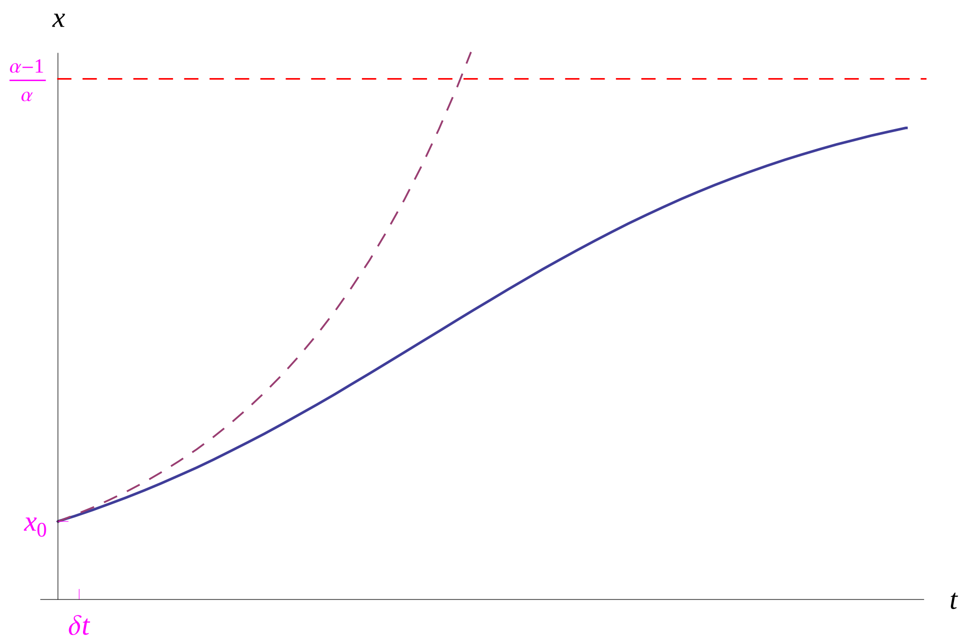
MATEMATICA OPEN SOURCE – HTTP://WWW.EXTRABYTE.INFO
Quaderni di Analisi Matematica – 2016

Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx}f\left(x\right) \quad \sum_{k=0}^{+\infty}a_k \quad \int f\left(x\right)dx \quad \oint_{\Gamma}\left(Xdx+Ydy+Zdz\right)$$

L'equazione differenziale di Riccati

Marcello Colozzo



1 Problema di Cauchy

Sia dato un sistema dinamico a tempo continuo $\dot{x} = F_\alpha(x)$, dove

$$F_\alpha(x) = (\alpha - 1)x - \alpha x^2, \tag{1}$$

essendo $\alpha > 1$ un parametro. Abbiamo, dunque, il seguente problema di Cauchy:

$$\mathcal{P}_\alpha : \begin{cases} \dot{x} = (\alpha - 1)x - \alpha x^2 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{2}$$

Osserviamo innanzitutto che se $x_0 = 0$, $\mathcal{P}_\alpha$ ammette la funzione identicamente nulla come unica soluzione. Similmente, se $x_0 = \frac{\alpha-1}{\alpha}$, l'unica soluzione del problema (2) è la funzione costante $x(t) = \frac{\alpha-1}{\alpha}$. Ciò è una conseguenza di una nota proprietà delle equazioni differenziali a variabili separabili, giacchè $x = 0, \frac{\alpha-1}{\alpha}$ sono zeri al finito di $F_\alpha(x)$.

L'equazione differenziale

$$\dot{x} = (\alpha - 1)x - \alpha x^2, \tag{3}$$

è nota come equazione di Riccati ed è manifestamente non lineare. Può essere resa lineare attraverso il cambio di variabile $y = \frac{1}{x}$, per cui sostituendo in (3):

$$-\frac{1}{y^2}\dot{y} = (\alpha - 1)\frac{1}{y} - \frac{\alpha}{y^2}$$

Siamo interessati ad integrali $y(t)$ non identicamente nulli, onde:

$$\dot{y} = (1 - \alpha)y + \alpha,$$

che è appunto lineare e come tale può essere integrata con il procedimento standard (cfr. § **??**) o per separazione di variabili. Applicando il primo procedimento, otteniamo dapprima il fattore integrante:

$$I(t) = e^{-\int (1-\alpha)dt} = e^{-(1-\alpha)t}$$

Quindi:

$$\frac{d}{dt}\left[ye^{-(1-\alpha)t}\right] = \alpha e^{-(1-\alpha)t}$$

Integrando primo e secondo membro rispetto a t:

$$y(t, C) = -\frac{\alpha}{1-\alpha} + Ce^{-(\alpha-1)t}, \quad \forall C \in \mathbb{R}$$

