INTEGRALI GENERALIZZATI

Marcello Colozzo http://www.extrabyte.info

Rammentiamo alcuni criteri di sommabilità:

Criterio 1 *Se $x_0 \in [a,b]$ è un punto di discontinuità di seconda specie per f, e la funzione verifica la limitazione:*

$$|f(x)| \leq \frac{M}{|x-x_0|^\alpha}, \qquad (0<\alpha<1, \quad M>0), \tag{1}$$

f è sommabile in $[a,b]$. Viceversa, se

$$|f(x)| \geq \frac{M}{|x-x_0|^\alpha}, \qquad (\alpha \geq 1, \quad M>0), \tag{2}$$

f non è sommabile in $[a,b]$.

Criterio 2 *Se in $x_0 \in [a,b]$ la funzione f è un infinito di ordine α (rispetto all'infinito di riferimento $u(x) = \frac{1}{|x-x_0|}$):*

$$\begin{aligned} \alpha < 1 &\Longrightarrow f \text{ è sommabile in } [a,b] \\ \alpha \geq 1 &\Longrightarrow f \text{ non è sommabile in } [a,b] \end{aligned} \tag{3}$$

Se f è in x_0 un infinito privo di ordine, si può applicare il seguente criterio:

Criterio 3

$$\begin{aligned} &\exists \alpha \in (0,1) \mid \lim_{x\to x_0} |x-x_0|^\alpha |f(x)| = 0 \Longrightarrow f \text{ è sommabile in } [a,b] \\ &\exists \alpha \geq 1 \mid \lim_{x\to x_0} |x-x_0|^\alpha |f(x)| = +\infty \Longrightarrow f \text{ non è sommabile in } [a,b] \end{aligned} \tag{4}$$

Criterio 4 *Consideriamo ora il caso di una funzione f continua in un intervallo illimitato X.*

Criterio 5 *Se in un intorno di $+\infty$ (o di $-\infty$ se $x \to -\infty$) riesce:*

$$|f(x)| \leq \frac{M}{|x|^\alpha}, \qquad (\alpha > 1, \quad M>0), \tag{5}$$

la funzione f è sommabile in X. Viceversa, se

$$|f(x)| \geq \frac{M}{|x|^\alpha}, \qquad (\alpha \leq 1, \quad M>0), \tag{6}$$

f non è sommabile in X.

Criterio 6 *Assumiamo come infinitesimo di riferimento (per $|x| \to +\infty$) la funzione $u(x) = \frac{1}{|x|}$.*

Se per $|x| \to +\infty$ la funzione f è un infinitesimo di ordine $\alpha > 1$, f è sommabile in X. Viceversa, se $\alpha \leq 1$ la funzione non è sommabile in X.

In altri termini, per la sommabilità in X illimitato è sufficiente che la funzione si annulli all'infinito con sufficiente rapidità. Se per $|x| \to +\infty$ la funzione è un infinitesimo non dotato di ordine, possiamo applicare questo criterio:

Criterio 7

$$\exists \alpha > 1 \mid \lim_{|x| \to +\infty} |x|^{\alpha} |f(x)| = 0 \Longrightarrow f \text{ è sommabile in } X \tag{7}$$
$$\exists \alpha \in (0, 1] \mid \lim_{|x| \to +\infty} |x|^{\alpha} |f(x)| = +\infty \Longrightarrow f \text{ non è sommabile in } X$$

Esercizio 8 *Studiare il seguente integrale generalizzato:*

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx \tag{8}$$

Svolgimento
La funzione integranda è quella dell'esercizio precedente:

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

che è continua in $[1, +\infty)$, onde dobbiamo studiarne il comportamento per $x \to +\infty$. Abbiamo

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0,$$

in quanto $\ln x$ è, per $x \to +\infty$, un infnito di ordine infinitamente piccolo. Inoltre $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [1, +\infty)$, da cui la sua integrabilità:

$$0 < I \leq +\infty \tag{9}$$

Per stabilire la sommabilità applichiamo il criterio 2. A tale scopo proviamo a calcolare l'ordine di infinitesimo (rispetto a $u(x) = \frac{1}{x}$):

$$\ell = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{[u(x)]^{\alpha}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{\ln x}{x}}{\frac{1}{x^{\alpha}}} = \lim_{x \to +\infty} x^{\alpha - 1} \ln x \tag{10}$$

Per $\alpha = 1$ è $\ell = +\infty$, per cui $\frac{\ln x}{x}$ è un infinitesimo di ordine < 1 e quindi l'integrale diverge. Tuttavia, il criterio 2 richiede che la funzione integranda sia un infinitesimo dotato di ordine e di ordine < 1. Mostriamo, invece, che $\frac{\ln x}{x}$ è un infinitesimo di ordine indeterminato. Infatti, per $\alpha < 1$ la (10) si scrive:

$$\ell = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^{1-\alpha}} = \frac{\infty}{\infty} \overset{\text{H}}{=} \frac{1}{1 - \alpha} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^{1-\alpha}} = 0,$$

onde $\frac{\ln x}{x}$ è un infinitesimo di ordine < 1 ma superiore a un qualunque $\alpha < 1$. L'indeterminazione dell'ordine di infinitesimo suggerisce l'utilizzo di un altro criterio. Proviamo con il criterio 5. Si tratta di determinare $M > 0$ e $0 < \beta \leq 1$ tale che

$$\frac{\ln x}{x} \geq \frac{M}{x^{\beta}}, \quad x \in I(+\infty), \tag{11}$$

essendo $I(+\infty)$ un intorno di $+\infty$. Tenendo conto che l'intervallo di integrazione è $[1, +\infty)$ la limitazione precedente si scrive:

$$\frac{\ln x}{x} \geq \frac{M}{x^{\beta}}, \quad x \in (\delta, +\infty),$$

dove $\delta > 1$. Riesce

$$\ln x > \ln \delta, \quad x \in (\delta, +\infty),$$

giacché $\ln x$ è strettamente crescente. Quindi

$$\frac{\ln x}{x} > \frac{1}{x}, \qquad x \in (\delta, +\infty)$$

Siamo così riusciti a trovare $M = 1$ e $\beta = 1$, da cui la non sommabilità di $\frac{\ln x}{x}$. Ne concludiamo che l'integrale diverge:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx = +\infty$$