= \frac{2}{3} x^{\frac{1}{2}} \cdot x - \frac{2}{5} x^{1/2} \cdot x \\ &= 2x^{\frac{1}{2}} \cdot x \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} x \right) \end{aligned}$$

Cioè
$$I(x) = 2x\sqrt{x} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} x \right) + C$$

Esercizio 20 *Calcolare:*

$$I(x) = \int (3x+4)^2\, dx \tag{22}$$

Soluzione

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \left(9x^2 + 24x + 16\right) dx \\ &= 9\int x^2 dx + 24\int x dx + 16\int dx \\ &= 3x^3 + 12x + 16x + C \end{aligned}$$

Esercizio 21 *Calcolare:*

$$I(x) = \int \frac{ax^2 + bx + c}{x^2} dx \tag{23}$$

Soluzione

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}\right) dx \\ &= a\int dx + b\int \frac{dx}{x} + c\int x^{-2} dx, \end{aligned}$$

da cui

$$I(x) = ax + b\ln|x| - \frac{c}{x} + C$$

Esercizio 22 *Calcolare:*

$$I(x) = \int \left(x + 5 - 4x^{-2}\right) dx \tag{24}$$

Soluzione

$$\begin{aligned} I(x) &= \int x dx + \int 5 dx - 4\int x^{-2} dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 + 5x + \frac{4}{x} + C \end{aligned}$$

Esercizio 23 *Calcolare:*

$$I(x) = \int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}} dx \tag{25}$$

Soluzione

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{x^2 + 2x + 1}{\sqrt{x}} dx \\ &= \int \left(x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right) dx \\ &= \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + 2\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C \\ &= \frac{2}{5}x^{\frac{1}{2}}x^2 + \frac{4}{3}x^{\frac{1}{2}}x + 2x^{\frac{1}{2}} + C \\ &= \sqrt{x}\left(\frac{2}{5}x^2 + \frac{4}{3}x + 2\right) + C \end{aligned}$$

Esercizio 24 *Calcolare:*

$$I(x) = \int \frac{dx}{x+\sqrt{2}} \tag{26}$$

Soluzione

$$I(x) = \int \frac{d\left(x+\sqrt{2}\right)}{x+\sqrt{2}} = \ln\left|x+\sqrt{2}\right| + C$$

Esercizio 25 *Calcolare:*

$$I(x) = \int \frac{dx}{ax+b}, \quad a,b \in \mathbb{R} - \{0\} \tag{27}$$

Soluzione

$$I(x) = \frac{1}{a}\int \frac{d(ax+b)}{ax+b} = \ln|ax+b| + C$$

Esercizio 26 *Calcolare:*

$$I(x) = \int e^{-x}dx \tag{28}$$

Soluzione

$$I(x) = -\int e^{-x}d(-x) = -e^{-x} + C$$

Esercizio 27 *Calcolare:*

$$I_\lambda(x) = \int e^{\lambda x}dx, \quad , \lambda \in \mathbb{R} - \{0\} \tag{29}$$

Soluzione

$$I_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda}\int e^{\lambda x}d(\lambda x) = e^{\lambda x} + C$$

Esercizio 28 *Calcolare:*

$$I_\lambda(x) = \int a^{\lambda x}dx \tag{30}$$

Soluzione

$$I_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda}\int a^{\lambda x}d(\lambda x) = \frac{a^{\lambda x}}{\lambda \ln a} + C$$

Esercizio 29 *Calcolare:*

$$I(x) = \int \sin\frac{x}{2}dx \tag{31}$$

Soluzione

$$I(x) = 2\int \sin\frac{x}{2}d\left(\frac{x}{2}\right) = -2\cos\frac{x}{2} + C$$

Esercizio 30 *Calcolare:*

$$I(x) = \int \cos 4x dx \tag{32}$$

Soluzione

$$I(x) = \frac{1}{4}\int \cos 4x d(4x) = \frac{1}{4}\sin 4x + C$$

Esercizio 31 *Calcolare:*

$$I(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} \tag{33}$$

Soluzione

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{dx}{\sqrt{4\left(1-\frac{x2}{4}\right)}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} \\ &= \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} = \arcsin\frac{x}{2} + C \end{aligned}$$

Esercizio 32 *Calcolare:*

$$I(x) = \int \frac{dx}{9+x^2} \tag{34}$$

Soluzione

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{dx}{9\left(1+\frac{x^2}{9}\right)} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2} \\ &= \frac{1}{3}\int \frac{d\left(\frac{x}{3}\right)}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}\arctan\frac{x}{3} + C \end{aligned}$$

