Integrazione di forme differenziali lineari

Marcello Colozzo – http://www.extrabyte.info

Calcolare

$$\boxed{I = \oint_{\gamma} 3xy^2 dx + y dy,} \tag{1}$$

dove

$$\gamma = \bigcup_{k=1}^{3} \gamma_k, \tag{2}$$

con

$$\begin{aligned} &\gamma_1 : x = t,\ y = \sqrt{4 - t^2}, \quad 0 \leq t \leq 2 \\ &\gamma_2 : x = 2,\ y = t, \quad 0 \leq t \leq 2 \\ &\gamma_3 : x = t,\ y = 2, \quad 2 \geq t \geq 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Soluzione

Il cammino di integrazione è illustrato in fig. 1.

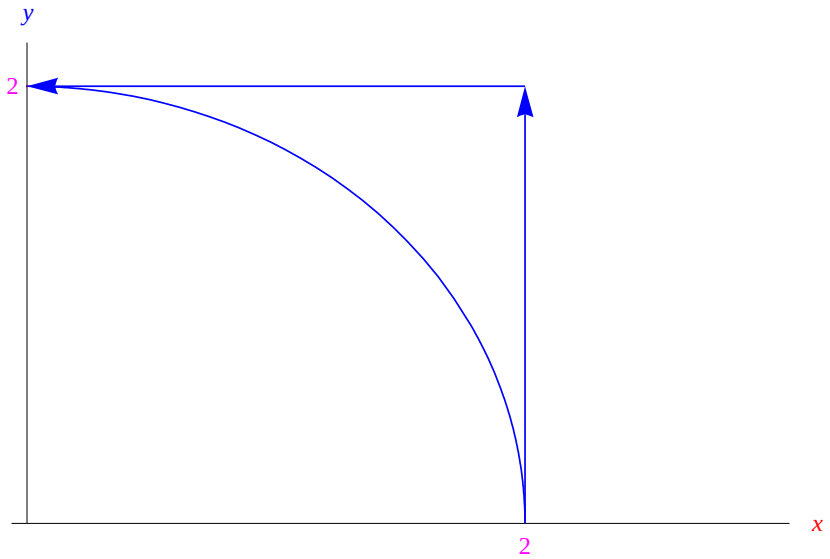

Figura 1: Cammino di integrazione relativo all'integrale (1).

Poniamo:

$$X(x, y) = 3xy^2,\ Y(x, y) = y \tag{4}$$

Dal momento che $\frac{\partial X}{\partial y} \neq \frac{\partial Y}{\partial x}$ la forma differenziale nell'integrando non è un differenziale esatto, per cui ci aspettiamo un risultato $\neq 0$. Risulta:

$$I = \sum_{k=1}^{3} I_k, \tag{5}$$

dove

$$I_k = \int_{\gamma_k} X dx + Y dy \tag{6}$$

Calcoliamo I_1, determinando prima i vari termini nell'integrando:

$$X(t)\,dx = 2x(t)\,y(t)^2\,dt = 3t^2\left(4-t^2\right)dt = \left(12t-3t^3\right)dt$$
$$Y(t)\,dy = y(t)\,d\left(\sqrt{4-t^2}\right) = \sqrt{4-t^2}\frac{-2tdt}{\sqrt{4-t^2}} = -tdt$$

Quindi:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^2 \left(12t-3t^3-t\right)dt = \int_0^2 \left(11t-3t^3\right)dt \\ &= \frac{11}{2}\,t^2\Big|_0^2 - \frac{3}{4}\,t^4\Big|_0^2 = \frac{11}{2}\cdot 4 - \frac{3}{4}\cdot 16 = 10 \end{aligned} \tag{7}$$

Passiamo ad I_2. In questo caso abbiamo:

$$X(t)\,dx = 0,\;\; Y(t)\,dy = y(t)\,dt = tdt,$$

onde

$$I_2 = \int_0^2 tdt = 2 \tag{8}$$

Per I_3 risulta:

$$X(t)\,dx = 3x(t)\,y(t)^2\,dt = 3t\cdot 4dt = 12tdt,\quad Y(t)\,dy = 0,$$

per cui

$$I_3 = \int_2^0 12tdt = -12\int_0^2 tdt = -24 \tag{9}$$

Finalmente:

$$\oint_\gamma 3xy^2dx + ydy = -12 \tag{10}$$