Integrazione di equazioni differenziali lineari. Il metodo di Cauchy

Marcello Colozzo

1 Equazioni differenziali lineari omogenee

Sia data l'equazione differenziale lineare omogenea di ordine n:

$$y^n + \alpha_1(x)\,y^{(n-1)} + \alpha_2(x)\,y^{(n-2)} + ... + \alpha_{n-1}(x)\,y' + \alpha_n(x)\,y = 0, \tag{1}$$

dove $\alpha_1(x),\, \alpha_2(x), ..., \alpha_n(x)$ sono i *coefficienti* della (1). Assumiamo le $\alpha_k(x)$ funzioni continue in un intervallo $X \subseteq \mathbb{R}$. Un'importante proprietà che segue immediatamente dalla linearità di (1) è che una qualunque combinazione lineare di integrali di tale equazione, è ancora un integrale. Cioè, se $y_1(x), y_2(x), ..., y_p(x)$ sono integrali, la combinazione lineare:

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + ... + c_p y_p(x), \quad \forall c_1, c_2, ..., c_p \in \mathbb{R}$$

è un integrale della (1).

Comunque prendiamo n integrali $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$, possiamo associare ad essi il seguente determinante funzionale di ordine n:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & ... & y_{n-1}(x) & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & ... & y_{n-1}'(x) & y_n'(x) \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-2)}(x) & y_2^{(n-2)}(x) & ... & y_{n-1}^{(n-2)}(x) & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & ... & y_{n-1}^{(n-1)}(x) & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \tag{2}$$

Definizione 1 *$W(x)$ è il **wronskiano** degli integrali $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$.*

Sussiste il seguente teorema:

Teorema 2 ***(Teorema di Liouville)***
Presi ad arbitrio n integrali $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ della (1) e un punto $x_0 \in X$, riesce:

$$W(x) = W(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} \alpha_1(t)dt} \tag{3}$$

Dimostrazione. Consultare [1]. ■

Definizione 3 *L'insieme di integrali*

$$\Sigma_n = \{y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)\}, \tag{4}$$

*è un **sistema fondamentale di integrali** della (1) se:*

$$W(x) \neq 0, \quad \forall x \in X,$$

essendo $W(x)$ il wronskiano di $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$.

Teorema 4 *Se* $\Sigma_n = \{y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)\}$ *è un sistema fondamentale di integrali della (1), l'integrale generale della medesima equazione è dato da:*

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + ... + c_n y_n(x), \quad \forall c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{R}$$

Dimostrazione. Consultare [1]. ■

Definizione 5 Σ_n *è **linearmente indipendente** se*

$$\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + ... + \lambda_n y_n(x) = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$$

Teorema 6

$$\left.\begin{array}{c}\Sigma_n \text{ è un sistema fondamentale} \\ \text{di integrali della (1)}\end{array}\right) \Longleftrightarrow \Sigma_n \text{ è linearmente indipendente}$$

Dimostrazione. Consultare [1]. ■

Esempio 7 *Consideriamo l'equazione del second'ordine:*

$$y'' - \frac{2x}{x^2+1}y' + \frac{2}{x^2+1}y = 0 \tag{5}$$

Le funzioni

$$y_1(x) = x, \ \ y_2(x) = x^2 - 1$$

sono integrali particolari della (5). Infatti:

$$y_1'(x) = 1, \ \ y_1''(x) = 0$$

Sostituendo nella (5):

$$0 - \frac{2x}{x^2+1} + \frac{2x}{x^2+1} = 0$$

Passiamo a $y_2(x)$*:*

$$y_2'(x) = 2x, \ \ y_2''(x) = 2$$

Sostituendo nella (5):

$$\begin{aligned} 2 - \frac{2x}{x^2+1}2x + \frac{2x}{x^2+1}\left(x^2-1\right) &= 0 \\ \Longleftrightarrow 2x^2 + 2 - 4x^2 + 2x^2 - 2 &= 0 \\ \Longleftrightarrow 0 &= 0 \end{aligned}$$

