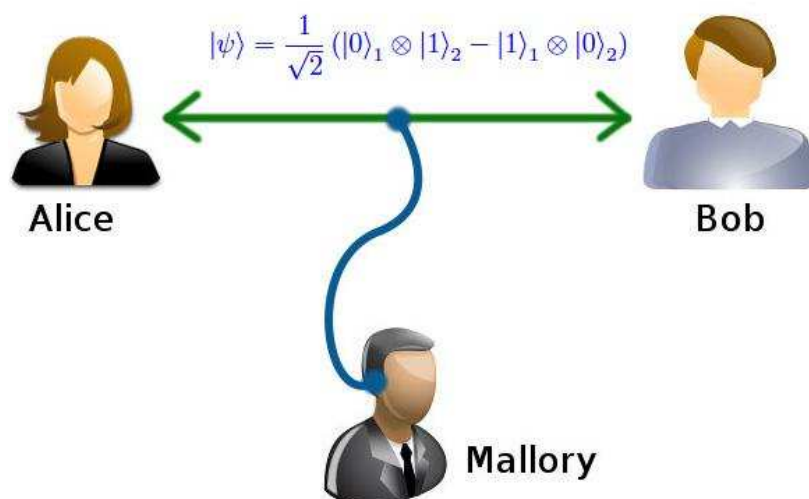


## Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx} f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \int f(x) dx = \oint_{\Gamma} (X dx + Y dy + Z dz)$$

**E' possibile trasmettere dati a velocità  
superluminale?**

Marcello Colozzo



## Indice

1	Introduzione	2
2	X-channel	3
3	Sistemi quantistici di spin $1/2$	3
4	Il quantum bit	7
5	Sistemi composti. Registri a due celle	9
6	Teorema no-signaling	11
7	Teorema di Bell	14
	Bibliografia	17

## Prefazione

Lo studio dei fenomeni a scala submicroscopica ha portato nella prima metà del secolo scorso, alla formulazione della Meccanica quantistica che ha indotto una vera e propria rivoluzione per ciò che riguarda il comportamento delle particelle subatomiche [1]. Da un punto di vista tecnologico le ricadute sono state innumerevoli e grazie alla miniaturizzazione dei dispositivi elettronici, è possibile utilizzare fenomeni e processi tipicamente quantistici, ovvero assenti a scala macroscopica. I più interessanti sono, senza dubbio, i fenomeni di **Entanglement Quantistico**. Anticipiamo, dunque, l'esistenza di una classe di sistemi fisici in grado di immagazzinare informazione (nel senso di Shannon) a livello quantistico implementando una **computazione quantistica**, mentre la possibilità di far interagire due sistemi quantistici, permette l'implementazione di una **comunicazione quantistica**.

Riguardo a quest'ultima possibilità, mostreremo l'esistenza di un **X-channel** attraverso cui è possibile trasmettere al più un white noise, potendo poi realizzare un commutatore di stati logici superluminale.

## 1 Introduzione

Se per trasmettere informazione utilizziamo un ente fisico che ha proprietà di propagazione come ad esempio, un campo elettromagnetico, siamo soggetti al limite imposto dalla Relatività Speciale secondo cui  $v \leq c$ , essendo  $v$  la velocità di propagazione del segnale e  $c$  la velocità della luce nel vuoto. Se  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  e  $t$  denotano rispettivamente le coordinate spaziali (cartesiane) e il tempo rispetto a un arbitrario sistema di riferimento inerziale, la propagazione di una grandezza fisica rappresentata da una funzione  $f(\mathbf{x}, t)$  è governata da un'equazione differenziale alle derivate parziali del secondo ordine. Più precisamente, se  $f(\mathbf{x}, t)$  è una delle componenti del campo elettromagnetico che si propaga da un trasmettitore  $A$  (Alice) a un ricevitore  $B$  (Bob), si ha che la predetta funzione risolve l'equazione d'onda di D'Alembert:

