Esercizi di geometria differenziale

Marcello Colozzo - (file scaricato da http://www.extrabyte.info)

Esercizio 1 *(Tratto da [1]. La soluzione è nostra)*

Show that the rappresentation

$$x = 1 + \cos t,\ \ y = \sin t,\ \ z = 2\sin\frac{t}{2},\ \ t \in [-2\pi, 2\pi] \tag{1}$$

is regular and lies on the sphere of radius 2 about the origin and the cylinder $(x-1)^2 + y^2 = 1$

Soluzione

Quesito 1

Posto $\mathbf{x}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$, si ha

$$\mathbf{x}(t) \in C^{\omega}([-2\pi, 2\pi]) \ \text{ i.e. analitica}$$

$$\mathbf{x}(t) = (-\sin t)\,\mathbf{i} + (\cos t)\,\mathbf{j} + \left(\cos\frac{t}{2}\right)\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$$

da cui la regolarità della rappresentazione e quindi della curva $\gamma : \mathbf{x} = x(t)$.

Quesito 2

In generale, una curva

$$\gamma : x = x(t),\ \ y = y(t),\ \ z = z(t),\ \ t \in [a, b]$$

è *tracciata* su una superficie $S : f(x, y, z) = 0$ se

$$f(x(t), y(t), z(t)) = 0,\ \ \forall t \in [a, b]$$

Nel nostro caso abbiamo la sfera

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 2$$

Verifichiamo se la curva assegnata è tracciata su S:

$$x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2 = 1 + 2\cos t + \underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_{=1} + 4\sin^2\frac{t}{2} \tag{2}$$

Dalle formule di bisezione

$$\sin^2\frac{t}{2} = \frac{1-\cos t}{2},$$

cosicché la (2) restituisce

$$x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2 = 2 + 2\cos t + 2 - 2\cos t = 4,$$

quindi γ è tracciata su S. Ripetiamo il procedimento per il cilindro:

$$\mathcal{C} : (x-1)^2 + y^2 = 1$$

Precisamente, il cilindro circolare retto di base la circonferenza del piano coordinato xy di centro $(1, 0, 0)$ e raggio 1. Segue

$$(x(t) - 1)^2 + y(t)^2 = (1 + \cos t - 1)^2 + \sin^2 t = 1,$$

quindi γ è tracciata su $\mathcal{C}$, ovvero è l'intersezione di tali superfici. Alcune perplessità su come viene tracciata la curva nel testo citato. In fig. 1 riportiamo la pagina dello svolgimento, mentre in fig. 2 è riportata la curva tracciata con *Mathematica*, da cui vediamo che somiglia a una "curva a otto" sulla sfera. Ne consegue l'esistenza di punti multipli, dovuta alla non iniettività dell'applicazione $x(t)$. Ad esempio, il punto $(2, 0, 0)$ è individuato dai valori del parametro $t = 0, \pm 2\pi$.

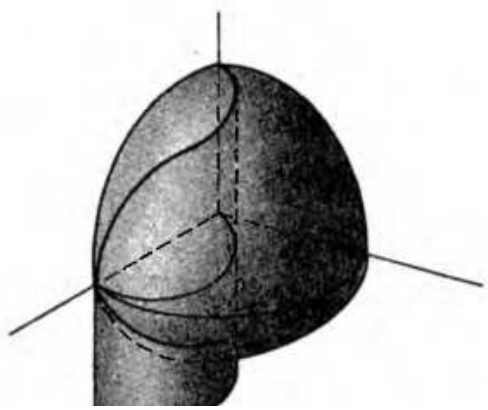

Figura 1: Esercizio 1.

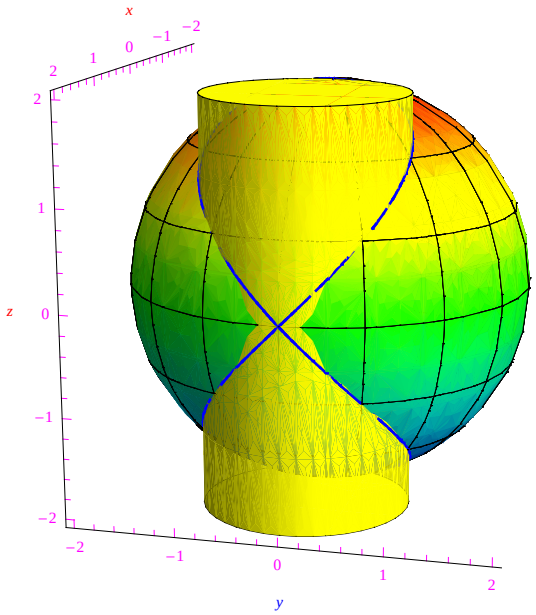

Figura 2: Esercizio 1.

Riferimenti bibliografici

[1] Lipschutz 1994. *Differentia Geometry*. Schaum's

[2] Fasano A., Marmi S. 1994. *Meccanica analitica*. Boringhieri