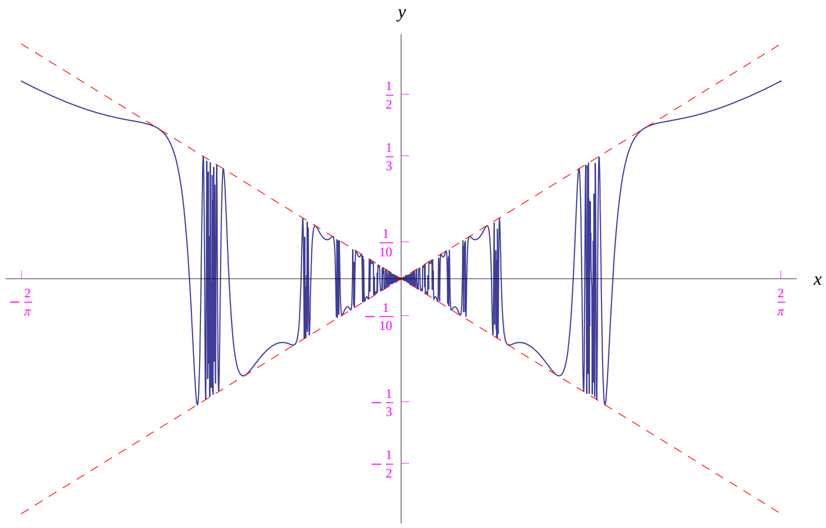
Matematica Open Source – http://www.extrabyte.info
Quaderni di Analisi Matematica – 2016

Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx}f(x) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \quad \int f(x)\,dx \quad \oint_{\Gamma} (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

Infiniti punti di discontinuità di seconda specie

Marcello Colozzo



Esercizio 1 *Classificare i punti di discontinuità della funzione:*

$$f(x) = x \sin\left(\frac{1}{\sin x}\right) \tag{1}$$

Svolgimento
L'insieme di definizione della funzione è:

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0,\ x \neq x_k = \frac{1}{k\pi},\quad \forall k \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\}$$

Per determinare il limite per $x \to x_k$, eseguiamo il cambio di variabile $t = \sin\frac{1}{x}$, per cui:

$$\lim_{x \to x_k} x \sin\left(\frac{1}{\sin x}\right) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{\arcsin t} \sin\left(\frac{1}{t}\right)$$

Tale limite non esiste, per cui la funzione ha infiniti punti di discontinuità di seconda specie in $x_k = \frac{1}{k\pi}$, $\forall k \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Più precisamente, in ogni intorno di x_k il grafico di f compie infinite oscillazioni che non si smorzano.

Denotiamo con S l'insieme di detti punti:

$$S = \left\{ x_k = \frac{1}{k\pi} \right\}_{k \in \mathbb{Z} - \{0\}},$$

da cui vediamo che $x = 0$ è di accumulazione per S:

$$\forall I_\delta(0) = (-\delta, \delta),\ \exists x_k \in S \cap I_\delta(0) - \{0\}$$

Inoltre:

$$-x \leq f(x) \leq x,\quad \forall x \in (-\delta, \delta)$$

Per il teorema dei carabinieri:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x = \lim_{x \to 0} (-x) = 0$$

Ne consegue che $x = 0$ è un punto di discontinuità eliminabile. In fig. 1 è illustrato il grafico di f.

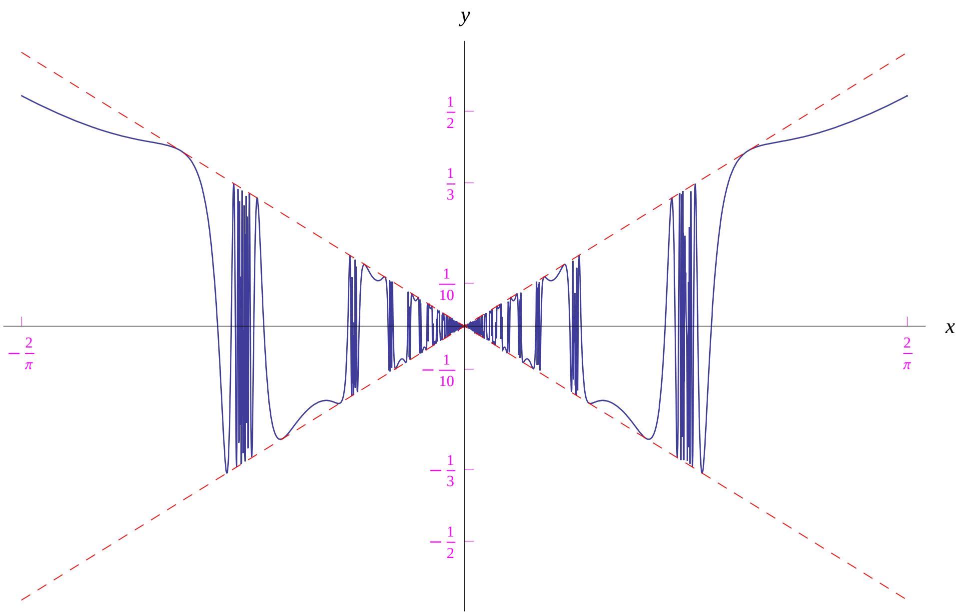


Figura 1: Grafico della funzione $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{\sin x}\right)$.