# Metodo di Lagrange

**Marcello Colozzo – www.extrabyte.info**

Riprendiamo l'equazione non omogenea:

$$y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + a_2(x)\,y^{(n-2)} + .... + a_{n-1}(x)\,y' + a_n(x)\,y = f(x) \tag{1}$$

Per quanto precede, l'integrale generale di tale equazione si può esprime come

$$y(x) = y_0(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k y_k(x),$$

dove: $y_0(x)$ è un'integrale particolare dell'equazione non omogenea (1), mentre la sommatoria a secondo membro è l'integrale generale dell'equazione omogenea associata all'equazione data

$$y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + a_2(x)\,y^{(n-2)} + .... + a_{n-1}(x)\,y' + a_n(x)\,y = 0$$

Più specificatamente, l'insieme $\{y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)\} = \Sigma_n$ è un sistema fondamentale di integrali della predetta equazione omogenea.

In questo numero vediamo come determinare l'integrale particolare $y_0(x)$ supponendo noto $\Sigma_n$. Nel *metodo di Lagrange* (o di *variazione delle costanti arbitrarie*) si forza la soluzione $y_0(x)$ scrivendo

$$y_0(x) = \sum_{k=1}^{n} v_k(x)\,y_k(x),$$

dove $v_1(x), v_2(x), ..., v_n(x)$ sono funzioni da determinare. Per fissare le idee consideriamo $n = 3$:

$$\begin{aligned} &y''' + a_1(x)\,y'' + a_2(x)\,y' + a_3(x)\,y = f(x) \\ &y''' + a_1(x)\,y'' + a_2(x)\,y' + a_3(x)\,y = 0 \end{aligned}$$

Per quanto detto

$$y_0(x) = v_1(x)\,y_1(x) + v_2(x)\,y_2(x) + v_3(x)\,y_3(x)$$

Imponiamo

$$\begin{aligned} y_0'(x) &= v_1(x)\,y_1'(x) + v_2(x)\,y_2'(x) + v_3(x)\,y_3'(x) \\ y_0''(x) &= v_1(x)\,y_1''(x) + v_2(x)\,y_2''(x) + v_3(x)\,y_3''(x) \end{aligned}$$

Abbiamo cioè il seguente sistema di relazioni:

$$\begin{cases} y_0(x) = v_1(x)\,y_1(x) + v_2(x)\,y_2(x) + v_3(x)\,y_3(x) \\ y_0'(x) = v_1(x)\,y_1'(x) + v_2(x)\,y_2'(x) + v_3(x)\,y_3'(x) \\ y_0''(x) = v_1(x)\,y_1''(x) + v_2(x)\,y_2''(x) + v_3(x)\,y_3''(x) \end{cases}, \tag{2}$$

rammentando che

$$y_0'''(x) + a_1(x)\,y_0''(x) + a_2(x)\,y_0'(x) + a_3(x)\,y_0(x) = f(x)$$

Deriviamo la prima delle (2)

$$\begin{aligned} y_0'(x) &= v_1'(x)\,y_1(x) + v_1(x)\,y_1'(x) + v_2'(x)\,y_2(x) + v_2(x)\,y_2'(x) + v_3'(x)\,y_3(x) + v_3(x)\,y_3'(x) \\ &= y_0'(x) + v_1'(x)\,y_1(x) + v_2'(x)\,y_2(x) + v_3'(x)\,y_3(x) \end{aligned}$$

Cioè

$$v_1'(x)\,y_1(x) + v_2'(x)\,y_2(x) + v_3'(x)\,y_3(x) = 0 \tag{3}$$

Deriviamo la seconda delle (2)

$$\begin{aligned} y_0''(x) &= v_1'(x)\,y_1'(x) + v_1(x)\,y_1''(x) + v_2'(x)\,y_2'(x) + v_2(x)\,y_2''(x) + v_3'(x)\,y_3'(x) + v_3(x)\,y_3''(x) \\ &= y_0''(x) + v_1'(x)\,y_1'(x) + v_2'(x)\,y_2'(x) + v_3'(x)\,y_3'(x) \end{aligned}$$

