Trovare:{

a) l'espressione dell'energia interna di un gas avente la seguente composizione volumetrica:

$O_2 = 12{,}1\%$ - $N_2 = 67{,}3\%$ - $CO_2 = 10{,}0\%$ - $H_2O = 10{,}6\%$

b) le costanti dell'equazione $u = at + bt^2$

c) le equazioni che esprimono le leggi di variazione di c_p e di c_v tenendo pure conto della variazione del calore specifico con la temperatura

Soluzione

Siano:

$\gamma_0 =$ densità della miscela a 0°C e a 760 torr = 101,325 kPa

$c_v^* =$ calore specifico a volume costante della miscela a qualunque temperatura

x_i , μ_i , c_{v_i} = % volumetriche, masse molecolari, calori specifici a volume costante

Ricordiamo che 1 $kmol$ di gas occupa a °C e a 760 torr = 101,325 kPa: $22{,}4\ m^3$

(1) $$\sum_1^4 \frac{x_i \mu_i c_{v_i}}{22{,}4} = \gamma_0 c_v^*$$

(2) $$\mu_i c_{v_i} = \mu_i c_{p_i} - \mu_i R_i = \mu_i c_{p_i} - R_u$$ Dunque la (1) diventa:

(3) $$\gamma_0 c_v^* = \frac{1}{22{,}4}\left[x_i \left(\mu_i c_{p_i} - R_u \right) \right] = \frac{1}{22{,}4}\left[\sum_1^4 x_i \mu_i c_{p_i} - R_u \sum_1^4 x_i \right] \quad \Rightarrow \quad \sum_1^4 x_i = 1$$ si ottiene

(4) $$\gamma_0 c_v^* = \frac{1}{22{,}4}\left[\sum_1^4 x_i \mu_i c_{p_i} - R_u \right]$$

Quello che si è detto per c_v^* vale anche per qualsiasi c_{vm}^* in un qualunque intervallo di temperatura.

Consideriamo le seguenti temperature:

(5) 0, 200, 400, 600, 800, 1000, 1200, 1400, 01600, 1800, 2000.

(6) $$\gamma_0 = \sum_1^4 x_i \gamma_i = \sum_1^4 x_i \frac{p}{R_u T} \mu_i = \frac{p}{R_u T} \sum_1^4 x_i \mu_i =$$

$$= \frac{101325}{8315 * 273}\left(0{,}121*32 + 0{,}673*28 + 0{,}10*44 + 0{,}106*18\right) = 1{,}296\ kg/m^3$$

Dalle tabelle che danno i valori di $\mu\left[c_{p_m}\right]_0^t$ si ottiene:

(7) $$\left[c_{v_m}\right]_0^{200} = \frac{1}{22{,}4*1{,}296}\left(0{,}121*6{,}97 + 0{,}673*6{,}97 + 0{,}10*9{,}43 + 0{,}106*8{,}09 - \frac{8315}{1000}\right) = 0{,}678\ kJ/kg°C$$

Per convenzione si pone l'energia interna, a 0°C e a 760 torr, $u_0 = 0$

Si veda la tabella seguente.

b) L'equazione $u = at + bt^2$ rappresenta l'equazione di una parabola. Però l'andamento dell'energia interna u(t) in realtà non è parabolico. Per ricavare a e b basta risolvere un sistema del tipo: $\begin{cases} u_{t_1} = at_1 + bt_1^2 \\ u_{t_2} = at_2 + bt_2^2 \end{cases}$

Proprio perché l'andamento della funzione non è parabolico, i coefficienti a e b variano con la temperatura; occorre quindi, per avere valori più approssimati di a e b, fissare diversi valori delle coppie t_1, t_2 e calcolare i corrispondenti valori di a e b e prendere la media dei valori trovati. Perciò:

	calore specifico a volume costante Cvm	energia interna per kg di miscela u
°C	kJ/(kg°C)	kJ/kg
200	0,678	136
400	0,695	278
600	0,711	427
800	0,725	580
1000	0,745	745
1200	0,761	914
1400	0,778	1090
1600	0,794	1270
1800	0,808	1454
2000	0,822	1644

$$\begin{cases} u_{1000} = 745 = a*1000 + b*1000^2 \\ u_{2000} = 1644 = a*2000 + b*2000^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0,6703 \\ b = 7,53*10^{-5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{800} = 580 = a*800 + b*800^2 \\ u_{1600} = 1270 = a*1600 + b*1600^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0,6745 \\ b = 8,16*10^{-5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{600} = 427 = a*600 + b*600^2 \\ u_{1200} = 914 = a*1200 + b*1200^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0,6745 \\ b = 7,45*10^{-5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{200} = 136 = a*200 + b*200^2 \\ u_{1400} = 1090 = a*1400 + b*1400^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0,6791 \\ b = 7,70*10^{-5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \left(0,6703 + 0,6745 + 0,6745 + 0,6791\right)/4 = 0,6746 \\ b = \left(7,53 + 8,16 + 7,45 + 7,70\right)*10^{-5}/4 = 7,71*10^{-4} \end{cases}$$

c) Per scrivere l'equazione esprimente il c_{v_m} della miscela in funzione della temperatura basta notare che

(8) $$du = c_v^* dt \qquad \Rightarrow \qquad c_v^* = \frac{du}{dt} = a + 2bt = 0,6746 + 1,542 * 10^{-3} t$$

(9) $$c_p^* = c_v^* + R^* \qquad \Rightarrow \qquad c_p^* = 0,6746 + 1,542 * 10^{-3} t + \frac{8,315}{\sum_1^4 \mu_i x_i}$$

(10) $$\frac{8,315}{0,121*32 + 0,673*28 + 0,10*44 + 0,106*18} = \frac{8,315}{29,024} = 0,2865$$

(11) $$c_p^* = 0,6746 + 1,542 * 10^{-3} t + 0,2865 = 0,9611 + 1,542 * 10^{-3} t$$