Esercizio 33 *Calcolare:*

$$I(x) = \int \frac{dx}{4x^2+9} \tag{35}$$

Soluzione

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{1}{9}\int \frac{dx}{1+\frac{4}{9}x^2} = \frac{1}{6}\int \frac{d\left(\frac{2}{3}x\right)}{1+\left(\frac{2}{3}x\right)^2} \\ &= \frac{1}{6}\arctan\left(\frac{2}{3}x\right) + C \end{aligned}$$

3 Esercizi supplementari

Esercizio 34 *Calcolare:*

$$I(x) = \int \left(4x^3 + 3x^2 + 2x + 5\right) dx \tag{36}$$

Soluzione

$$\begin{aligned} I(x) &= 4\int x^3 dx + 3\int x^2 dx + 2\int x dx + 5\int dx \\ &= x^4 + x^3 + x^2 + 5x + C \end{aligned}$$

Esercizio 35 *Calcolare:*

$$I(x) = \int \left(3 - 2x - 5x^4\right) dx \tag{37}$$

Soluzione

$$\begin{aligned} I(x) &= 3\int dx - 2\int x dx - 5\int x^4 dx \\ &= 3x - x^2 - x^5 + C \end{aligned}$$

Esercizio 36 *Calcolare:*

$$I(x) = \int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}x + \frac{2}{\sqrt{x}}\right) dx \tag{38}$$

Soluzione

$$\begin{aligned} I(x) &= \int x^{1/2} dx - \frac{1}{2}\int x dx + 2\int x^{-1/2} dx \\ &= \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + 2\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C \\ &= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}x^2 + 4x^{\frac{1}{2}} + C \end{aligned}$$

Cioè

$$I(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{1}{4}x^2 + 4\sqrt{x} + C$$

Esercizio 37 *Calcolare:*

$$I_\lambda(x) = \int (\lambda + x)^5 dx, \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \tag{39}$$

Soluzione

$$I_\lambda(x) = \int (\lambda + x)^5 d(\lambda + x) = \frac{1}{6}(\lambda + x)^6 + C$$

Esercizio 38 *Calcolare:*

$$I(x) = \int \left(x^2 - 1\right)^2 dx \tag{40}$$

Soluzione

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \left(x^4 - 2x^2 + 1\right) dx \\ &= \int x^4 dx - 2\int x^2 dx + \int dx \\ &= \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + x + C \end{aligned}$$

Esercizio 39 *Calcolare:*

$$I(x) = \int (x - 2)^{3/2} dx \tag{41}$$

Soluzione

$$\begin{aligned} I(x) &= \int (x - 2)^{3/2} d(x - 2) \\ &= \frac{2}{5}(x - 2)^{5/2} + C \end{aligned}$$

Esercizio 40 *Calcolare:*

$$I(x) = \int \left(\frac{1}{x} + x\right) dx \tag{42}$$

Soluzione

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{dx}{x} + \int x dx = \\ &= \ln|x| + \frac{1}{2}x^2 + C \end{aligned}$$

Esercizio 41 *Calcolare:*

$$I(x) = \int \frac{dx}{x^3} \tag{43}$$

Soluzione

$$\begin{aligned} I(x) &= \int x^{-3} dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C \\ &= -\frac{1}{2x^2} + C \end{aligned}$$

Esercizio 42 *Calcolare:*

$$I(x) = \int \frac{dx}{(x-1)^n}, \quad n \in \mathbb{N} - \{0\} \tag{44}$$

Soluzione

$$\begin{aligned} I_n(x) &= \int (x-1)^{-n} d(x-1) \\ &= \frac{(x-1)^{-n+1}}{-n+1} + C \\ &= -\frac{1}{n-1}(x-1)^{-(n-1)} + C \end{aligned}$$

Cioè

$$I_n(x) = -\frac{1}{(n-1)(x-1)^{n-1}} + C, \quad n \neq 1$$

Per $n = 1$

$$\begin{aligned} I_1(x) &= \int \frac{dx}{x-1} = \int \frac{d(x-1)}{x-1} \\ &= \ln|x-1| + C \end{aligned}$$

Conclusione:

$$I_n(x) = \begin{cases} -\frac{1}{(n-1)(x-1)^{n-1}} + C, & n \neq 1 \\ \ln|x-1| + C, & n = 1 \end{cases}$$

Esercizio 43 *Calcolare:*

$$I(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{x+3}} \tag{45}$$

Soluzione

$$\begin{aligned} I(x) &= \int (x+3)^{-1/2} d(x+3) \\ &= 2\sqrt{x+3} + C \end{aligned}$$

