Esercizi di geometria differenziale

Marcello Colozzo - (file scaricato da http://www.extrabyte.info)

Esercizio 1 *Determinare la curvatura e la torsione dell'elica circolare cilindrica:*

$$x = R\cos\varphi, \quad y = R\sin\varphi, \quad z = \lambda\varphi, \qquad \varphi \in (-\infty, +\infty) \tag{1}$$

dove $R, \lambda > 0$ *sono parametri assegnati.*

Soluzione

Come è noto, la grandezza $\lambda > 0$ è il *passo* dell'elica (γ). Infatti, comunque prendiamo $\varphi_0 \in (-\infty, +\infty)$ il punto corrispondente è

$$P_0\left(x_0 = R\cos\varphi_0, y_0 = R\sin\varphi_0, z_0 = \lambda\varphi_0\right)$$

Per $\varphi_0 + 2\pi$ il punto è

$$P_0'\left(x_0' = R\cos\varphi_0, y_0' = R\sin\varphi_0, z_0' = \lambda\left(\varphi_0 + 2\pi\right)\right)$$

per cui le coordinate x, y sono invariate mentre

$$z_0' = z_0 + 2\pi\lambda \Longrightarrow \Delta z = 2\pi\lambda$$

che giustifica la predetta denominazione.

Ciò premesso, introduciamo un sistema di ascisse curvilinee di origine $\Omega(R, 0, 0)$ (fig. 1). Orientando γ nel verso delle φ crescenti:

$$\begin{aligned}\frac{ds}{d\varphi} &= \left|\frac{d\mathbf{x}}{d\varphi}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2} = \sqrt{R^2\sin^2\varphi + R^2\cos^2\varphi + \lambda^2} \\ &= \sqrt{R^2 + \lambda^2}\end{aligned}$$

onde:

$$s(\varphi) = \sqrt{R^2 + \lambda^2}\int_0^\varphi d\varphi' = \sqrt{R^2 + \lambda^2}\,\varphi \tag{2}$$

Ne segue la rappresentazione naturale di γ:

$$\mathbf{x}(s) = R\cos\left(\frac{s}{\sqrt{R^2 + \lambda^2}}\right)\mathbf{i} + R\sin\left(\frac{s}{\sqrt{R^2 + \lambda^2}}\right)\mathbf{j} + \frac{s\lambda}{\sqrt{R^2 + \lambda^2}}\mathbf{k} \tag{3}$$

Quindi il versore tangente:

$$\boldsymbol{\tau}(s) = \frac{d\mathbf{x}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \lambda^2}}\left[-R\sin\left(\frac{s}{\sqrt{R^2 + \lambda^2}}\right)\mathbf{i} + R\cos\left(\frac{s}{\sqrt{R^2 + \lambda^2}}\right)\mathbf{j} + \lambda\mathbf{k}\right] \tag{4}$$

A questo punto calcoliamo la curvatura:

$$k(s) = \left|\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\right|$$

La derivata del versore tangente è

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = -\frac{R}{\sqrt{R^2 + \lambda^2}}\left[\cos\left(\frac{s}{\sqrt{R^2 + \lambda^2}}\right)\mathbf{i} + \sin\left(\frac{s}{\sqrt{R^2 + \lambda^2}}\right)\mathbf{j}\right] \tag{5}$$

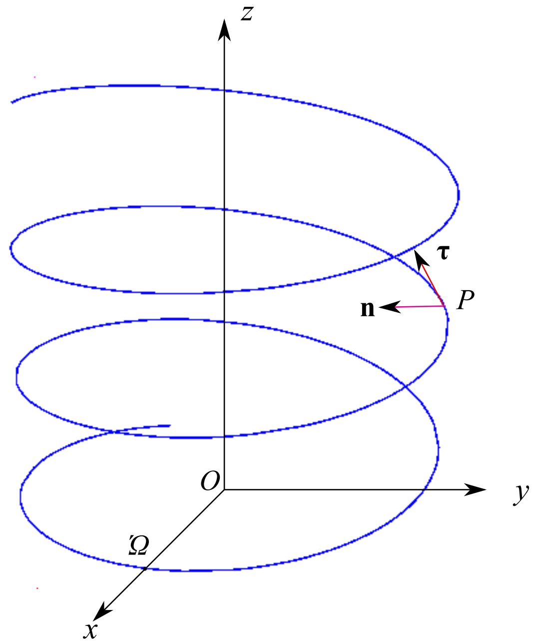

Figura 1: Esercizio 1.

per cui

$$k(s)=\frac{R}{R^2+\lambda^2} \tag{6}$$

Per calcolare la torsione $\chi(s)$ utilizziamo la terza formula di Frenet:

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds}=\chi(s)\,\mathbf{n}(s) \tag{7}$$

Il versore normale principale $\mathbf{n}(s)$ è il versore di $\frac{d\tau}{ds}$, quindi dalla (5):

$$\mathbf{n}(s)=-\cos\left(\frac{s}{\sqrt{R^2+\lambda^2}}\right)\mathbf{i}-\sin\left(\frac{s}{\sqrt{R^2+\lambda^2}}\right)\mathbf{j}$$

Dobbiamo ora determinare il versore binormale $\mathbf{b}(s)$. Sfruttiamo l'ortonormalità della terna intrinseca, cosicché

$$\begin{aligned}\mathbf{b}(s)=\boldsymbol{\tau}(s)\wedge\mathbf{n}(s)&=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \tau_x & \tau_y & \tau_z\\ n_x & n_y & n_z\end{vmatrix} \qquad (8)\\ &=\frac{1}{\sqrt{R^2+\lambda^2}}\left[\lambda\sin\left(\frac{s}{\sqrt{R^2+\lambda^2}}\right)\mathbf{i}-\lambda\cos\left(\frac{s}{\sqrt{R^2+\lambda^2}}\right)\mathbf{j}\right]\end{aligned}$$

Segue

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{b}(s)}{ds}&=\frac{1}{\sqrt{R^2+\lambda^2}}\left[\frac{\lambda}{\sqrt{R^2+\lambda^2}}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{R^2+\lambda^2}}\right)\mathbf{i}+\frac{\lambda}{\sqrt{R^2+\lambda^2}}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{R^2+\lambda^2}}\right)\mathbf{j}\right]\\ &=-\frac{\lambda}{\sqrt{R^2+\lambda^2}}\mathbf{n}(s),\end{aligned}$$

onde

$$\chi(s)=-\frac{\lambda}{\sqrt{R^2+\lambda^2}} \tag{9}$$