

Calcolo di un integrale curvilineo

Marcello Colozzo – <http://www.extrabyte.info>

Calcolare

$$I = \oint_{\gamma} (x + y) ds, \quad (1)$$

dove γ è la curva generalmente regolare semplice e chiusa, rappresentata in fig. 1.

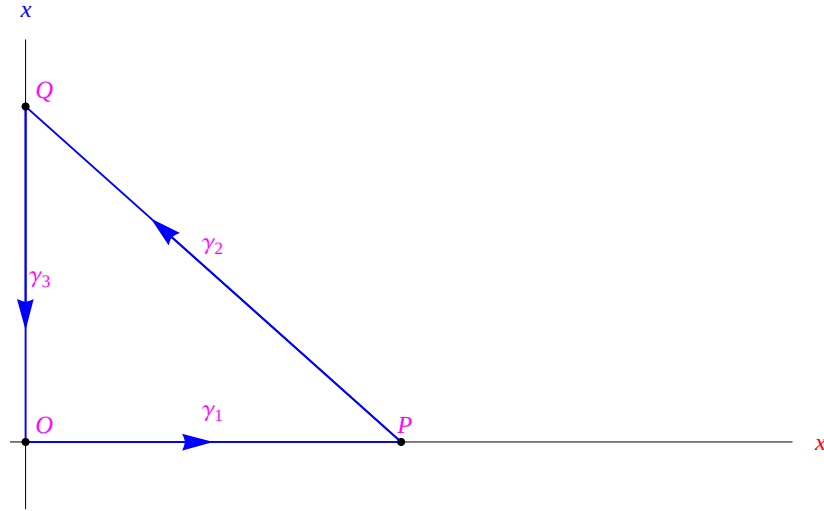


Figura 1: Cammino di integrazione relativo all'integrale (1).

Soluzione

Il cammino di integrazione è la frontiera del dominio;

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq 1\}, \quad (2)$$

onde

$$\gamma = \partial D = \bigcup_{k=1}^3 \gamma_k, \quad (3)$$

dove

$$\begin{aligned} \gamma_1 : x = t, \ y = 0, \quad 0 \leq t \leq 1 \\ \gamma_2 : x = t, \ y = 1 - t, \quad 1 \geq t \geq 0 \\ \gamma_3 : x = 0, \ y = t, \quad 1 \leq t \leq 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Quindi

$$I = \sum_{k=1}^3 I_k, \quad \text{con } I_k = \int_{\gamma_k} (x + y) ds$$

Più precisamente per $k = 1$

$$I_1 = \int_{\gamma_1(O,P)} (x + y) ds = \int_0^1 [x(t) + y(t)] H(t) dt, \quad (5)$$

avendo preso il segno (+) perchè $\gamma_1(0, P)$ è orientata nel verso delle t crescenti. Nella (5) è:

$$x(t) = t, \ y = 0 \implies x'(t) = 1, \ y'(t) = 0 \implies H(t) = 1,$$

per cui

$$I_1 = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}$$

Passiamo all'integrale I_2 :

$$I_2 = \int_{\gamma_2(P,Q)} (x+y) ds = - \int_1^0 [x(t) + y(t)] H(t) dt, \quad (6)$$

avendo preso il segno $(-)$ perchè $\gamma_2(P, Q)$ è orientata nel verso delle t decrescenti. Nella (6) è:

$$x(t) = t, y(t) = 1 - t \implies x'(t) = 1, y'(t) = -1 \implies H(t) = \sqrt{2},$$

per cui

$$I_2 = -\sqrt{2} \int_1^0 dt = \sqrt{2} \int_0^1 dt = \sqrt{2} \quad (7)$$

Passiamo all'integrale I_3 :

$$I_3 = \int_{\gamma_3(Q,0)} (x+y) ds = - \int_1^0 [x(t) + y(t)] H(t) dt, \quad (8)$$

avendo preso il segno $(-)$ perchè $\gamma_3(Q, 0)$ è orientata nel verso delle t decrescenti. Nella (8) è:

$$x(t) = 0, y(t) = t \implies x'(t) = 0, y'(t) = 1 \implies H(t) = 1,$$

per cui

$$I_3 = \int_0^1 dt = \frac{1}{2} \quad (9)$$

In definitiva

$$I = \frac{1}{2} + \sqrt{2} + \frac{1}{2} = 1 + \sqrt{2}$$

Se proviamo ad invertire il verso del cammino di integrazione (fig. 2)

$$\begin{aligned} \gamma_1 : x &= 0, y = t, & 0 \leq t \leq 1 \\ \gamma_2 : x &= t, y = 1 - t, & 0 \geq t \geq 1 \\ \gamma_3 : x &= t, y = 0, & 1 \geq t \geq 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Quindi

$$I_1 = \int_{\gamma_1(0,Q)} (x+y) ds = \int_0^1 [x(t) + y(t)] H(t) dt$$

Qui γ_1 è orientata nel verso delle t crescenti. Inoltre

$$x(t) = 0, y(t) = t \implies x'(t) = 0, y'(t) = 1 \implies H(t) = 1,$$

perciò

$$I_1 = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}$$

Integrale I_2

$$I_2 = \int_{\gamma_2(Q,P)} (x+y) ds = + \int_0^1 [x(t) + y(t)] H(t) dt = \dots = \sqrt{2}$$

Integrale I_3

$$I_3 = \int_{\gamma_3(P,O)} (x+y) ds = - \int_1^0 [x(t) + y(t)] H(t) dt = \dots = \frac{1}{2},$$

per cui riotteniamo il valore precedente.

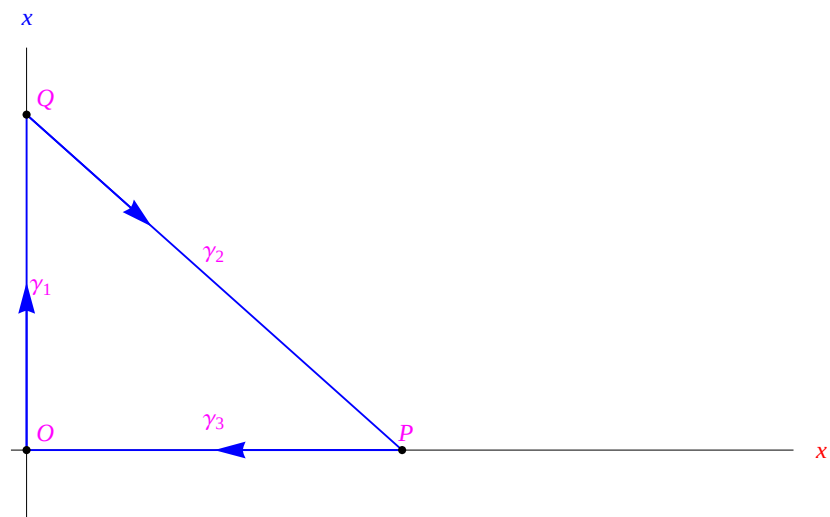


Figura 2: Cammino di integrazione relativo all'integrale (1).