Equazione del bilancio

Marcello Colozzo – http://www.extrabyte.info

Sia $G(t)$ una grandezza scalare di densità $\rho(\mathbf{x},t)$:

$$G(t) = \int_D \rho(\mathbf{x},t)\, d^3x, \tag{1}$$

per un assegnato dominio $D \subseteq \mathbb{R}^3$. Dal momento che ρ è una funzione delle coordinate (x,y,z) e del tempo t, possiamo immaginare che essa venga "trasportata". Definiamo allora un campo vettoriale $\mathbf{j}(\mathbf{x},t)$ – denominato *densità di corrente* di $G(t)$ – tale che se $d\sigma$ è un qualunque elemento di superficie e $\mathbf{n}$ il versore normale, $\mathbf{j}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{n}d\sigma$ è la quantità di grandezza che attraversa $d\sigma$ nell'unità di tempo. Ciò implica che

$$\int_S \mathbf{j}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{n}d\sigma$$

è la quantità di grandezza che attraversa la superficie S nell'unità di tempo. Dimostriamo il seguente teorema:

Teorema 1 *L'equazione del bilancio per la grandezza $G(t)$ di densità $\rho(x,t)$ e densità di corrente $\mathbf{j}(\mathbf{x},t)$ è*

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{j} = \gamma, \tag{2}$$

dove $\gamma(\mathbf{x},t)$ è la densità di velocità di creazione/distruzione della grandezza $G(t)$:

$$\Gamma(t) = \int_D \gamma(\mathbf{x},t)\, d^3x, \tag{3}$$

essendo $\Gamma(t)$ la velocità di creazione/distruzione di $G(t)$.

Dimostrazione. Preso ad arbitrio un dominio D di frontiera regolare ∂D, si ha che l'equazione del bilancio in forma integrale si scrive:

$$\frac{dG}{dt} + \oint_{\partial D} \mathbf{j}\cdot\mathbf{n}d\sigma = \Gamma(t)$$

Abbiamo

$$\frac{dG}{dt} = \frac{d}{dt}\int_D \rho(\mathbf{x},t)\, d^3x = \int_D \frac{\partial\rho}{\partial t} d^3x$$

L'integrale di superficie può essere convertito in un integrale di volume utilizzando il teorema della divergenza:

$$\oint_{\partial D} \mathbf{j}\cdot\mathbf{n}d\sigma = \int_D \operatorname{div}\mathbf{j} d^3x$$

Segue

$$\int_D \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{j} - \gamma\right) d^3x = 0$$

Per l'arbitrarietà di D si ha:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{j} - \gamma = 0,$$

onde l'asserto. ■

Se $\gamma(\mathbf{x},t) > 0$ il mezzo in cui si propaga la grandezza G si dice *sorgente*. Viceversa, per $\gamma(\mathbf{x},t) < 0$ il mezzo assorbe. Per ultimo, $\gamma(\mathbf{x},t) = 0$ la grandezza G si conserva e l'equazione del bilancio si chiama *equazione di continuità*. Per quanto precede, tale equazione esprime localmente la conservazione di G, a differenza dell'equazione integrale

$$\frac{dG}{dt} + \oint_{\partial D} \mathbf{j}\cdot\mathbf{n}d\sigma = 0$$

che esprime globalmente la conservazione di G.