Enumerazione degli zeri della zeta di Riemann

Marcello Colozzo

Partiamo dal noto sviluppo di Hadamard:

$$\frac{\xi(z)}{\xi(0)} = \prod_{\rho} \left(1 - \frac{z}{\rho}\right) \tag{1}$$

Rammentiamo che:

- la funzione $\xi(z)$ di Riemann e la funzione $\zeta(z)$ di Riemann hanno in comune gli zeri non banali:

$$H = \{\rho \in \mathbb{C} \mid \xi(\rho) = 0, \ \operatorname{Im} \rho \neq 0\}$$

- $\rho \neq 0, \ \forall \rho \in H$. Quindi ha senso la (1).

- Dalla parità $(+1)$ della $\xi(z)$ rispetto alla linea critica $r_c : 2x - 1 = 0$, segue che gli zeri sono simmetrici rispetto a r_c. Inoltre:

$$\rho^* \in H, \ \forall \rho \in H, \tag{2}$$

  dove l'asterisco denota il complesso coniugato. Ne segue che gli zeri della $\xi(z)$ si distribuiscono per coppie complesse coniugate.

- L'insieme H è infinito numerabile.

Da alcune proprietà della funzione zeta segue che gli zeri appartengono al campo illimitato:

$$R = (0, 1) \times (-\infty, +\infty) \tag{3}$$

denominato *striscia critica.* Scriviamo

$$\rho_k = x_k + iy_k,$$

per cui

$$\rho_k^* = x_k - iy_k$$

La simmetria rispetto all'asse reale (fig. 1) implica

$$\rho_k^* = \rho_{-k}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Ma

$$\rho_0^* = \rho_0 \Longrightarrow \operatorname{Im} \rho_0 = 0 \Longrightarrow \rho_0 \notin H$$

Da ciò segue

$$\begin{aligned}\prod_{\rho} \left(1 - \frac{z}{\rho}\right) &= \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{\rho_k}\right) \\ &= \left[\prod_{k=-\infty}^{-1} \left(1 - \frac{z}{\rho_k}\right)\right] \left[\prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{\rho_k}\right)\right]\end{aligned}$$

Osserviamo che

$$\prod_{k=-\infty}^{-1} \left(1 - \frac{z}{\rho_k}\right) \underset{k'=-k}{=} \prod_{k'=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{\rho_{-k'}}\right) \underset{\rho_{-k'}=\rho_k^*}{=} \prod_{k'=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{\rho_{k'}^*}\right)$$

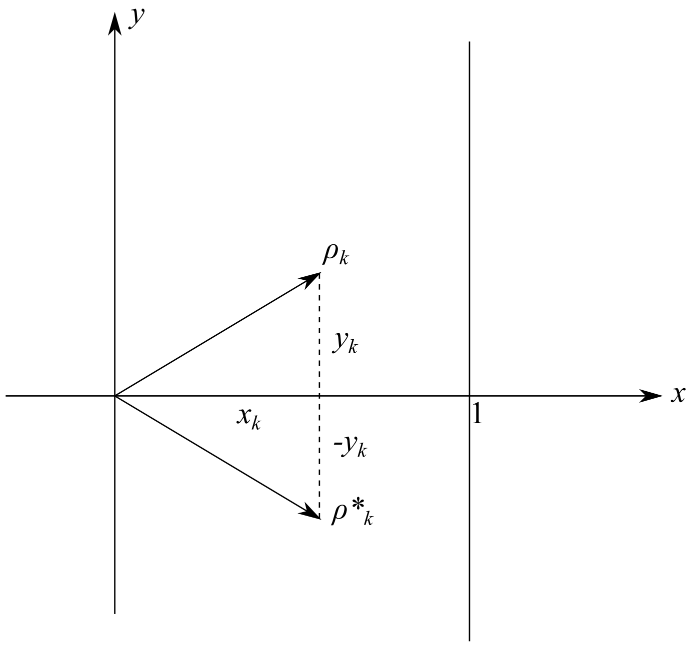

Figura 1: Gli zeri della $\xi(z)$ si distribuiscono per coppie complesse coniugate.