Il wronskiano di $\Sigma_2 = \{y_1(x), y_2(x)\} = \{x, x^2-1\}$ *è:*

$$\begin{aligned} W(x) &= \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x & x^2-1 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} \\ &= x^2 + 1 \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

onde Σ_2 *è un sistema fondamentale. Ne consegue che l'integrale generale della (5) è:*

$$y(x) = c_1 x + c_2\left(x^2-1\right), \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

2 Equazioni differenziali lineari non omogenee

Assegnata l'equazione differenziale lineare non omogenea di ordine n:

$$y^n + \alpha_1(x)\, y^{(n-1)} + \alpha_2(x)\, y^{(n-2)} + \ldots + \alpha_{n-1}(x)\, y' + \alpha_n(x)\, y = f(x), \tag{6}$$

l'equazione differenziale omogenea *associata* alla (6) è:

$$y^n + \alpha_1(x)\, y^{(n-1)} + \alpha_2(x)\, y^{(n-2)} + \ldots + \alpha_{n-1}(x)\, y' + \alpha_n(x)\, y = 0 \tag{7}$$

Se $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x)$ è l'integrale generale della (7), per un noto teorema [1], se $y_0(x)$ è un integrale particolare della (6), l'integrale generale della (6) è:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x) + y_0(x) \tag{8}$$

Il problema dell'integrazione di un'equazione differenziale lineare non omogenea si riconduce, quindi, a quello della determinazione di:

1. un sistema fondamentale $\{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$ di integrali dell'equazione omogenea associata;

2. un integrale particolare $y_0(x)$ dell'equazione non omogenea.

Esiste un algoritmo noto come metodo di Cauchy, che permette la determinazione per quadrature di $y_0(x)$ a partire da $\{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$.

2.1 Metodo di Cauchy

Supponiamo di essere riusciti a determinare un sistema fondamentale di integrali $\{y_1(x), y_2(x) \ldots, y_n(x)\}$ della (7), per cui il suo integrale generale è

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x) \tag{9}$$

Consideriamo ora il problema di Cauchy:

$$\mathcal{P}: \begin{cases} y^n + \alpha_1(x)\, y^{(n-1)} + \alpha_2(x)\, y^{(n-2)} + \ldots + \alpha_{n-1}(x)\, y' + \alpha_n(x)\, y = 0 \\ y(\xi) = 0,\ y'(\xi) = 0,\ y''(\xi) = 0 \ldots, y^{(n-2)}(\xi) = 0,\ y^{(n-1)}(\xi) = 1 \end{cases}, \tag{10}$$

dove $\xi \in X$. Per il teorema di esistenza ed unicità [1] il problema (10) ammette una ed una sola soluzione che denotiamo con $\eta(x)$:

$$\begin{cases} \frac{d^n}{dx^n}\eta(x) + \alpha_1(x)\, \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\eta(x) + \alpha_2(x)\, \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\eta(x) + \ldots + \alpha_{n-1}(x)\, \frac{d}{dx}\eta(x) + \alpha_n(x)\, \eta(x) = 0 \\ \eta(\xi) = 0,\ \eta'(\xi) = 0,\ \eta''(\xi) = 0 \ldots, \eta^{(n-2)}(\xi) = 0,\ \eta^{(n-1)}(\xi) = 1 \end{cases} \tag{11}$$

Infatti dalla (9) imponendo le condizioni iniziali (10):

$$\begin{cases} c_1 y_1(\xi) + c_2 y_2(\xi) + \ldots + c_n y_n(\xi) = 0 \\ c_1 y_1'(\xi) + c_2 y_2'(\xi) + \ldots + c_n y_n'(\xi) = 0 \\ \ldots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(\xi) + c_2 y_2^{(n-1)}(\xi) + \ldots + c_n y_n^{(n-1)}(\xi) = 1 \end{cases}, \tag{12}$$

che è un sistema di n equazioni lineari nelle n incognite $c_1, c_2, ..., c_n$. La matrice dei coefficienti del sistema è:

$$A = \begin{pmatrix} y_1(\xi) & y_2(\xi) & ... & y_n(\xi) \\ y_1'(\xi) & y_2'(\xi) & ... & y_n'(\xi) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(\xi) & y_2^{(n-1)}(\xi) & ... & y_n^{(n-1)}(\xi) \end{pmatrix}$$

