Esercizio svolto di Meccanica analitica

Marcello Colozzo - http://www.extrabyte.info

Esercizio 1 *Determinare le curve integrali del campo vettoriale*

$$\mathbf{V}(x,y) = (y,-x), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Soluzione

Dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

equivalente a $\ddot{x} + x = 0$, e risulta più semplice integrare tale equazione. Notiamo che è l'equazione differenziale del moto di una particella di massa unitaria soggetta a un campo di forze elastiche con costante unitaria. È facile trovare l'integrale generale:

$$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t,$$

essendo C_1, C_2 costanti di integrazione. Derivando

$$y(t) = \dot{x}(t) = -C_1 \sin t + C_2 \cos t$$

Abbiamo quindi una famiglia di curve piane a due parametri:

$$\mathbf{x} = (C_1 \cos t + C_2 \sin t, -C_1 \sin t + C_2 \cos t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Quadrando e sommando le componenti di tale vettore:

$$x^2 + y^2 = C_1^2 + C_2^2$$

Ne concludiamo che le curve integrali del campo vettoriale assegnato, sono circonferenze concentriche di centro $(0,0)$ e ragggio $(C_1^2 + C_2^2)^{1/2}$ (fig. 1).

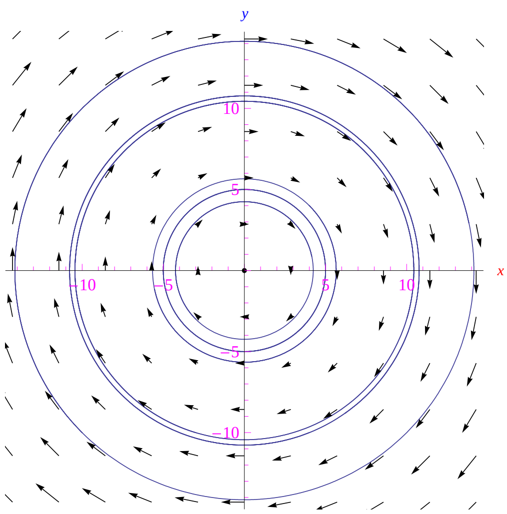

Figura 1: Alcune curve integrali del campo vettoriale $V(x,y) = (y,-x)$.