

Verifica del teorema di Stokes

Marcello Colozzo – <http://www.extrabyte.info>

Esercizio 1 (Il testo è tratto da [1]. La soluzione è nostra)

Si consideri l'integrale curvilineo

$$\oint_{+\gamma} [a(y^3 + z^3) dx + b(x^3 + z^2) dy + c(x^3 + y^3) dz] \quad (1)$$

ove γ è la poligonale semplice e chiusa $OABCDEO$, disegnata in fig. 1, con il verso positivo ivi indicato.

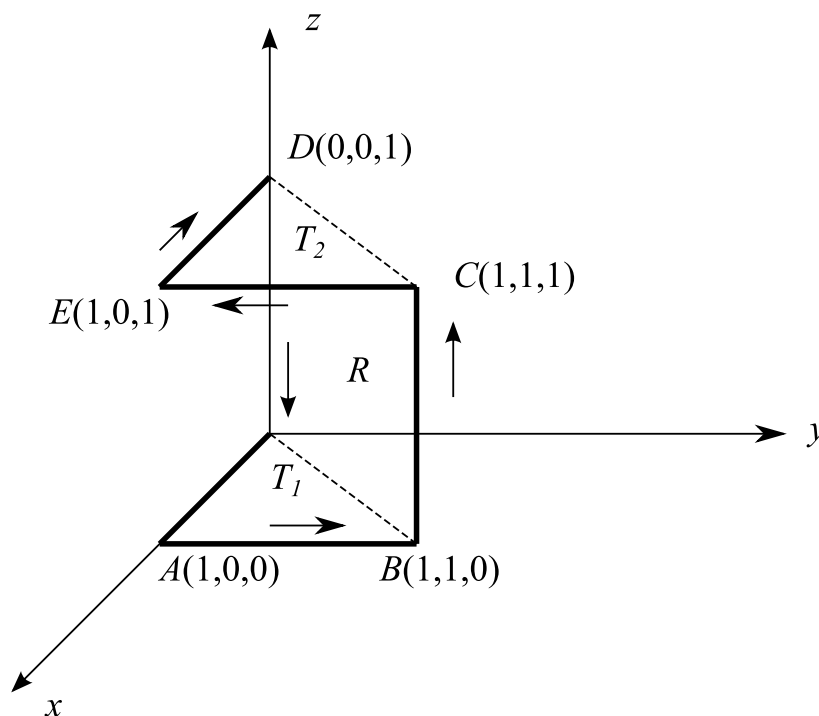


Figura 1: Esercizio 1.

Si trasformi l'integrale curvilineo assegnato in un integrale di superficie esteso alla superficie $S = T_1 \cup R \cup T_2$, essendo T_1, T_2, R rispettivamente i triangoli e il rettangolo rappresentati in fig. 1. Si calcolino poi i due integrali, verificando il teorema di Stokes.

Soluzione

È chiaro che la poligonale γ è il bordo della superficie aperta S , cioè $\gamma = \partial(S)$. Per essere più precisi, S è una superficie aperta generalmente regolare avente per bordo la curva semplice, chiusa e generalmente regolare γ . Inoltre, su γ è assegnato il verso positivo (fig. 1). Come è noto, il verso positivo sul bordo di S determina univocamente la pagina positiva ($+S$). Infatti, un osservatore che percorre γ nel verso positivo spostandosi su $+S$, deve lasciare – secondo una nota regola – alla sua sinistra i punti interni di S . Ne conseguono le seguenti orientazioni per la superficie S , determinate dai versori normali alla superficie medesima:

$$\begin{aligned} +T_1 : \mathbf{n} &= \mathbf{k} \\ +R : \mathbf{n} &= n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j}, \quad \text{con } n_x > 0, n_y < 0 \\ +T_2 : \mathbf{n} &= -\mathbf{k} \end{aligned} \quad (2)$$

Per il teorema di Stokes

$$\int_{+S} \text{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \oint_{+B(S)} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau} ds$$

