Esempio di spazio vettoriale

Marcello Colozzo – http://www.extrabyte.info

Denotiamo con $P_n[x]$ l'insieme dei polinomi su un campo $\mathbb{K}$ di grado $\leq n \in \mathbb{N}$. Introduciamo in $P_n[x]$ le ordinarie operazioni di addizione di polinomi e di moltiplicazione di uno scalare (elemento di $\mathbb{K}$) per un polinomio. Più precisamente, assegnati i polinomi:

$$\begin{aligned} a(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n, \quad (a_i \in \mathbb{K},\ i = 0, 1, ..., n) \\ b(x) &= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_n x^n, \quad (b_i \in \mathbb{K},\ i = 0, 1, ..., n) \end{aligned} \tag{1}$$

Definiamo "somma di $a(x)$ e $b(x)$" il polinomio:

$$a(x) + b(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + ... + (a_n + b_n)x^n \tag{2}$$

L'elemento neutro $0_{P_n[x]}$ rispetto all'addizione è il polinomio nullo, i.e. il polinomio avente tutti i coefficienti nulli:

$$0 + 0x + 0x^2 + ... + 0x^n \tag{3}$$

L'elemento opposto di $a(x)$ è

$$-a(x) = -a_0 - a_1 x - a_2 x^2 - ... - a_n x^n \tag{4}$$

L'operazione di moltiplicazione di uno scalare per un elemento di $P_n[x]$ è così definita:

$$\lambda a(x) = \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \lambda a_2 x^2 + ... + \lambda a_n x^n, \quad a(x) \in P_n[x],\ \lambda \in \mathbb{K} \tag{5}$$

È facile persuadersi che l'insieme $P_n[x]$ assieme alle operazioni sopra definite $(+, \cdot)$, verifica tutti gli assiomi di spazio vettoriale. Ne concludiamo che $(P_n[x], +, -)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.