Riesce:

$$\det A = W(\xi),$$

cioè il wronskiano di $\{y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)\}$ calcolato in $\xi \in X$. Dal momento che per ipotesi $\{y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)\}$ è un sistema fondamentale, si ha $W(\xi) \neq 0$, onde il sistema (12) è compatibile e determinato. La sua unica soluzione si calcola con la regola di Cramer:

$$c_k = \frac{\Delta_k}{W(\xi)}, \quad (k = 1, 2, ..., n) \tag{13}$$

dove Δ_k è il determinante ottenuto da $W(\xi)$ sostituendo la colonna *k-esima* con la colonna dei termini noti di (12). In definitiva:

$$\eta(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + ... + c_n y_n(x), \tag{14}$$

con i coefficienti c_k dati dalle (13). Se ora immaginiamo di far variare ξ nell'intervallo X, si ha $c_k(\xi)$, quindi $\eta(x)$ dipende anche da ξ. Ciò suggerisce di ridefinire $\eta(x)$ nel modo seguente:

$$\eta(x) \stackrel{def}{=} K(x, \xi),$$

dove

$$K(x, \xi) = c_1(\xi) y_1(x) + c_2(\xi) y_2(x) + ... + c_n(\xi) y_n(x), \tag{15}$$

è il *nucleo risolvente* della (6). La sua espressione si ottiene facilmente aggiungendo la (15) al sistema (12) ottenendo il seguente sistema di $n+1$ equazioni in n incognite:

$$\begin{cases} c_1 y_1(\xi) + c_2 y_2(\xi) + ... + c_n y_n(\xi) = 0 \\ c_1 y_1'(\xi) + c_2 y_2'(\xi) + ... + c_n y_n'(\xi) = 0 \\ ... \\ c_1 y_1^{(n-1)}(\xi) + c_2 y_2^{(n-1)}(\xi) + ... + c_n y_n^{(n-1)}(\xi) = 1 \\ c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + ... + c_n y_n(x) = K(x, \xi) \end{cases},$$

la cui la matrice dei coefficienti e dei termini noti è:

$$B = \begin{pmatrix} y_1(\xi) & y_2(\xi) & ... & y_n(\xi) & 0 \\ y_1'(\xi) & y_2'(\xi) & ... & y_n'(\xi) & 0 \\ ... & ... & ... & ... & 0 \\ y_1^{(n-1)}(\xi) & y_2^{(n-1)}(\xi) & ... & y_n^{(n-1)}(\xi) & 1 \\ y_1(x) & y_2(x) & ... & y_n(x) & K(x, \xi) \end{pmatrix}$$

Per il teorema di Rouché–Capelli deve essere $rg(A) = rg(B)$, onde:

$$\det B = 0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} y_1(\xi) & y_2(\xi) & ... & y_n(\xi) & 0 \\ y_1'(\xi) & y_2'(\xi) & ... & y_n'(\xi) & 0 \\ ... & ... & ... & ... & 0 \\ y_1^{(n-1)}(\xi) & y_2^{(n-1)}(\xi) & ... & y_n^{(n-1)}(\xi) & 1 \\ y_1(x) & y_2(x) & ... & y_n(x) & K(x, \xi) \end{vmatrix} = 0$$