Ripristinando la variabile x:

$$x(t, C) = \frac{1}{\frac{\alpha}{\alpha-1} + Ce^{-(\alpha-1)t}},$$

che è l'integrale generale (3). Imponendo la condizione iniziale $x(t_0) = x_0 \neq 0$, otteniamo l'unica soluzione[1]:

$$x(t) = \frac{x_0(\alpha - 1)}{\alpha x_0 + (\alpha - 1 - \alpha x_0)e^{-(\alpha-1)(t-t_0)}} \tag{4}$$

Riesce:

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \frac{\alpha - 1}{\alpha}, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R} - \{0, 1\} \tag{5}$$

[1] La funzione (1) è manifestamente lipschitziana, per cui sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Cauchy-Lipschitz.

per cui il grafico della soluzione del problema (2) ha un asintoto orizzontale; precisamente, la retta di equazione $x = \frac{\alpha-1}{\alpha} > 0$, dato che $\alpha > 1$. Inoltre, la (5) è indipendente da x_0:

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \frac{\alpha-1}{\alpha} = \begin{cases} \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^-, & \text{se } x_0 < \frac{\alpha-1}{\alpha} \\ \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^+, & \text{se } x_0 > \frac{\alpha-1}{\alpha} \end{cases} \tag{6}$$

In fig. 1 riportiamo la soluzione $x(t)$ per $\alpha = 3$ e per diversi valori dello stato iniziale x_0.

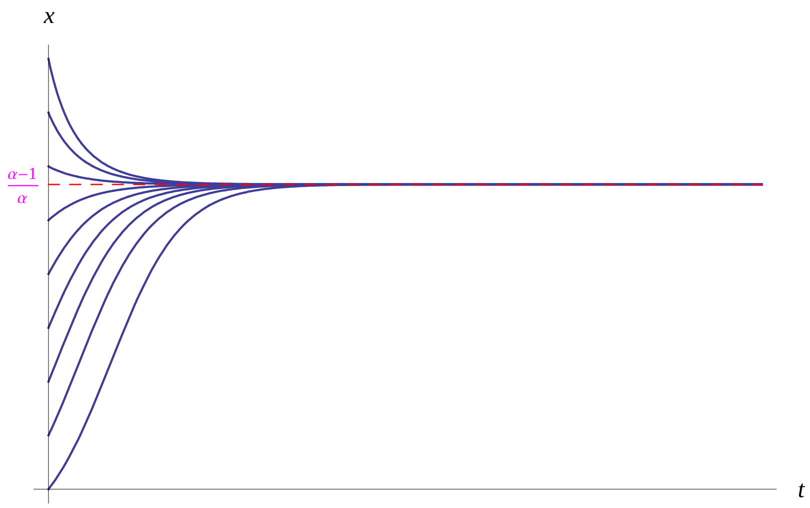


Figura 1: Andamento della soluzione del problema di Cauchy (2) per $\alpha = 3$ e per diversi valori di x_0.

2 Analisi delle soluzioni

Assumendo $t_0 = 0$, dalla (6) segue che il grafico γ_α della soluzione

$$x(t) = \frac{x_0(\alpha-1)}{\alpha x_0 + (\alpha - 1 - \alpha x_0)\, e^{-(\alpha-1)t}}, \tag{7}$$

è contenuto nella regione $\mathcal{R}_\alpha$ del piano cartesiano Otx:

$$\mathcal{R}_\alpha = \begin{cases} [0,+\infty) \times \left[x_0, \frac{\alpha-1}{\alpha}\right), & \text{se } x_0 < \frac{\alpha-1}{\alpha} \\ [0,+\infty) \times \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}, x_0\right], & \text{se } x_0 > \frac{\alpha-1}{\alpha} \end{cases}, \tag{8}$$

