MATEMATICA OPEN SOURCE – HTTP://WWW.EXTRABYTE.INFO
Quaderni di Analisi Matematica – 2016

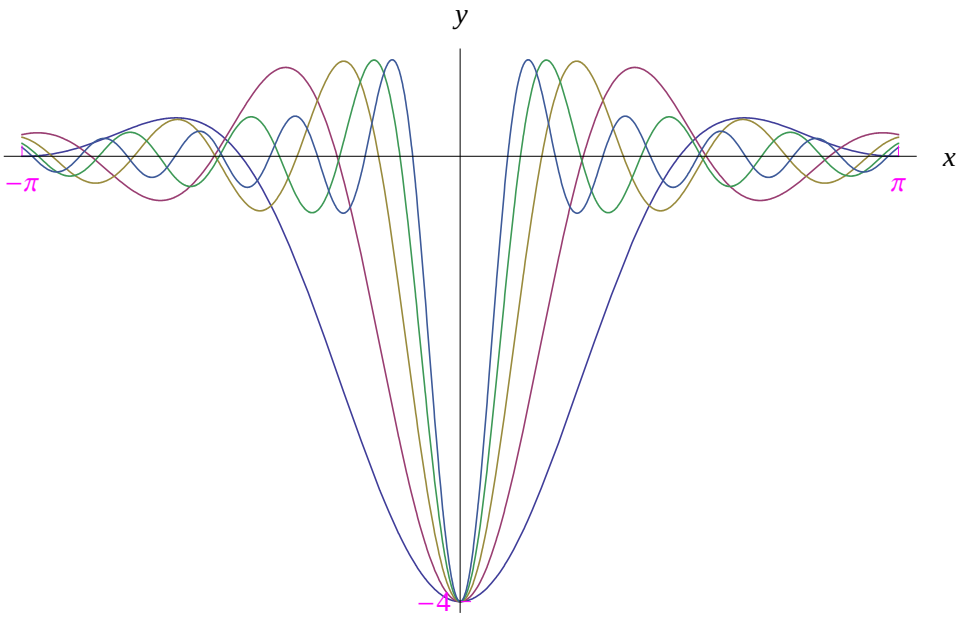
Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx}f\left(x\right) \quad \sum_{k=0}^{+\infty}a_k \quad \int f\left(x\right)dx \quad \oint_{\Gamma}\left(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz\right)$$

Ricerca delle soluzioni dell'equazione

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^n}=-4$$

Marcello Colozzo



Esercizio 1 *Determinare i valori del parametro $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ per i quali la seguente equazione in $a, b \in \mathbb{R}$*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^n} = -4, \tag{1}$$

ammette ∞^1 soluzioni.

Svolgimento

Dal momento che il limite a primo membro della (1) si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$, conviene sviluppare il numeratore attraverso le formule di prostaferesi:

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{a-\beta}{2},$$

che nel nostro caso si scrivono:

$$\cos ax - \cos bx = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}x\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}x\right),$$

cosicchè:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^n} = -2\lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\frac{a+b}{2}x\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}x\right)}{x^n}$$

Per $n = 1$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\cos ax - \cos bx}{x} &= -2\lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\frac{a+b}{2}x\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}x\right)}{x} \\ &= -2\lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\frac{a+b}{2}x\right)}{x} \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{a-b}{2}x\right)}_{=0}\end{aligned} \tag{2}$$

Riesce:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\frac{a\pm b}{2}x\right)}{x} = \frac{a\pm b}{2}\underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\frac{a\pm b}{2}x\right)}{\frac{a\pm b}{2}x}}_{=1} = \frac{a\pm b}{2}$$

Quindi la (2) diventa:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos ax - \cos bx}{x} = -2\frac{a\pm b}{2}\cdot 0 = 0$$

Ciò implica che deve essere $n \geq 2$. Proviamo prima per ogni $n > 2$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^n} &= -2\lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\frac{a+b}{2}x\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}x\right)}{x^n} \\ &= -2\underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\frac{a+b}{2}x\right)}{x}}_{=\frac{a+b}{2}} \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\frac{a-b}{2}x\right)}{x}}_{=\frac{a-b}{2}} \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{n-2}}}_{=\infty} \\ &= \infty\end{aligned}$$