Abbiamo così ottenuto il seguente sistema

$$\begin{cases} v_1'(x)\,y_1(x) + v_2'(x)\,y_2(x) + v_3'(x)\,y_3(x) = 0 \\ v_1'(x)\,y_1'(x) + v_2'(x)\,y_2'(x) + v_3'(x)\,y_3'(x) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Precisamente, si tratta di un sistema lineare omogeneo nelle incognite $v_1'(x), v_2'(x), v_3'(x)$, per cui necesittiamo di una terza equazione. A tale scopo deriviamo la terza delle (2):

$$y_0'''(x) = v_1(x)\,y_1'''(x) + v_2(x)\,y_2'''(x) + v_3(x)\,y_3'''(x) + v_1'(x)\,y_1''(x) + v_2'(x)\,y_2''(x) + v_3'(x)\,y_3''(x) \tag{5}$$

Dalle (2)

$$\begin{cases} a_3(x)\,y_0(x) = a_3(x)\left[v_1(x)\,y_1(x) + v_2(x)\,y_2(x) + v_3(x)\,y_3(x)\right] \\ a_2(x)\,y_0'(x) = a_2(x)\left[v_1(x)\,y_1'(x) + v_2(x)\,y_2'(x) + v_3(x)\,y_3'(x)\right] \\ a_1(x)\,y_0''(x) = a_1(x)\left[v_1(x)\,y_1''(x) + v_2(x)\,y_2''(x) + v_3(x)\,y_3''(x)\right] \end{cases}, \tag{6}$$

Sommando membro a membro le (5)-(6):

$$\begin{gathered} y_0'''(x) + a_1(x)\,y_0''(x) + a_2(x)\,y_0'(x) + a_3(x)\,y_0(x) = \\ v_1(x)\,y_1'''(x) + v_2(x)\,y_2'''(x) + v_3(x)\,y_3'''(x) + v_1'(x)\,y_1''(x) + v_2'(x)\,y_2''(x) + v_3'(x)\,y_3''(x) + \\ + a_3(x)\left[v_1(x)\,y_1(x) + v_2(x)\,y_2(x) + v_3(x)\,y_3(x)\right] \\ + a_2(x)\left[v_1(x)\,y_1'(x) + v_2(x)\,y_2'(x) + v_3(x)\,y_3'(x)\right] \\ + a_1(x)\left[v_1(x)\,y_1''(x) + v_2(x)\,y_2''(x) + v_3(x)\,y_3''(x)\right] \end{gathered}$$

Tenendo conto che $\{y_1(x), ..., y_n(x)\}$ è un sistema di integrali dell'omogenea associata, dopo vari passaggi si ottiene

$$v_1'(x)\,y''(x) + v_2'(x)\,y_2''(x) + v_3'(x)\,y_3''(x) = f(x),$$

ossia l'equazione che stavamo cercando. In generale

$$\begin{cases} v_1'(x)\,y_1(x) + v_2'(x)\,y_2(x) + ... + v_n'(x)\,y_n(x) = 0 \\ v_1'(x)\,y_1'(x) + v_2'(x)\,y_2'(x) + ... + v_n'(x)\,y_n'(x) = 0 \\ ... \\ v_1'(x)\,y_1^{(n-1)}(x) + v_2'(x)\,y_2^{(n-1)}(x) + v_3'(x)\,y_n^{(n-1)}(x) = f(x) \end{cases} \tag{7}$$

Abbiamo così ottenuto un sistema lineare di $n$ equazioni nelle $n$ incognite $v_1'(x), v_2'(x), ..., v_n'(x)$. Il determinante dei coefficienti è il wronskiano $W(x)$ degli integrali $y_1(x), ..., y_n(x)$, e dal momento che questi ultimi compongono un sistema fondamentale, si ha $W(x) \neq 0$, $\forall x$. Quindi il predetto sistema è compatibile e determinato. Ne consegue che la $n$-pla di funzioni $v_1(x), v_2(x), ..., v_n(x)$ che consentono di ricostruire $y_0(x)$, si ottiene per quadrature dell'unica soluzione del citato sistema.