Integrazione di forme differenziali lineari

Marcello Colozzo – http://www.extrabyte.info

Nel piano xy una particella si muove nel campo di forze:

$$\boxed{\mathbf{F}(x,y) = \left(4x^3 + y^2\right)\mathbf{i} + (x+3)\,\mathbf{k}} \tag{1}$$

dove le varie grandezze sono espresse nelle appropriate unità di misura. Determinare il lavoro eseguito dal campo per spostare la particella da $O(0,0)$ a $P(1,1)$ lungo la curva $y = x^2$.

Soluzione

Le componenti cartesiane del vettore $\mathbf{F}$ sono:

$$X(x,y) = 4x^3 + y^2, \quad Y(x,y) = x+3 \tag{2}$$

Abbiamo

$$\frac{\partial X}{\partial y} = 2y \neq \frac{\partial Y}{\partial x} = 1$$

Cioè il campo non è conservativo, per cui il lavoro va calcolato tramite integrazione lungo la traiettoria:

$$L = \int_{\gamma(O,P)} X\,dx + Y\,dy \tag{3}$$

Una rappresentazione parametrica della traiettoria è:

$$\gamma : x = t, \quad y = t^2, \qquad 0 \leq t \leq 1, \tag{4}$$

da cui

$$x'(t) = 1, \quad y'(t) = 2t$$

Per determinare l'integrale curvilineo è preferibile esprimere in funzione di t i vari termini differenziali:

$$\begin{aligned} X(t)\,dx &= \left[4x(t)^3 + y(t)^3\right]dt = \left(4t^3 + t^4\right)dt \\ Y(t)\,dy &= [x(t)+3]\cdot 2t\,dt = \left(2t^2 + 6t\right)dt, \end{aligned}$$

onde

$$L = \int_0^1 \left(4t^3 + t^4 + 2t^2 + 6t\right)dt = 1 + \frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 3 = \frac{73}{15} \tag{5}$$