Calcolo di un integrale curvilineo

Marcello Colozzo – http://www.extrabyte.info

Calcolare

$$I = \int_{\gamma(P,Q)} \sqrt{x^2+y^2}ds, \tag{1}$$

dove $\gamma(P,Q)$ è parametricamente rappresentato da

$$\gamma(P,Q): x(t) = R(\cos t + t\sin t), \; y(t) = R(\sin t - t\cos t), \quad t \in [0, 2\pi], \tag{2}$$

da cui vediamo che è l'evolvente della circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio R. (cfr fig. 1)

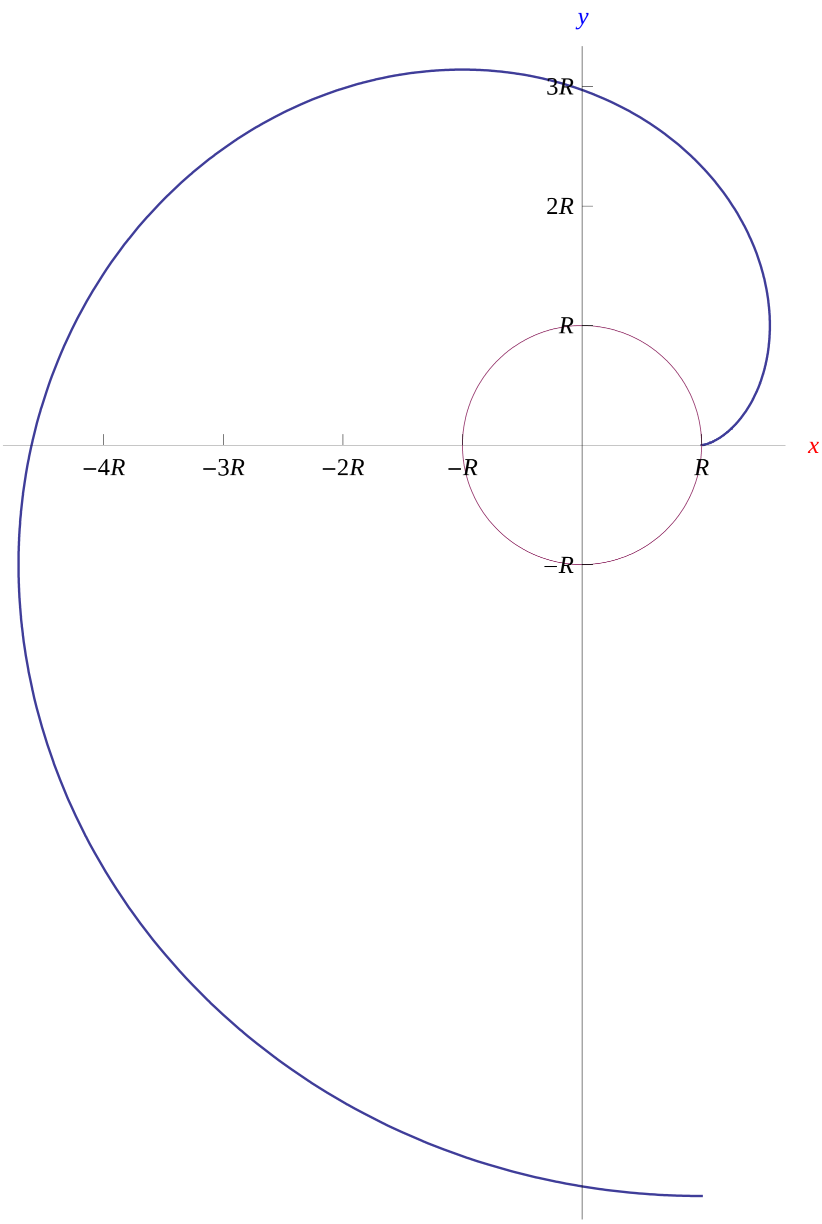

Figura 1: Cammino di integrazione relativo all'integrale (1).

Soluzione

Abbiamo

$$P \text{ corrisponde a } t = 0 \\ Q \text{ corrisponde a } t = 2\pi \tag{3}$$

Al solito, calcoliamo la funzione $H(t)$ (che *Mathematica* chiama ArcLenghtFactor):

$$H(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2},$$

calcolando prima le derivate.

$$x'(t) = Rt\cos t, \quad y'(t) = Rt\sin t,$$

onde

$$H(t) = Rt \tag{4}$$

Il verso di percorrenza (da P a Q) è quello delle t crescenti, per cui introducendo un riferimento curvilineo con origine in P e s contata positivamente da P a Q, si ha che $s(t)$ è strettamente crescente:

$$ds = H(t)\,dt = Rtdt \tag{5}$$

Integrando:

$$s(t) = R\int_0^t \tau d\tau = \frac{R}{2}t^2 \tag{6}$$

Quindi

$$\begin{aligned}\int_{\gamma(P,Q)} \sqrt{x^2+y^2}ds &= \int_0^{2\pi} \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} H(t)\,dt \\ &= R^{3/2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1+t^2}tdt \\ &= \frac{R^{3/2}}{2}\int_0^{2\pi} \left(1+t^2\right)^{1/2} d\left(1+t^2\right) \\ &= \frac{R^{3/2}}{3}\left(1+t^2\right)\Big|_{t=0}^{t=2\pi}\end{aligned}$$

Cioè

$$\int_{\gamma(P,Q)} \sqrt{x^2+y^2}ds = \frac{R^{3/2}}{3}\left[\left(1+4\pi^2\right)^{3/2} - 1\right] \tag{7}$$