

Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx} f(x) \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \int f(x) dx \oint_{\Gamma} (X dx + Y dy + Z dz)$$

Ricerca delle soluzioni dell'equazione

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{n}} \frac{1 - (n-1) \cos x}{\pi - nx} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Marcello Colozzo

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{n}} \frac{1 - (n-1) \cos x}{\pi - nx} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Esercizio 1 Risolvere l'equazione in $n \in \mathbb{N} - \{0\}$:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{n}} \frac{1 - (n-1) \cos x}{\pi - nx} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad (1)$$

Soluzione.

Eseguendo il cambio di variabile $t = \pi - nx$, si ha:

$$\cos x = \cos \left(\frac{\pi}{n} - \frac{t}{n} \right) = \cos \frac{\pi}{n} \cos \frac{t}{n} + \sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{t}{n},$$

per cui il limite diventa:

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - (n-1) \cos \frac{\pi}{n} \cos \frac{t}{n} - (n-1) \sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{t}{n}}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - (n-1) \cos \frac{\pi}{n} \cos \frac{t}{n}}{t} - (n-1) \sin \frac{\pi}{n} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{t}{n}}{t} \end{aligned}$$

Il secondo limite a secondo membro è:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{t}{n}}{t} = \frac{1}{n},$$

per cui l'equazione assegnata si scrive:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - (n-1) \cos \frac{\pi}{n} \cos \frac{t}{n}}{t} - \frac{n-1}{n} \sin \frac{\pi}{n} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

L'altro limite è

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - (n-1) \cos \frac{\pi}{n} \cos \frac{t}{n}}{t} = \begin{cases} \infty, & \text{se } (n-1) \cos \frac{\pi}{n} \neq 1 \\ 0, & \text{se } (n-1) \cos \frac{\pi}{n} = 1 \end{cases}$$

Infatti per $(n-1) \cos \frac{\pi}{n} = 1$, ponendo $\tau = \frac{t}{n}$:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - (n-1) \cos \frac{\pi}{n} \cos \frac{t}{n}}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \frac{t}{n}}{t} \\ &= \frac{1}{n} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \tau}{\tau} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ne consegue che deve essere

$$(n-1) \cos \frac{\pi}{n} = 1 \iff \cos \frac{\pi}{n} = \frac{1}{n-1} \iff n = 3$$

La (1) equivale a dire che tra le infinite funzioni

$$f_n(x) = \frac{1 - (n-1) \cos x}{\pi - nx},$$

l'unica che converge in $x = \frac{\pi}{n}$ è quella con $n = 3$.