

# Appunti ed esercizi di Meccanica analitica

Marcello Colozzo - (file scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

**Esercizio 1** Discutere il moto di un punto materiale di massa  $m$  vincolato a muoversi lungo l'asse  $x$  sede di un campo di forze conservativo con energia potenziale:

$$V(x) = V_0 \left( \frac{x}{\lambda} \right)^{2n}, \quad (1)$$

dove  $V_0 > 0$  e  $\lambda > 0$  sono due costanti aventi rispettivamente le dimensioni di una energia e di una lunghezza, mentre  $n$  è un intero positivo  $\geq 1$ .

## Soluzione

Il grafico della funzione  $V(x)$  è in fig. ???. Il punto  $x = 0$  definisce manifestamente una posizione di equilibrio stabile, mentre il minimo assoluto di  $V(x)$  è zero, per cui l'energia meccanica è non negativa:

$$E(x, y) = V_0 \left( \frac{x}{\lambda} \right)^{2n} + \frac{y^2}{2m} \geq 0$$

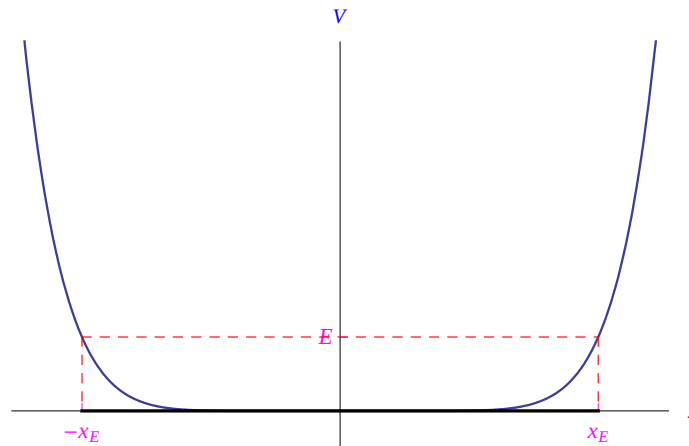


Figura 1: Andamento della funzione  $V(x)$  (eq. (1)).

Per un assegnato valore dell'energia  $E > 0$  otteniamo la regione classicamente accessibile

$$\Lambda(E) = [-x_E, x_E] \quad (2)$$

essendo

$$x_E = \lambda \left( \frac{E}{V_0} \right)^{\frac{1}{2n}} \quad (3)$$

Le curve di fase sono:

$$\gamma_{E>0} : V_0 \left( \frac{x}{\lambda} \right)^{2n} + \frac{y^2}{2m} = E$$

Non esistono curve separatrici giacché il sistema è privo di posizioni di equilibrio instabile. Per il teorema ?? il moto è periodico di periodo

$$T_n = 2 \int_{-x_E}^{x_E} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}},$$

essendo

$$f(x) = \frac{2}{m} [E - V(x)] = \frac{2}{m} \left[ E - V_0 \left( \frac{x}{\lambda} \right)^{2n} \right]$$

Dal momento che la funzione integranda è pari:

$$T_n = 4 \int_0^{x_E} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{m} \left\{ 1 - \left[ \left( \frac{V_0}{E} \right)^{\frac{1}{2n}} \frac{x}{\lambda} \right]^{2n} \right\}}} \quad (4)$$

Eseguiamo il cambio di variabile

$$\xi = \left( \frac{V_0}{E} \right)^{\frac{1}{2n}} \frac{x}{\lambda} \Rightarrow x = \lambda \left( \frac{E}{V_0} \right)^{\frac{1}{2n}} \xi \Rightarrow dx = \lambda \left( \frac{E}{V_0} \right)^{\frac{1}{2n}} d\xi$$

Vediamo come cambiano gli estremi di integrazione:

$$0 \leq x = \lambda \left( \frac{E}{V_0} \right)^{\frac{1}{2n}} \xi \leq \lambda \left( \frac{E}{V_0} \right)^{\frac{1}{2n}} \Rightarrow 0 \leq \xi \leq 1$$

Quindi

$$T_n = 4\lambda \sqrt{\frac{m}{2E}} \left( \frac{E}{V_0} \right)^{\frac{1}{2n}} \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^{2n}}} \quad (5)$$

L'integrale può essere calcolato in forma chiusa solo per  $n = 1$  (oscillatore armonico). Per  $n > 1$  è esprimibile attraverso la funzione euleriana  $\Gamma$

$$\int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^{2n}}} = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{2n+1}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2n}\right)} \quad (6)$$

Ne segue

$$T_n = 4\lambda \sqrt{\frac{\pi m}{2E}} \left( \frac{E}{V_0} \right)^{\frac{1}{2n}} \frac{\Gamma\left(\frac{2n+1}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2n}\right)} \quad (7)$$