$$\nabla^2 f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

ove

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (2)$$

mentre  $c$  denota la velocità di propagazione che nel caso delle onde elettromagnetiche è la velocità della luce. Come è noto, l'equazione di D'Alembert ammette soluzioni del tipo onda piana monocromatica, che in forma complessa si scrive:

$$f(\mathbf{x}, t) = Ae^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}, \quad (3)$$

essendo

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{n}$$

il vettore d'onda ( $\lambda$  è la lunghezza d'onda, mentre  $\mathbf{n}$  è il versore della direzione orientata di propagazione) e  $\omega = c|\mathbf{k}|$  la frequenza angolare. La trasmissione di un segnale a bassa frequenza  $u(t)$  come ad esempio, la voce umana trasdotta da un microfono, può avvenire modulando l'ampiezza dell'andamento sinusoidale in funzione del tempo della generica componente del campo elettrico dell'onda piana monocromatica. Più precisamente, l'involuppo di modulazione sarà dato dal segnale a bassa frequenza.

**Definizione 1** Chiamiamo **E-channel** un tale canale di comunicazione.

## 2 X-channel

E-channel ha l'evidente debolezza rappresentata dalla possibilità di intercettazione del segnale trasmesso. Se  $C$  (Charlie) si intromette tra  $A$  (Alice) e  $B$  (Bob), può "ascoltare" la conversazione in atto.

**Congettura 2** *Esiste un X-channel in cui la trasmissione è istantanea e non può essere intercettata.*

Possiamo tentare di provare tale congettura invocando l'esistenza di una classe di sistemi dinamici caratterizzati da una grandezza fisica disaccoppiata dai gradi di libertà spaziali; precisamente, dalle coordinate cartesiane  $\mathbf{x} = (x, y, z)$ . Una tale grandezza non avendo proprietà di propagazione, non è soggetta alla limitazione  $v \leq c$  discussa nella sezione precedente. Un qualunque sistema della classe deve essere non-separabile (esamineremo più avanti il significato di tale termine), e la predetta grandezza deve soddisfare una legge di conservazione.

## 3 Sistemi quantistici di spin 1/2

Una classe di sistemi dinamici verificanti la proprietà vista nella sezione precedente è rappresentata dai cosiddetti *sistemi quantistici di spin*  $\frac{1}{2}$ . Si tratta di particelle subatomiche per le quali le componenti cartesiane del **momento angolare di spin** possono assumere solo due valori che rappresentano due possibili orientazioni (*quantizzazione del momento angolare*). Denotiamo con  $\Sigma$  un tale sistema che chiameremo d'ora in avanti *microsistema*, e con  $\mathbf{S}$  il momento angolare di spin. Se ci riferiamo a una terna di assi cartesiani  $x, y, z$  costituenti un sistema di riferimento inerziale, si ha:

$$\mathbf{S} = (S_x, S_y, S_z) \quad (4)$$

Per quanto precede, la grandezza vettoriale  $\mathbf{S}$  non dipende dalla posizione della particella, a differenza del *momento angolare orbitale*:

$$\mathbf{L} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{p}, \quad (5)$$

ove

$$\mathbf{p} = m \frac{d\mathbf{x}}{dt} \quad (6)$$

è l'*impulso* (o *quantità di moto*) nell'ipotesi di moto non relativistico, mentre  $m$  è la *massa inerziale* della particella. Per tale ragione, lo spin di una particella è noto come *momento angolare intrinseco*, ed è una grandezza tipicamente quantistica ossia priva di analogo classico.

Per un sistema di spin 1/2 la quantizzazione del momento angolare implica che una qualunque componente  $S_k$  (con  $k = x, y, z$ ) può assumere solo due valori che denotiamo con  $\pm s_k$ , essendo:

$$s_k = \frac{\hbar}{2}, \quad (7)$$

dove

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}, \quad h = 6.626196 \times 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{s} \quad (\text{costante di Planck}) \quad (8)$$

è la *costante ridotta di Planck*. Dalla (7) deriva la locuzione "spin  $\frac{1}{2}$ ". La fig. 1 illustra i possibili valori della componente  $S_z$  di  $\mathbf{S}$ .

