Esercizi di geometria differenziale

Marcello Colozzo - (file scaricato da http://www.extrabyte.info)

Esercizio 1 *Disegnare la curva piana γ di rappresentazione parametrica:*

$$\mathbf{x}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j}, \quad t \in (-\infty, +\infty) \tag{1}$$

dove

$$x(t) = \begin{cases} -t^{2n}, & se\ t \leq 0 \\ t^{2n}, & se\ t < 0 \end{cases}, \quad con\ n \in \mathbb{N} - \{0,1\} \tag{2}$$
$$y(t) = t^{2n}, \quad t \in (-\infty, +\infty)$$

Soluzione

La funzione $y(t)$ è analitica i.e. $y \in C^{\omega}$, mentre $x \in C^{4n-1}$. Osservando che $|x| = t^{4n}$, si ha che γ è il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{|x|}$, disegnato in fig. 1 dove vediamo che $(0,0)$ è una cuspide.

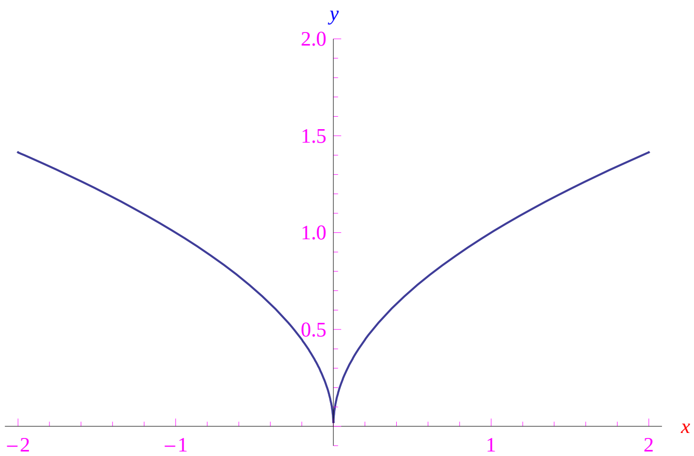

Figura 1: Esercizio (1).

Si noti che $\dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{0}$ i.e. l'istante $t = 0$ è un punto di arresto per il punto materiale (se γ è una traiettoria in senso cinematico). Non c'è inversione del moto giacché la funzione $x(t)$ è monotonamente crescente. Abbiamo così stabilito che l'origine $(0,0)$ è un punto singolare della curva assegnata. Una rappresentazione implicita è

$$F(x,y) = 0, \tag{3}$$

dove

$$F(x,y) = y - \sqrt{|x|} \tag{4}$$

manifestamente continua in $\mathbb{R}^2$. Tuttavia $F_x(x,y)$ non è continua in $(0,0)$ per cui non è applicabile il teorema del Dini. Geometricamente significa che γ non è il grafico di una funzione in un intorno di $(0,0)$.

Esercizio 2 *(Testo tratto da [1]. La soluzione è nostra)*

Disegnare la curva piana γ di rappresentazione parametrica:

$$\mathbf{x}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j}, \quad t \in (-\infty, +\infty) \tag{5}$$

dove

$$x(t) = \begin{cases} e^{1/t}, & se\ t < 0 \\ 0, & se\ t = 0 \\ -e^{-1/t}, & se\ t > 0 \end{cases}, \quad y(t) = \begin{cases} e^{1/t}\sin\left(\pi e^{-1/t}\right), & se\ t < 0 \\ 0, & se\ t = 0 \\ e^{-1/t}\sin\left(\pi e^{1/t}\right), & se\ t > 0 \end{cases} \tag{6}$$

Soluzione

Eseguiamo un rapido studio di funzione per $x(t), y(t)$. Abbiamo

$$\lim_{t\to 0^-} x(t) = \lim_{t\to 0^-} e^{1/t} = 0^+, \ \lim_{t\to 0^+} x(t) = \lim_{t\to 0^+} \left(-e^{-1/t}\right) = 0^-$$

per cui $x(t)$ è continua in $t = 0$.

