
Comportamento di una funzione in un intorno di un punto di accumulazione dell'insieme di definizione

Marcello Colozzo – <http://www.extrabyte.info>

Assegnata la funzione

$$f_n(x) = \frac{\tan nx - \tan x}{\sin 2x}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (1)$$

studiamone il comportamento in un intorno di $x = 0$, scrivendo:

$$\lambda_n = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan nx - \tan x}{\sin 2x}$$

Per $n = 0$

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\sin 2x} \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2 \sin x \cos x} \\ &= - \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \\ &= - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Per $n = 1$ il limite è nullo, giacchè riesce $f_{n=1}(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Per ogni $n > 1$ applichiamo le formule di prostaferesi:

$$\tan nx - \tan x = \frac{\sin(n-1)x}{\cos nx \cos x}, \quad \forall x \in (-\delta_n, \delta_n) \text{ con } 0 < \delta_n < \frac{\pi}{2n}$$

onde:

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(n-1)x}{\cos nx \cos x \sin 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{1}{\cos nx \cos x}}_{=1} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin(n-1)x}{\sin 2x}}_{=\lambda'_n} \end{aligned}$$

Calcoliamo a parte λ'_n dividendo numeratore e denominatore per x :

$$\lambda'_n = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(n-1)x}{(n-1)x} \cdot (n-1)}{\frac{\sin 2x}{2x} \cdot 2} = \frac{n-1}{2} \implies \lambda_n = \frac{n-1}{2}$$

Tale risultato ingloba anche i casi $n = 0, 1$, per cui:

$$\lambda_n = \frac{n-1}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Escludendo il caso $n = 1$ in cui la funzione assegnata è identicamente nulla, concludiamo che detta funzione è convergente in $x = 0$.