La derivata della funzione (7) è:

$$\dot{x}(t) = \frac{\alpha x_0 (\alpha-1) \left(\frac{\alpha-1}{\alpha} - x_0\right) e^{-(\alpha-1)t}}{\alpha \left[x_0 + \left(\frac{\alpha-1}{\alpha} - x_0\right) e^{-(\alpha-1)t}\right]^2}, \tag{9}$$

da cui vediamo che il segno di $\dot{x}(t)$ è controllato dal termine $\frac{\alpha-1}{\alpha} - x_0$:

$$\begin{aligned} x_0 < \frac{\alpha-1}{\alpha} &\Longrightarrow \dot{x}(t) > 0, \quad \forall t \\ x_0 > \frac{\alpha-1}{\alpha} &\Longrightarrow \dot{x}(t) < 0, \quad \forall t \end{aligned} \tag{10}$$

Cioè la funzione $x\left(t\right)$ è strettamente crescente se $x_0 < \frac{\alpha-1}{\alpha}$, altrimenti è strettamente decrescente. Il caso interessante è $0 < x_0 < \frac{\alpha-1}{\alpha}$, e il comportamento delle corrispondenti soluzioni può essere determinato dalla (3) che riscriviamo come:

$$\dot{x}\left(t\right) = \left(\alpha-1\right)x\left(t\right)\left[1-\frac{x\left(t\right)}{x_\infty}\right], \quad \forall t \tag{11}$$

essendo $x_\infty \overset{def}{=} \frac{\alpha-1}{\alpha}$. Riesce:

$$t \in \mathbb{R} \mid \frac{x\left(t\right)}{x_\infty} < 1 \Longrightarrow \dot{x}\left(t\right) > 0, \quad \forall t$$

Cioè $x\left(t\right)$ è strettamente crescente per ogni t tale che $\frac{x(t)}{x_\infty} < 1$. Ne consegue:

$$\exists t_* < +\infty \mid x\left(t \ll t_*\right) \ll x_\infty \Longrightarrow \dot{x}\left(t\right) \simeq \left(\alpha-1\right)x\left(t\right), \quad \forall t \in \left[0,\delta t\right], \text{ con } \delta t \ll t_*,$$

onde:

$$x\left(t\right) = x_0 e^{(\alpha-1)t}, \quad \forall t \in \left[0,\delta t\right] \tag{12}$$

Conclusione 1 *Nell'intervallo di tempo $[0,\delta t]$ la grandezza $x\left(t\right)$ segue la legge esponenziale (12). Nel limite opposto:*

$$x\left(t\right) \underset{t \gg t_*}{\longrightarrow} x_\infty$$

Tale conclusione è corroborata dal grafico di fig. 2.

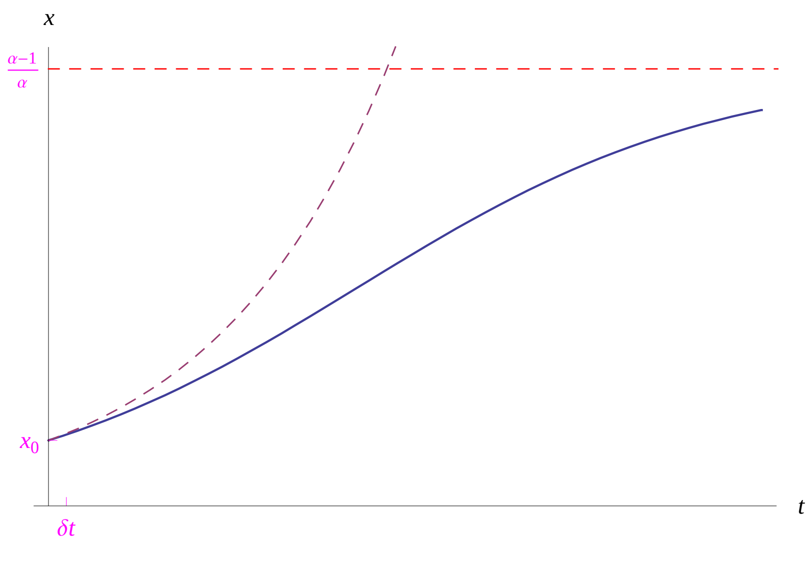


Figura 2: In questo grafico confrontiamola soluzione esatta del problema di Cauchy (2) con quella approssimata (12), valida in un intorno destro di $t = 0$.