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{t\to+\infty} \left(-e^{-1/t}\right) = -1, \ \lim_{t\to-\infty} x(t) = \lim_{t\to-\infty} \left(e^{1/t}\right) = 1$$

Quindi le rette $x = +1$ e $x = -1$ sono rispettivamente asintoto orizzontale a sinistra e asintoto orizzontale a destra per il grafico di $x(t)$. **Be careful alla derivata prima in** $t = 0$:

$$\dot{x}(0) = \lim_{t\to 0} \frac{x(t) - x(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{x(t)}{t} = 0$$

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{x(t)}{t} = -\lim_{t\to 0^+} \frac{e^{-1/t}}{t} = 0, \ \lim_{t\to 0^-} \frac{x(t)}{t} = \lim_{t\to 0^-} \frac{e^{1/t}}{t} = 0$$

Segue

$$\dot{x}(0) = 0 \tag{7}$$

Per $t \neq 0$ applichiamo le regole di derivazione:

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} -\frac{1}{t^2} e^{1/t}, & \text{se } t < 0 \\ -\frac{1}{t^2} e^{-1/t}, & \text{se } t > 0 \end{cases} \tag{8}$$

Quindi

$$\left(\lim_{t\to 0^+} \dot{x}(t) = 0, \ \lim_{t\to 0^-} \dot{x}(t) = 0\right) \Longrightarrow \lim_{t\to 0} \dot{x}(t) = 0$$

da cui la continuità della derivata $\dot{x}(t)$ in $t = 0$. Medesima conclusione per le derivate successive di ordine comunque elevato. Ne concludiamo che $x(t) \in C^\infty$. Tuttavia è facile convincersi che tale funzione non è analitica poché in $t = 0$ si annullano tutte le derivate di ordine comunque elevato. Il grafico di $x(t)$ è in fig. 2.

Passiamo alla funzione $y(t)$.

$$\lim_{t\to 0^-} y(t) = e^{-\infty} \sin\left(\pi e^{-\infty}\right) = 0, \ \lim_{t\to 0^+} y(t) = e^{-\infty} \cdot \underbrace{\sin\left(\pi e^{+\infty}\right)}_{?}$$

Più rigorosamente

$$\nexists \lim_{t\to 0^+} \sin\left(\pi e^{1/t}\right) \underset{\tau=\pi e^t}{=} \lim_{\tau\to+\infty} \sin\tau$$

Tuttavia stiamo cercando il limite del prodotto di una funzione infinitesima $\left(e^{-1/t}\right)$ per una funzione non regolare ma comunque limitata in ogni intorno di $t = 0$, i.e. $\sin\left(\pi e^{1/t}\right)$. Da noti teoremi sui limiti, segue che il prodotto è infinitesimo:

$$\lim_{t\to 0^+} y(t) = 0$$

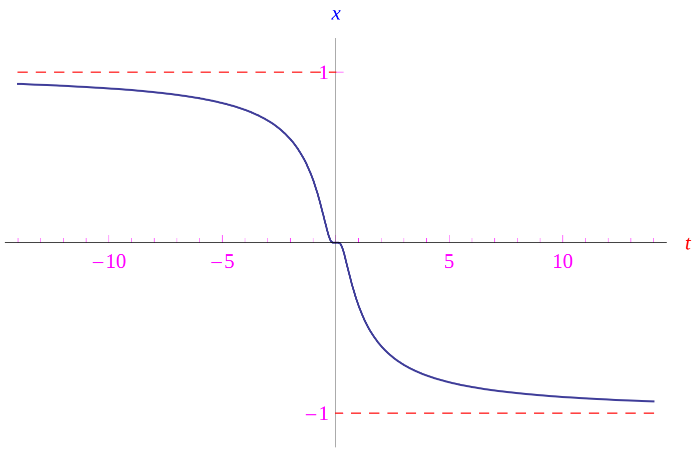

Figura 2: Esercizio (1). Grafico di $x(t)$.

Ne segue che $y(t)$ è continua in $t=0$. Anche qui dobbiamo fare attenzione al calcolo della derivata prima. Al solito, in $t=0$ applichiamo la definizione di derivata:

$$\dot{y}(0)=\lim_{t\to 0}\frac{y(t)-y(0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{y(t)}{t}$$

Si ottiene facilmente:

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{y(t)}{t}=\lim_{t\to 0^-}\frac{y(t)}{t}=0\Longrightarrow\lim_{t\to 0^+}\frac{y(t)}{t}=0$$

Cioè

$$\dot{y}(0)=0$$

Per $t\neq 0$ si applicano le usuali regole di derivazione, e non è difficile stabilire che

$$\lim_{t\to 0}\dot{y}(t)=0$$

da cui la continuità della derivata prima. Ripetendo i calcoli per le derivate successive, si perviene alla conclusione: $y\in C^\infty$. Ma le derivate (di qualunque ordine) si annullano in $t=0$, per cui la funzione non è analitica. Il grafico di $x(t)$ è in fig. 3.