In parole povere, mentre una qualunque grandezza classica (cioè caratterizzante un sistema macroscopico) può variare con continuità, le grandezze quantistiche assumono solo valori discreti: è come se a scala submicroscopica la natura si comporta in modalità digitale, anziché analogica.

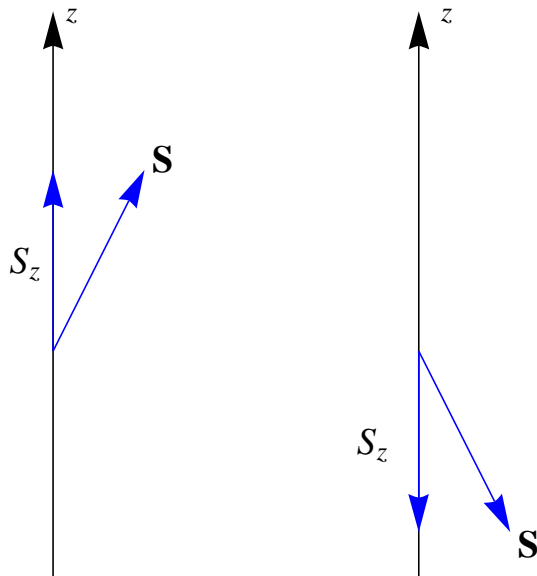


Figura 1: Valori assunti dalla componente  $S_z$  del momento angolare di spin  $\mathbf{S}$  di un sistema quantistico 1/2 (ad esempio, un elettrone).

Le componenti del momento angolare  $\mathbf{S}$  sono soggette al *principio di indeterminazione di Heisenberg* secondo cui è impossibile misurare simultaneamente e con precisione infinita una qualunque coppia di componenti distinte ( $S_k, S_{k'}$ ). È invece possibile misurare simultaneamente con un'arbitraria precisione ogni coppia ( $S^2, S_k$ ), dove:

$$S^2 = \mathbf{S} \cdot \mathbf{S},$$

essendo  $\cdot$  l'usuale prodotto scalare nello spazio euclideo tridimensionale. Inoltre, il microsistema  $\Sigma$  può essere configurato o meglio *preparato*, in modo da conoscere in un certo istante le probabilità  $P_+$  e  $P_-$  che il risultato di una misura di  $S_k$  sia  $+s_k$  e  $-s_k$  rispettivamente. Per definizione di probabilità:

$$P_+ + P_- = 1 \quad (9)$$

L'implementazione di un modello matematico per  $\Sigma$  suggerisce la seguente posizione:

$$P_{\pm} = |c_{\pm}|^2, \quad c_{\pm} \in \mathbb{C} \quad (10)$$

In altri termini, per rendere maneggevole il comportamento del microsistema, pensiamo alle probabilità ( $P_+, P_-$ ) in termini di coppie ordinate di numeri complessi ( $c_+, c_-$ ) tali che il modulo quadro coincida con l'omonima probabilità. In tal modo, la condizione (9) si riscrive:

$$|c_+|^2 + |c_-|^2 = 1 \quad (11)$$

Si noti che il predetto comportamento probabilistico non è dovuto a una limitata conoscenza dello stato meccanico di  $\Sigma$  in riferimento alle componenti  $S_k$  del momento angolare di spin, ma rappresenta una limitazione di principio che caratterizza i processi di misura di una qualunque grandezza fisica relativa a un microsistema. È bene ricordare che per *grandezza fisica* si intende una variabile dinamica come ad esempio, l'energia o la quantità di moto. Viceversa, grandezze come la carica elettrica o la massa inerziale vengono trattate alla stregua di costanti parametricamente implementate nelle rispettive equazioni dinamiche. Inoltre, la configurazione di un microsistema è tale che i valori assunti da una grandezza fisica sono intrinsecamente legati al processo di misura della grandezza medesima.