Deve allora essere necessariamente $n = 2$. Infatti:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} &= -2\underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\frac{a+b}{2}x\right)}{x}}_{=\frac{a+b}{2}} \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\frac{a-b}{2}x\right)}{x}}_{=\frac{a-b}{2}} \\ &= \frac{b^2 - a^2}{2}\end{aligned}$$

Il problema chiede di determinare $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $\lim_{x\to 0} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} = -4$, per cui:

$$\frac{b^2 - a^2}{2} = -4$$

Cioè

$$a^2 - b^2 - 8 = 0, \tag{3}$$

che è un'equazione di secondo grado in a, b e come tale ammette ∞^1 soluzioni. Assumendo $b \in \mathbb{R}$ come parametro, la soluzione generale della (3) si scrive:

$$a = \pm\sqrt{b^2 + 8}, \quad \forall b \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

o ciò che è lo stesso:

$$(a, b) = \left(\pm\sqrt{b^2 + 8}, b\right), \quad \forall b \in \mathbb{R}$$

Osservando che $\cos\left(\pm\sqrt{b^2 + 8}x\right) = \cos\left(\sqrt{b^2 + 8}x\right)$, segue che alla soluzione generale (4) corrisponde la famiglia di funzioni:

$$\mathcal{F} = \left\{ f_{\pm\sqrt{b^2+8},b}\,(x) \right\}, \tag{5}$$

essendo:

$$f_{\pm\sqrt{b^2+8},b}\,(x) = \frac{\cos\left(\sqrt{b^2 + 8}x\right) - \cos bx}{x^2} \tag{6}$$

Per quanto precede, comunque prendiamo $b \in \mathbb{R}$, la funzione $f_{\pm\sqrt{b^2+8},b}\,(x)$ converge a -4 per $x \to 0$. In fig. 1 sono graficate alcune funzioni della famiglia (5).

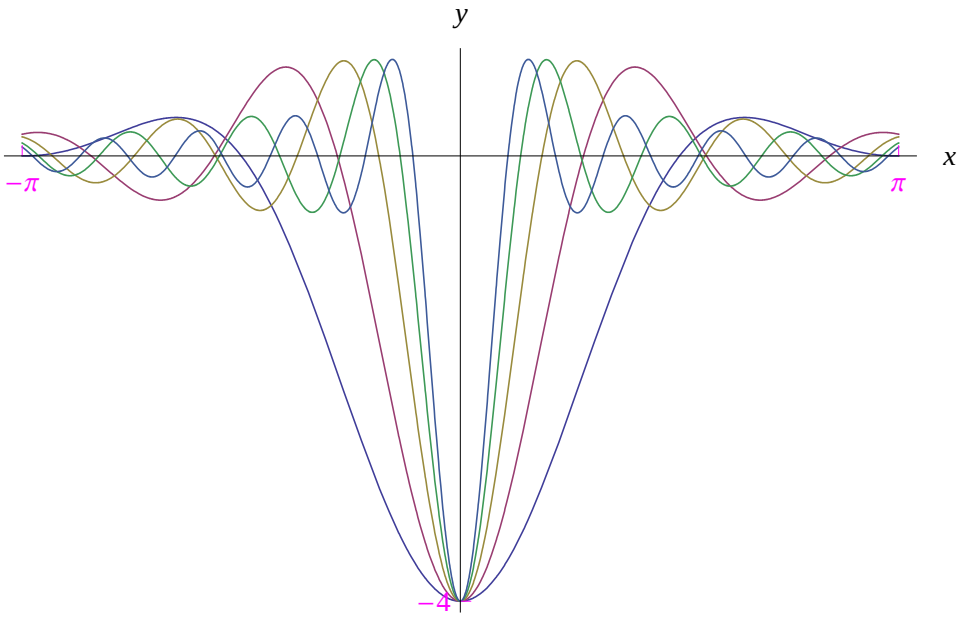


Figura 1: Grafico di (6) per $b = 1, 2, 4, 6, 8, 10$.