Abbiamo quindi una curva in rappresentazione parametrica in cui le funzioni $x(t),y(t)$ pur non essendo analitiche, sono dotate di derivate continue di ordine comunque elevato. Ci aspettiamo quindi una regolarità della curva. Diversamente, tale curva ha una singolarità in $(0,0)$. Per convincersene basta passare alla rappresentazione cartesiana. A tale scopo osserviamo che

$$t<0\Longrightarrow x=e^{1/t}>0,\ y=x\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$$
$$t>0\Longrightarrow x=-e^{1/t}<0,\ y=e^{1/t}\sin\left(\frac{\pi}{e^{-1/t}}\right)=-x\sin\left(\frac{\pi}{-x}\right)=x\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

Cioè è la curva è il grafico della funzione

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\left(\frac{\pi}{x}\right), \text{ se } x\neq 0\\ 0, \text{ se } x=0\end{cases}\tag{9}$$

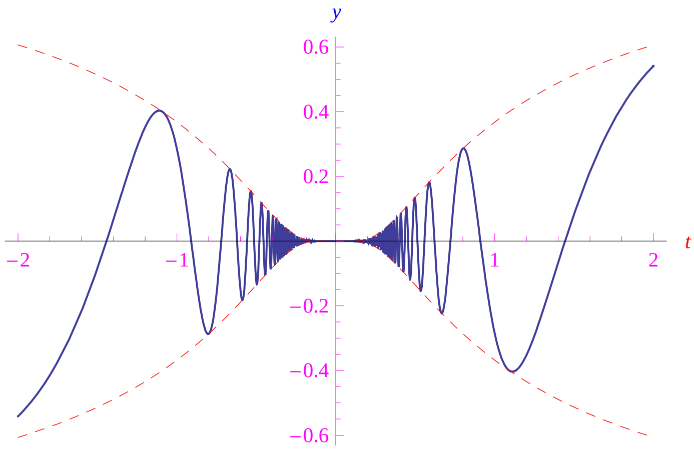

Figura 3: Esercizio (1). Grafico di $y\left(t\right)$.

Risulta

$$\lim_{x \to 0} f\left(x\right) = 0$$

ovvero la funzione è continua in $x = 0$. Ma

$$f'\left(0\right) = \lim_{x \to 0} \frac{f\left(x\right) - f\left(0\right)}{0} = \lim_{x \to 0} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$$
$$\nexists \lim_{x \to 0} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \Longrightarrow \nexists f'\left(0\right)$$

Quindi la funzione non è derivabile in $x = 0$, i.e. γ è priva di retta tangente in $x = 0$. La curva è tracciata in fig. 4.

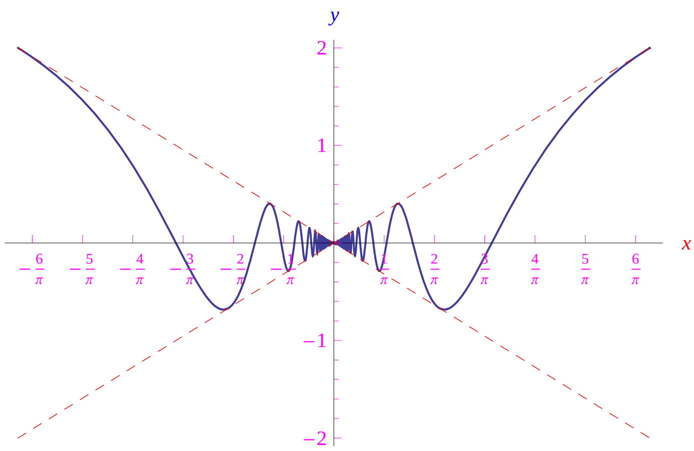

Figura 4: Esercizio (2). Andamento della curva assegnata.

Riferimenti bibliografici

[1] Fasano A., Marmi S. 1994. *Meccanica analitica*. Boringhieri