Sviluppando tale determinante secondo gli elementi dell'ultima colonna:

$$\begin{vmatrix} y_1(\xi) & y_2(\xi) & \ldots & y_n(\xi) \\ y_1'(\xi) & y_2'(\xi) & \ldots & y_n'(\xi) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-2)}(\xi) & y_2^{(n-2)}(\xi) & \ldots & y_n^{(n-2)}(\xi) \\ y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \end{vmatrix} + \\ -K(x,\xi)W(\xi) = 0,$$

onde

$$K(x,\xi) = \frac{1}{W(\xi)} \begin{vmatrix} y_1(\xi) & y_2(\xi) & \ldots & y_n(\xi) \\ y_1'(\xi) & y_2'(\xi) & \ldots & y_n'(\xi) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-2)}(\xi) & y_2^{(n-2)}(\xi) & \ldots & y_n^{(n-2)}(\xi) \\ y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \end{vmatrix} \tag{16}$$

Si noti che il determinante a secondo membro della (16) si ottiene dal wronskiano sostituendo gli elementi dell'ultima riga con le funzioni $y_1(x), y_2(x), \ldots y_n(x)$.

Sussiste il seguente teorema, per la cui dimostrazione rimandiamo a [1].

Teorema 8 *Assegnato ad arbitrio $x_0 \in X$, la funzione*

$$y_0(x) = \int_{x_0}^{x} K(x,\xi) f(\xi) d\xi, \tag{17}$$

è un integrale particolare della (6).

Osservazione 9 *La (17) giustifica la denominazione "nucleo risolvente" che abbiamo assegnato all'integrale $K(x,\xi)$ dell'omogenea associata.*

Esercizio 10 *Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale:*

$$y'' - \frac{2x}{x^2+1}y' + \frac{2}{x^2+1}y = \left(x^2+1\right)^2 \tag{18}$$

Soluzione

L'omogenea associata è la (5), di cui già conosciamo l'integrale generale:

$$y(x) = c_1 x + c_2\left(x^2-1\right)$$

La (17) si scrive:

$$y_0(x) = \int_0^x K(x,\xi)\left(\xi^2+1\right)^2 d\xi,$$

avendo posto $x_0 = 0$. Il nucleo risolvente è:

$$\begin{aligned} K(x,\xi) &= \frac{\begin{vmatrix} \xi & \xi^2-1 \\ x & x^2-1 \end{vmatrix}}{\xi^2+1} \\ &= \frac{x^2\xi - x\xi^2 - \xi + x}{\xi^2+1}, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
y_0(x) &= \int_0^x \left(x^2\xi - x\xi^2 - \xi + x\right)\left(\xi^2+1\right) d\xi \\
&= \int_0^x \left[-x\xi^4 + \left(x^2-1\right)\xi^3 + \left(x^2-1\right)\xi + 1\right] d\xi \\
&= -x\int_0^x \xi^4 d\xi + \left(x^2-1\right)\int_0^x \xi^2 d\xi + \left(x^2-1\right)\int_0^x \xi d\xi + x\int_0^x d\xi \\
&= -\frac{x}{5}\cdot \xi^5\Big|_0^x + \frac{x^2-1}{4}\cdot \xi^4\Big|_0^x + \frac{x^2-1}{2}\cdot \xi^2\Big|_0^x + x\cdot \xi\Big|_0^x \\
&= -\frac{x}{5}\left(x^5\right) + \frac{x^2-1}{4}x^4 + \frac{x^2-1}{2}x^2 + x^2 \\
&= -\frac{1}{5}x^6 + \frac{1}{4}x^6 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^2}{2} + x^2
\end{aligned}$$

Cioè

$$y_0(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{20}$$

Quindi l'integrale generale dell'equazione assegnata è

$$y(x) = c_1 x + c_2\left(x^2-1\right) + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{20}$$

Riferimenti bibliografici

[1] Ghizzetti A., 1978. *Lezioni di Analisi Matematica, vol II.* Veschi Editore.

[2] Ghizzetti A., 1978. *Complementi ed esercizi di Analisi Matematica, vol II.* Veschi Editore.

[3] Smirnov V.I., 1993. *Corso di Matematica Superiore, vol. IV.* Editore Riuniti.

[4] Piskunov. N., 2004. *Calcolo differenziale e integrale, vol. 2.* Editore Riuniti.