Esercizio sugli integrali generalizzati

Marcello Colozzo – http://www.extrabyte.info

Esercizio 1 *Verificare:*

$$\int_{-a}^{a} \frac{\sinh x \cos x}{\sqrt{a^4 - x^4}} dx = 0, \qquad \forall a > 0 \tag{1}$$

Svolgimento

Si tratta di un integrale generalizzato, poiché la funzione integranda è infinita agli estremi di integrazione. Poniamo:

$$f(x) = \frac{\sinh x \cos x}{\sqrt{a^4 - x^4}},$$

che è manifestamente dispari, per cui possiamo limitarci all'intervallo $[0, 1]$ per ciò che riguarda il comportamento di f in un intorno destro di $x = a$. Abbiamo

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{se } \cos a > 0 \\ -\infty, & \text{se } \cos a < 0 \end{cases} \tag{2}$$

In virtù della suddetta parità (-1)

$$\lim_{x \to -a^+} f(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{se } \cos a < 0 \\ -\infty, & \text{se } \cos a > 0 \end{cases} \tag{3}$$

Determiniamo l'ordine di infinito in $x = a$, rispetto all'infinito di riferimento $u(x) = \frac{1}{a-x}$:

$$\begin{aligned} \ell &= \lim_{x \to a^-} \frac{f(x)}{[u(x)]^\alpha} = \lim_{x \to a^-} \frac{(a-x)^\alpha \sinh x \cos x}{\sqrt{(a-x)(a+x)(a^2+x^2)}} \\ &= \sinh a \cos a \cdot \lim_{x \to a^-} \sqrt{\frac{(a-x)^{2\alpha-1}}{(a+x)(a^2+x^2)}}, \end{aligned}$$

per cui

$$\ell \in \mathbb{R} - \{0\} \Longleftrightarrow 2\alpha - 1 = 0 \Longleftrightarrow \alpha = \frac{1}{2} \tag{4}$$

Siccome la funzione è dispari si ha che per $x \to -a^+$ è di infinita di ordine $1/2$. Ne consegue che tale funzione è sommabile in $[-1, 1]$. Procediamo per decomposizione:

$$I = I_1 + I_2, \tag{5}$$

dove

$$I_1 = \int_{-a}^{0} \frac{\sinh x \cos x}{\sqrt{a^4 - x^4}} dx, \quad I_2 = \int_{0}^{a} \frac{\sinh x \cos x}{\sqrt{a^4 - x^4}} dx \tag{6}$$

Nell'integrale I_1 eseguiamo il cambio di variabile $x = -t$, per cui $dx = -dt$, mentre gli estremi di integrazione cambiano in:

$$-a \leq x = -t \leq 0 \Longrightarrow a \geq t \geq 0$$

Ciò implica

$$I_1 = -\int_{a}^{0} \frac{(-\sinh t) \cos t}{\sqrt{a^4 - t^4}} dt = -\int_{0}^{a} \frac{\sinh t \cos t}{\sqrt{a^4 - t^4}} dt = -I_2,$$

da cui $I = 0, \ \forall a > 0$.