Esercizio 44 *Calcolare:*

$$I(x) = \int \sqrt{3x-1}dx \tag{46}$$

Soluzione

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{1}{3}\int (3x-1)^{1/2} d(3x-1) \\ &= \frac{1}{3}\frac{(3x-1)^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{2}{9}\sqrt{(3x-1)^3} + C \end{aligned}$$

o, ciò che è lo stesso

$$I(x) = \frac{2}{9}(3x-1)\sqrt{3x-1} + C$$

Esercizio 45 *Calcolare:*

$$I(x) = \int \sqrt{2-3x}dx \tag{47}$$

Soluzione

$$\begin{aligned} I(x) &= -\frac{1}{3}\int (2-3x)^{1/2} d(2-3x) \\ &= -\frac{1}{3}\frac{(2-3x)^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C \\ &= -\frac{2}{9}\sqrt{(2-3x)^3} + C \end{aligned}$$

Esercizio 46 *Calcolare:*

$$I(x) = \int \frac{5}{\sqrt[4]{x^3}}dx \tag{48}$$

Soluzione

$$\begin{aligned} I(x) &= 5\int x^{-3/4}dx = 5\frac{x^{-\frac{3}{4}+1}}{-\frac{3}{4}+1} + C \\ &= 5\frac{x^{1/4}}{\frac{1}{4}} + C \end{aligned}$$

Cioè

$$I(x) = 20\sqrt[4]{x} + C$$

Esercizio 47 *Calcolare:*

$$I(x) = \int \sqrt{\frac{2}{x^2-1}}dx \tag{49}$$

Soluzione

$$I(x) = \sqrt{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

Dalla tavola degli integrali fondamentali

$$I(x) = \begin{cases} \sqrt{2}\operatorname{arccosh} x + C, & x \in (1, +\infty) \\ \sqrt{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C, & x \notin (-1, 1) \end{cases}$$

Esercizio 48 *Calcolare:*

$$I(x) = \int \frac{dx}{(a+bx)^{1/n}}, \qquad a, b \in \mathbb{R} - \{0\}, \quad n \in \mathbb{N} - \{0\} \tag{50}$$

Soluzione

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{1}{b} \int \frac{d(a+bx)}{(a+bx)^{1/n}} \\ &= \frac{1}{b} \int (a+bx)^{-1/n} d(a+bx) \\ &= \frac{1}{b} \frac{(a+bx)^{-\frac{1}{n}+1}}{-\frac{1}{n}+1} + C \\ &= \frac{1}{b} \frac{(a+bx)^{\frac{n-1}{n}}}{\frac{n-1}{n}} + C \end{aligned}$$

Cioè

$$I(x) = \frac{n}{(n-1)b} \frac{1}{(a+bx)^{\frac{1}{n}-1}} + C$$

Tale formula è valida per $n \neq 1$. Nel caso $n = 1$

$$I(x) = \frac{1}{b} \int \frac{d(a+bx)}{a+bx} = \frac{1}{b} \ln|a+bx| + C$$

Esercizio 49 *Calcolare:*

$$I(x) = \int \frac{(1+\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}} dx \tag{51}$$

Soluzione

Anzichè sviluppare il quadrato, osserviamo che

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d\left(1+\sqrt{x}\right),$$

per cui:

$$\begin{aligned} I(x) &= 2 \int \left(1+\sqrt{x}\right)^2 d\left(1+\sqrt{x}\right) \\ &= \frac{2}{3}\left(1+\sqrt{x}\right)^3 + C \end{aligned}$$

Esercizio 50 *Calcolare:*

$$I(x) = \int \sqrt{x}(3-5x)\, dx \tag{52}$$

Soluzione

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \left(3\sqrt{x} - 5x\sqrt{x}\right) dx \\ &= 3\int x^2 dx - 5\int x^{3/2} dx \\ &= 3\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} - 5\frac{x^{5/2}}{\frac{5}{2}} + C \\ &= 2\left(x\sqrt{x} - 2x^2\sqrt{x}\right) \end{aligned}$$

Cioè

$$I(x) = 2x\sqrt{x}(1-x) + C$$

Esercizio 51 *Calcolare:*

$$I(x) = \int \frac{(x+1)(x-2)}{\sqrt{x}} dx \tag{53}$$

Soluzione

$$\begin{aligned}
I(x) &= \int \frac{x^2 - x - 2}{\sqrt{x}} dx = \int \left(x^{3/2} - x^{1/2} - 2x^{-1/2}\right) dx \\
&= \int x^{3/2} dx - \int x^{1/2} dx - 2 \int x^{-1/2} dx \\
&= \frac{2}{5} x^{5/2} - \frac{2}{3} x^{3/2} - 4x^{1/2} + C \\
&= \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} - \frac{2}{3} x \sqrt{x} - 4\sqrt{x} + C
\end{aligned}$$