Nel nostro caso

$$\oint_{+B(S)} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau} ds = \oint_{+\gamma} [a(y^3 + z^3) dx + b(x^3 + z^2) dy + c(x^3 + y^3) dz],$$

onde il campo vettoriale $\mathbf{u}(x, y, z)$ è

$$\mathbf{u}(x, y, z) = a(y^3 + z^3) \mathbf{i} + b(x^3 + z^2) \mathbf{j} + c(x^3 + y^3) \mathbf{k} \quad (3)$$

Quindi

$$\begin{aligned} \text{rot} \mathbf{u} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a(y^3 + z^3) & b(x^3 + z^2) & c(x^3 + y^3) \end{vmatrix} \\ &= 3[(cy^2 - bz^2) \mathbf{i} + (az^2 - cx^2) \mathbf{j} + (cx^2 - ay^2) \mathbf{j}] \end{aligned} \quad (4)$$

Pertanto l'integrale curvilineo si trasforma nel seguente integrale di superficie:

$$\int_{+S} \{3[(cy^2 - bz^2) \mathbf{i} + (az^2 - cx^2) \mathbf{j} + (cx^2 - ay^2) \mathbf{j}]\} \cdot \mathbf{n} d\sigma \quad (5)$$

Per rispondere al secondo quesito, iniziamo a valutare l'integrale appena scritto, procedendo per decomposizione:

$$\int_{+S} \text{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \sum_{k=1}^3 I_k,$$

essendo

$$\begin{aligned} I_k &= \int_{+T_k} \text{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\sigma, \quad k = 1, 2 \\ I_3 &= \int_{+R} \text{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\sigma \end{aligned} \quad (6)$$

Siccome la pagina positiva della superficie T_1 è individuata dal versore normale $\mathbf{n} = \mathbf{k}$, si ha:

$$I_1 = 3 \int_{+T_1} (bx^2 - ay^2) dx dy,$$

giacché $d\sigma = dx dy$. D'altra parte

$$T_1 = \{(x, y) \in R^2 \mid 0 \leq y \leq x, \quad 0 \leq x \leq 1\},$$

per cui:

$$\begin{aligned} I_1 &= 3 \iint_{T_1} (bx^2 - ay^2) dx dy = 3 \int_0^1 dx \int_0^x dy (bx^2 - ay^2) \\ &= 3 \int_0^1 dx \left(bx^2 \int_0^x dy - a \int_0^x y^2 dy \right) \\ &= 3 \int_0^1 \left(bx^3 - \frac{a}{3} x^3 \right) dx \end{aligned}$$

Cioè

$$I_1 = \frac{1}{4}(3b - a) \quad (7)$$

Siccome la pagina positiva della superficie T_2 è individuata dal versore normale $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$, si ha:

$$I_2 = 3 \int_{+T_1} (ay^2 - bx^2) dx dy,$$

giacché $dx dy$. Tale integrale si trasforma nell'integrale doppio

$$I_2 = 3 \iint_{T_2} (ay^2 - bx^2) dx dy$$

Qui è

$$T_2 = \{(x, y) \in R^2 \mid 0 \leq y \leq x, \quad 0 \leq x \leq 1\},$$

da cui

$$\begin{aligned} I_2 &= 3 \int_0^1 dx \int_0^x dy (ay^2 - bx^2) \\ &= 3 \int_0^1 dx \left(a \int_0^x y^2 dy - bx^2 \int_0^x dy \right) \\ &= 3 \int_0^1 \left(\frac{a}{3} x^3 - bx^3 \right) dx \end{aligned}$$

Cioè

$$I_2 = \frac{1}{4}(a - 3b) = -I_1$$

Perciò

$$\int_{+S} \text{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\sigma = I_3$$

