Esercizio svolto di Fisica 1 (piano inclinato)

Marcello Colozzo http://www.extrabyte.info

Esercizio 1 *Si consideri il sistema meccanico quotato in fig. 1. L'anello A è libero di scorrere in una guida orizzontale scabra con coefficiente di attrito μ_s. Tramite una fune inestensibile di massa trascurabile e di lunghezza l, l'anello è collegato a un blocco di massa m_1, che a sua volta è vincolato a un secondo blocco di massa m_2, tramite una fune inestensibile e di massa trascurabile passante per una puleggia P. Il sistema è configurato in modo tale che l'ascissa di A su un asse x parallelo alla guida e con origine nel punto corrispondente alla puleggia, è x_0 (fig. 1).*

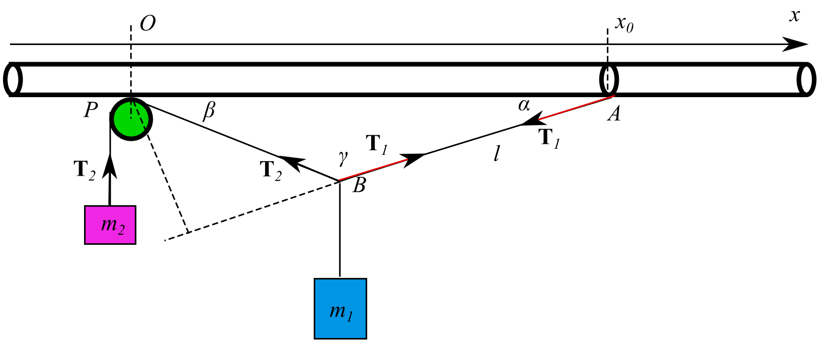

Figura 1: Esercizio 1.

Si determini il valore di m_2 affinché il sistema sia in equilibrio, supponendo noti μ_s, m_1, l, x_0.

Soluzione
Il sistema è in equilibrio se e solo se sono in equilibrio l'anello A e i singoli blocchi.
Forze applicate in B.

- Tensione $\mathbf{T}_1$ esercitata dalla fune di lunghezza l.
- Tensione $\mathbf{T}_2$ esercitata dalla fune passante per la puleggia.
- Forza peso $m_1\mathbf{g}$.

Ne segue la condizione di equilibrio

$$\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 + m_1\mathbf{g} = 0 \tag{1}$$

che proiettata lungo un asse orizzontale e un asse verticale per B, fornisce il sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} T_1 \cos\alpha - T_2 \cos\beta = 0 \\ T_1 \sin\alpha + T_2 \sin\beta = m_1 g \end{cases} \tag{2}$$

Forze agenti su m_1

1. Tensione $\mathbf{T}_2$ esercitata dalla fune passante per la puleggia.
2. Forza peso $m_2 g$.

Ne segue la condizione di equilibrio

$$T_2 = m_2 g \tag{3}$$

Forze agenti su A

1. Tensione $\mathbf{T}_1$
2. Reazione normale del vincolo (guida) $\mathbf{R}_N$.
3. Reazione tangenziale del vincolo (forza di attrito) $\mathbf{R}_T$.

Ne segue la condizione di equilibrio

$$\mathbf{R}_N + \mathbf{T}_1 + \mathbf{R}_T = \mathbf{0}$$

che proiettata lungo un asse orizzontale e un asse verticale per A, fornisce il sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} -T_1 \cos\alpha + R_T = 0 \\ R_N - T_1 \sin\alpha = 0 \end{cases}$$

Tenendo conto che $R_T = \mu_s R_N$, si ha

$$\mu_s T_1 \sin\alpha = \cos\alpha,$$

da cui

$$\alpha = \arctan\mu_s \tag{4}$$

Applicando il teorema dei seni al triangolo ABP

$$\frac{l}{\sin\beta} = \frac{x_0}{\sin\gamma}$$

D'altra parte $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, per cui

$$\begin{aligned} l\sin\gamma &= x_0 \sin(\alpha+\gamma) \\ &\iff (l - x_0\cos\alpha)\sin\gamma = x_0 \sin\alpha\cos\gamma \end{aligned}$$

Quindi

$$\tan\gamma = \frac{x_0 \sin\alpha}{l - x_0\cos\alpha} \Longrightarrow \gamma = \arctan\left(\frac{x_0\sin\alpha}{l - x_0\cos\alpha}\right),$$

che ci consente di calcolare

$$\beta = \pi - \left[\alpha + \arctan\left(\frac{x_0\sin\alpha}{l - x_0\cos\alpha}\right)\right] \tag{5}$$

Noti α e β calcoliamo T_2 dal sistema (2)

$$T_2 = m_1 g\cos\alpha$$

Tenendo conto delle (3)-(4)

$$m_2 = m_1 \cos(\arctan\mu_s) \tag{6}$$