INTEGRALI GENERALIZZATI

Marcello Colozzo http://www.extrabyte.info

Rammentiamo alcuni criteri di sommabilità:

Criterio 1 *Se $x_0 \in [a,b]$ è un punto di discontinuità di seconda specie per f, e la funzione verifica la limitazione:*

$$|f(x)| \leq \frac{M}{|x-x_0|^\alpha}, \qquad (0<\alpha<1, \quad M>0), \tag{1}$$

f è sommabile in $[a,b]$. Viceversa, se

$$|f(x)| \geq \frac{M}{|x-x_0|^\alpha}, \qquad (\alpha \geq 1, \quad M>0), \tag{2}$$

f non è sommabile in $[a,b]$.

Criterio 2 *Se in $x_0 \in [a,b]$ la funzione f è un infinito di ordine α (rispetto all'infinito di riferimento $u(x) = \frac{1}{|x-x_0|}$):*

$$\begin{aligned} \alpha < 1 &\Longrightarrow f \text{ è sommabile in } [a,b] \\ \alpha \geq 1 &\Longrightarrow f \text{ non è sommabile in } [a,b] \end{aligned} \tag{3}$$

Se f è in x_0 un infinito privo di ordine, si può applicare il seguente criterio:

Criterio 3

$$\begin{aligned} &\exists \alpha \in (0,1) \mid \lim_{x\to x_0} |x-x_0|^\alpha |f(x)| = 0 \Longrightarrow f \text{ è sommabile in } [a,b] \\ &\exists \alpha \geq 1 \mid \lim_{x\to x_0} |x-x_0|^\alpha |f(x)| = +\infty \Longrightarrow f \text{ non è sommabile in } [a,b] \end{aligned} \tag{4}$$

Esercizio 4 *Studiare il seguente integrale generalizzato:*

$$I = \int_0^1 \frac{\ln x}{x} dx \tag{5}$$

Svolgimento

Denotiamo con $f(x)$ la funzione integranda:

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \tag{6}$$

Risulta:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{(-\infty)}{0^+} = -\infty \tag{7}$$

Inoltre, la funzione è non positiva in $(0,1]$, per cui avendo segno costante risulta integrabile in $[0,1]$. Perciò:

$$-\infty \leq I < 0 \tag{8}$$

Per stabilire la sommabilità applichiamo il criterio 2. A tale scopo proviamo a calcolare l'ordine di infinito (rispetto a $u(x) = \frac{1}{x}$):

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{u(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\ln x}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \tag{9}$$

Cioè $\frac{\ln x}{x}$ è un infinito di ordine > 1, per cui applicando il predetto criterio, riesce non sommabile in $[0,1]$. Osserviamo tuttavia, che rale criterio richiede l'esistenza di un ordine di infinito determinato. Mostriamo, invece, che $\frac{\ln x}{x}$ ha un ordine indeterminato (comunque > 1). Scriviamo:

$$\ell = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{[u(x)]^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} x^{\alpha-1}\ln x \tag{10}$$

Per quanto precede se $\alpha < 1$ è $|l| = +\infty$, poiché $f(x)$ è un infinito di ordine > 1. Vediamo il caso $\alpha > 1$:

$$\begin{aligned}\ell &= \lim_{x\to 0^+} x^{\alpha-1}\ln x = 0\cdot\infty = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^{1-\alpha}} \\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^{-(\alpha-1)}} = \frac{\infty}{\infty} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{(1-\alpha)\,x^{-\alpha}} \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha-1} = 0, \quad \forall\alpha > 1\end{aligned} \tag{11}$$

Il risultato (11) implica che $\frac{\ln x}{x}$ è, per $x\to 0^+$, un infinito di ordine > 1 ma inferiore a un qualunque $\alpha > 1$. Ne consegue che l'infinito $\frac{\ln x}{x}$ non ha un ordine determinato. Applichiamo dunque il criterio 1. Si tratta di trovare $\beta \geq 1$ e $M > 0$ tali che

$$\left|\frac{\ln x}{x}\right| = \frac{|\ln x|}{x} \geq \frac{M}{x^\beta}, \quad \forall x\in(0,\delta] \quad \text{con } 0<\delta\leq 1 \tag{12}$$

D'altra parte:

$$0<\delta\leq 1 \Longrightarrow 0 < \ln\left(\frac{1}{\delta}\right) = -\ln\delta = |\ln\delta|$$

Segue

$$x\in(0,\delta] \Longrightarrow |\ln x| \geq \ln\left(\frac{1}{\delta}\right) > 0,$$

giacché $|\ln x|$ è strettamente decrescente in $(0,\delta]$. Quindi

$$x\in(0,\delta] \quad \text{con } 0<\delta\leq 1 \Longrightarrow \left|\frac{\ln x}{x}\right| = \frac{|\ln x|}{x} \geq \frac{\ln\left(\frac{1}{\delta}\right)}{x}$$

Cioè $M = \ln\left(\frac{1}{\delta}\right) > 0$ e $\beta = 1$, per cui $\frac{\ln x}{x}$ non è sommabile in $[0,1]$:

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x}dx = -\infty$$

Il grafico di fig. 1 consente una visualizzazione dei vari passaggi.

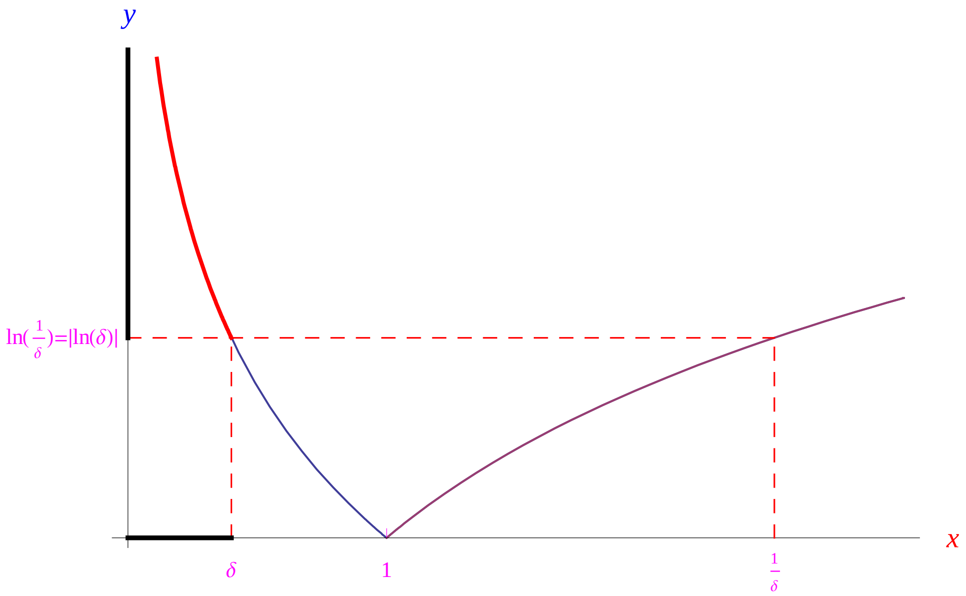

Figura 1: Grafici di $|\ln x|$ e $\ln x$, da cui vediamo che $|\ln x| \geq \ln\left(\frac{1}{\delta}\right)$, comunque prendiamo δ tale che $0 < \delta \leq 1$.