

Esercizio 1 *Studiare la sommabilità di*

$$f(x) = \frac{1}{e^x - 1} \quad (1)$$

in $[0, 1]$.

Svolgimento

La funzione assegnata è infinita in $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^x - 1} = +\infty$$

Proviamo a determinare l'ordine di infinito, assumendo come infinito campione la funzione

$$u(x) = \frac{1}{x}$$

Poniamo

$$\ell = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{[u(x)]^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^\alpha}{e^x - 1} = \frac{0}{0} \stackrel{\text{H}}{=} \alpha \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{\alpha-1}}{e^x},$$

onde

$$\ell \in \mathbb{R} - \{0\} \iff \alpha = 1$$

Si tratta dunque di un infinito di ordine 1, per cui la funzione non è sommabile in $[0, 1]$. Riesce però integrabile, giacché è $f(x) > 0$, per cui

$$\int_0^1 \frac{dx}{e^x - 1} = +\infty \quad (2)$$