Per calcolare quest'ultimo integrale, osserviamo che R è contenuto nel piano di equazione $x - y = 0$, parametricamente rappresentato da

$$x = u, \quad y = u, \quad z = v, \quad (u, v) \in B = [0, 1] \times [0, 1]$$

La matrice jacobiana della rappresentazione è

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

i cui minori estratti presi con segno alterno, compongono i numeri direttori di una delle due normali (ciascuna di verso opposto all'altra):

$$L = 1, \quad M = -1, \quad N = 0$$

Ciò implica che i corrispondenti versori sono

$$\mathbf{n}_{\pm} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{i} - \mathbf{j})$$

Per l'orientamento indotto su S dall'orientamento di $B(S)$, segue che dobbiamo prendere il segno superiore, cosicché per la superficie R la pagina positiva ($+R$) è determinata da $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{i} - \mathbf{j})$. Quindi per il terzo integrale

$$\text{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \frac{3}{\sqrt{2}} [c(x^2 + y^2) - (a + b)z^2]$$

L'elemento d'area è

$$d\sigma = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2} du dv = \sqrt{2} du dv$$

Segue

$$\begin{aligned} I_3 &= 3 \iint_B [c(u^2 + v^2) - (a + b)v^2] du dv \\ &= 3 \int_0^1 du \int_0^1 dv [2cu^2 - (a + b)v^2] \\ &= 3 \int_0^1 du v \left[2cu^2 - \frac{1}{3}(a + b) \right] \\ &= 2c - a - b \end{aligned}$$

Cioè

$$\int_{+S} \text{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\sigma = 2c - a - b \quad (8)$$

Passiamo al calcolo dell'integrale curvilineo. Procedendo per decomposizione:

$$\oint_{+\gamma} [a(y^3 + z^3) dx + b(x^3 + z^2) dy + c(x^3 + y^3) dz] = \sum_{k=1}^6 J_k,$$

dove

$$J_k = \int_{\gamma_k} [a(y^3 + z^3) dx + b(x^3 + z^2) dy + c(x^3 + y^3) dz],$$

essendo

$$\begin{aligned} \gamma_1 &: \text{segmento } \overline{OA} : x = t, y = 0, z = 0, & 0 \leq t \leq 1 \\ \gamma_2 &: \text{segmento } \overline{AB} : x = 1, y = t, z = 0, & 0 \leq t \leq 1 \\ \gamma_3 &: \text{segmento } \overline{BC} : x = 1, y = 1, z = t, & 0 \leq t \leq 1 \\ \gamma_4 &: \text{segmento } \overline{CD} : x = 1, y = t, z = 1, & 1 \geq t \geq 0 \\ \gamma_5 &: \text{segmento } \overline{DE} : x = t, y = 0, z = 1, & 1 \geq t \geq 0 \\ \gamma_6 &: \text{segmento } \overline{EO} : x = 0, y = 0, z = t, & 1 \geq t \geq 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Calcoliamo rapidamente

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^1 a(0 + 0) dt = 0 \\ J_2 &= \int_0^1 [0 + b(1 + 0) dt] = b \int_0^1 dt = b \\ J_3 &= \int_0^1 [0 + 0 + c(1 + 1) dt] = 2c \\ J_4 &= \int_1^0 [0 + b(1 + 1) dt + 0] = -2b \\ J_5 &= \int_1^0 [a(0 + 1) dt + 0] = -a \\ J_6 &= \int_1^0 c(0 + 0) dt = 0 \end{aligned}$$

Conclusione

$$\oint_{+\gamma} [a (y^3 + z^3) dx + b (x^3 + z^2) dy + c (x^3 + y^3) dz] = 2c - a - b,$$

in accordo con il risultato (8).

Riferimenti bibliografici

- [1] Ghizzetti A. *Lezioni di Analisi matematica, vol. II*. Veschi, 1978.
- [2] Fiorenza R. Greco D. *Lezioni di Analisi matematica. Vol. II*. Liguori, 2004.
- [3] Demidovic B. P. *Esercizi e problemi di analisi matematica*. Editori Riuniti
- [4] Smirnov V.I. *Corso di Matematica superiore, vol. II*. Editori Riuniti, 1991.
- [5] Spiegel M.R. *Analisi Matematica*. Schuam, 1991.