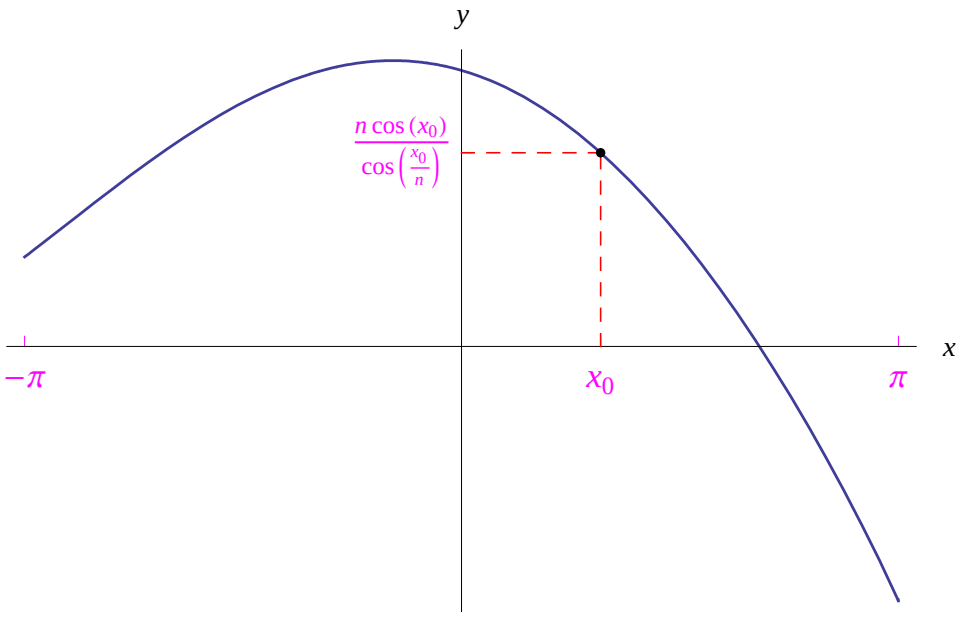
MATEMATICA OPEN SOURCE – HTTP://WWW.EXTRABYTE.INFO
Quaderni di Analisi Matematica – 2016

Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx}f\left(x\right) \quad \sum_{k=0}^{+\infty}a_k \quad \int f\left(x\right)dx \quad \oint_{\Gamma}\left(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz\right)$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sin x-\sin x_0}{\sin\frac{x}{n}-\sin\frac{x_0}{n}}=\frac{n\cos x_0}{\cos\frac{x_0}{n}},\quad \forall n\in\mathbb{N}-\{0,1\}$$

Marcello Colozzo



Esercizio 1 *Dimostrare:*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{\sin \frac{x}{n} - \sin \frac{x_0}{n}} = \frac{n \cos x_0}{\cos \frac{x_0}{n}}, \quad \forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$$

Svolgimento

Conviene utilizzare le formule di prostaferesi per trasformare numeratore e denominatore in prodotti di funzioni trigonometriche, giacchè il rapporto così come è scritto, si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Abbiamo:

$$\sin x - \sin x_0 = 2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x + x_0}{2}$$
$$\sin \frac{x}{n} - \sin \frac{x_0}{n} = 2 \sin \frac{x - x_0}{2n} \cos \frac{x + x_0}{2n},$$

cosicchè

$$\lambda_n \overset{def}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{\sin \frac{x}{n} - \sin \frac{x_0}{n}} = \lim_{x\to x_0} \frac{\sin \frac{x-x_0}{2} \cos \frac{x+x_0}{2}}{\sin \frac{x-x_0}{2n} \cos \frac{x+x_0}{2n}}$$

Eseguendo il cambio di variabile $t = \frac{x-x_0}{2}$:

$$\lambda_n = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t \cos (x_0 + t)}{\sin \frac{t}{n} \cos \frac{x_0+t}{n}}$$

Dividiamo numeratore e denominatore per t:

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\sin t}{t} \cos (x_0 + t)}{\frac{\sin \frac{t}{n}}{\frac{t}{n}} \cdot \frac{1}{n} \cos \frac{x_0+t}{n}} \\ &= \frac{1 \cdot \cos x_0}{1 \cdot \frac{1}{n} \cos \frac{x_0}{n}} \\ &= \frac{n \cos x_0}{\cos \frac{x_0}{n}} \end{aligned}$$