INTEGRALI GENERALIZZATI

Marcello Colozzo http://www.extrabyte.info

Esercizio 26

Studiare il seguente integrale generalizzato:

$$\boxed{I_n = \int_0^1 \frac{dx}{x(\ln x)^n},} \tag{1}$$

dove $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

***

Svolgimento

La funzione integranda

$$f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^n} \tag{2}$$

non è definita negli estremi di integrazione, per cui calcoliamo il limite in tali punti.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{1}{0\cdot\infty}$$

Per rimuovere la forma indeterminata eseguiamo il cambio di variabile:

$$t = \ln x, \tag{3}$$

onde

$$x = e^t$$

e

$$x \to 0^+ \Longrightarrow t \to -\infty$$

Quindi il limite diventa

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x(\ln x)^n} = \lim_{t\to-\infty} \frac{1}{t^n e^t} = \lim_{t\to-\infty} \frac{e^{-t}}{t^n} = \pm\infty, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

giacchè il numeratore è un infinito di ordine infinitamente grande. Più precisamente:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x(\ln x)^n} = \begin{cases} +\infty, & \text{se } n \text{ è pari} \\ -\infty, & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases} \tag{4}$$

La funzione integranda è dunque infinita in $x = 0$. Proviamo a determinare l'ordine di infinito (rispetto all'infinito di riferimento: $u(x) = \frac{1}{x}$):

$$\ell = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{[u(x)]^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha}{x(\ln x)^n} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{1-\alpha}(\ln x)^n} \tag{5}$$

Eseguendo il cambio di variabile (3):

$$\ell = \lim_{t\to-\infty} \frac{e^{(\alpha-1)t}}{t^n} = \begin{cases} 0, & \text{se } \alpha \geq 1 \\ \pm\infty, & \text{se } 0 < \alpha < 1 \end{cases} \tag{6}$$

Ne consegue che per $x \to 0^+$ la funzione integranda è un infinito di ordine minore di un qualunque $\alpha \geq 1$, ma maggiore di un qualunque $\alpha < 1$. Cioè, $f(x)$ è in $x = 0$ un infinito di ordine indeterminato. Passiamo a $x = 1$ in cui l'infinito di riferimento è $v(x) = \frac{1}{1-x}$. Perciò dobbiamo studiare il comportamento del seguente limite al variare di $\beta > 0$:

$$\ell' = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x)}{[v(x)]^\beta} = \lim_{x \to 1^-} \frac{(1-x)^\beta}{x(\ln x)^n} \tag{7}$$

Proviamo con $\beta = n$:

$$\begin{aligned} \ell' &= \lim_{x \to 1^-} \frac{(1-x)^n}{x(\ln x)^n} = \underbrace{\left(\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x}\right)}_{=1} \cdot \left[\lim_{x \to 1^-} \frac{(1-x)^n}{(\ln x)^n}\right] \\ &= \lim_{x \to 1^-} \frac{(1-x)^n}{(\ln x)^n} = \frac{0}{0} \stackrel{\text{H}}{=} -\lim_{x \to 1^-} \frac{x(1-x)^{n-1}}{(\ln x)^{n-1}} \\ &= -\underbrace{\left(\lim_{x \to 1^-} x\right)}_{=1} \cdot \left[\lim_{x \to 1^-} \frac{(1-x)^{n-1}}{(\ln x)^{n-1}}\right] \end{aligned} \tag{8}$$

Iterando il procedimento:

$$\ell' = (-1)^n \tag{9}$$

Quindi in $x = 1$ la funzione integranda è un infinito di ordine n. Per ipotesi è $n \geq 1$ onde la funzione non è sommabile in $[0, 1]$. Per verificare l'eventuale integrabilità dobbiamo studiarne il segno. A tale scopo consideriamo i due casi distinti:

1. n pari.

2. n dispari.

Per n pari:

$$f(x) > 0, \quad \forall x \in (0, 1),$$

per cui avendo segno costante, f risulta integrabile. Precisamente:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x(\ln x)^n} = +\infty \tag{10}$$

Se, invece, n è dispari:

$$f(x) < 0, \quad \forall x \in (0, 1),$$

onde:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x(\ln x)^n} = -\infty \tag{11}$$

Conclusione:

$$\left|\int_0^1 \frac{dx}{x(\ln x)^n}\right| = +\infty, \qquad \forall n \in \mathbb{N} - \{0\} \tag{12}$$