Ridifinendo l'indice muto:

$$\prod_{k=-\infty}^{-1}\left(1-\frac{z}{\rho_k}\right)=\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z}{\rho_k^*}\right)$$

Segue

$$\prod_{\rho}\left(1-\frac{z}{\rho}\right)=\left[\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z}{\rho_k}\right)\right]\left[\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z}{\rho_k^*}\right)\right] \tag{4}$$

Il prodotto infinito a primo membro è, dunque, un *prodotto bilaterale*:

$$\prod_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{+\infty}\left(1-\frac{z}{\rho_k}\right)=\left[\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z}{\rho_k}\right)\right]\left[\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z}{\rho_k^*}\right)\right], \tag{5}$$

che converge se e solo se sono convergenti i prodotti infiniti a secondo membro. Per il teorema della fattorizzazione di Weierstrass [1], il suddetto prodotto infinito è assolutamente convergente. Per definizione di convergenza assoluta [1], comunque prendiamo un prodotto infinito

$$\prod_{k=1}^{+\infty}\left[1+u_k(z)\right],$$

si ha convergenza assoluta, se tale è la serie $\sum_{k=1}^{+\infty}u_k(z)$. Nel nostro caso è

$$u_k(z)=-\frac{z}{\rho_k},\quad w_k(z)=-\frac{z}{\rho_k^*},$$

che stabiliscono la convergenza assoluta dei prodotti a secondo membro della (5). Si noti che le corrispondenti serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty}u_k(z),\quad \sum_{k=1}^{+\infty}w_k(z)$$

non sono serie di funzioni, bensì serie numeriche moltiplicate per $-z$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty}u_k(z)=-z\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\rho_k},\quad \sum_{k=1}^{+\infty}w_k(z)=-z\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\rho_k^*}, \tag{6}$$

per cui è sufficiente invocare la convergenza assoluta di

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\rho_k} \tag{7}$$

Una condizione necessaria per la convergenza della serie (7) è

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{|\rho_k|} = 0 \Longrightarrow \lim_{k\to+\infty} |\rho_k| = +\infty \Longrightarrow \lim_{k\to+\infty} |\rho_k|^2 = +\infty$$

D'altra parte

$$|\rho_k|^2 = x_k^2 + y_k^2$$

Dal momento che x_k è limitato, una condizione necessaria (ma non sufficiente) per la convergenza della (7) è:

$$\lim_{k\to+\infty} |y_k| = +\infty \tag{8}$$

Per il criterio del rapporto

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|\rho_k|}{|\rho_{k+1}|} = l < 1 \Longrightarrow \lim_{k\to+\infty} \frac{|\rho_k|^2}{|\rho_{k+1}|^2} = l^2 \stackrel{def}{=} \lambda < 1$$

Cioè

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{x_k^2 + y_k^2}{x_{k+1}^2 + y_{k+1}^2} = \lambda < 1$$

Esplicitiamo il limite

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{x_k^2 + y_k^2}{x_{k+1}^2 + y_{k+1}^2} = \lim_{k\to+\infty} \left(\frac{\frac{x_k^2}{y_k^2} + 1}{\frac{x_{k+1}^2}{y_{k+1}^2} + 1} \cdot \frac{y_k^2}{y_{k+1}^2} \right) = \lim_{k\to+\infty} \frac{y_k^2}{y_{k+1}^2}$$

Per avere la convergenza assoluta, deve perciò essere

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{y_k^2}{y_{k+1}^2} = \lambda < 1$$

Ne concludiamo che la parte reale degli zeri non banali non produce effetti sulla convergenza.

Bibliografia

[1] Fichera G., De Vito L.: *Funzioni analitiche di una variabile complessa,* Veschi, 1987.

[2] Gizzetti A.: *Lezioni di Analisi Matematica*, Veschi, 1971