A sua volta, il *processo di misura* è una interazione tra il microsistema e uno strumento/apparato macroscopico. L'output di tale interazione è il risultato della misura. Per sottolineare l'importanza di tale procedimento, le grandezze fisiche relative a un microsistema si dicono **osservabili**.

Nel caso specifico di un microsistema di spin  $\frac{1}{2}$  l'unica informazione che abbiamo (in un dato istante di tempo) è data dalla coppia ordinata di numeri complessi  $(c_+, c_-)$  verificante la (11). Nulla ci impedisce di considerare la totalità delle coppie ordinate di numeri complessi, ovvero

$$\mathbb{C}^2 = \{(c_+, c_-) \mid c_{\pm} \in \mathbb{C}\} \quad (12)$$

per poi *normalizzare* [cfr. eq. (11)]. Come è noto, l'insieme (12) può essere strutturato come spazio vettoriale su  $\mathbb{C}$ , riuscendo

$$\dim \mathbb{C}^2 = 2 \quad (13)$$

Introducendo un *prodotto interno* (che è una generalizzazione dell'usuale prodotto scalare che conferisce una struttura euclidea a uno spazio sui reali), tale spazio assume la struttura di *spazio unitario di Hilbert*. A rigore, quest'ultima denominazione è riservata agli spazi vettoriali sul campo complesso infinito-dimensionali in cui è definito un prodotto interno. Tuttavia è consuetudine conservare tale denominazione anche per gli spazi di dimensione finita.

Supponiamo di conoscere ad un dato istante di tempo le *ampiezze di probabilità*  $c_+$  e  $c_-$  che una misura di un'assegnata componente  $S_k$  dello spin fornisca come risultato  $+s_k$  e  $-s_k$ , rispettivamente. Matematicamente, ciò si esprime attraverso una combinazione lineare dei vettori di base dello spazio  $\mathbb{C}^2$ . Precisamente, si assumono come vettori di base gli elementi di  $\mathbb{C}^2$  corrispondenti a  $+s_k$  e  $-s_k$  rispettivamente. Nella **notazione bra-ket di Dirac** tali elementi sono simboleggiati da:

$$|+s_k\rangle \equiv |0\rangle, \quad |-s_k\rangle \equiv |1\rangle, \quad (14)$$

ove il simbolo  $|\cdot\rangle$  denota un *vettore ket*, ovvero un elemento dello spazio di Hilbert  $\mathbb{C}^2$ . Si noti che 0 e 1 sono solo dei simboli, nel senso che avremmo potuto utilizzare  $+$  e  $-$ . Nel caso speciale di  $S_z$  è spesso utilizzata la notazione:

$$|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle \quad (15)$$

Tali simboli rappresentano rispettivamente gli stati *spin up* e *spin down*.

Abbiamo, dunque, una coppia di *variabili dicotomiche*, cioè che si escludono a vicenda. Tali variabili assumono solo due valori o meglio, occupano due stati logici del tipo on/off, true/false, etc. A differenza delle variabili dicotomiche di tipo classico, quelle quantistiche possono *sovraporsi linearmente*. Infatti, per quanto visto possiamo considerare una combinazione lineare del tipo

$$|\psi\rangle = c_+ |0\rangle + c_- |1\rangle \xrightarrow{c_{\pm} \in \mathbb{C}} |\psi\rangle \in \mathbb{C}^2 \quad (16)$$

In altri termini, la conoscenza (a un dato istante di tempo) delle ampiezze di probabilità  $c_{\pm}$  equivale ad ammettere che lo stato di  $\Sigma$  è rappresentato dal ket (16). Una tale sovrapposizione lineare non è comunque osservabile, nel senso che se in quell'istante eseguiamo una misura della componente  $S_k$ , il vettore  $|\psi\rangle$  si proietta istantaneamente su una delle sue componenti  $c_+ |0\rangle$  o  $c_- |1\rangle$ . Il corrispondente risultato della misura sarà  $\frac{\hbar}{2}$  (spin up) o  $-\frac{\hbar}{2}$  (spin down) rispettivamente. In simboli:

$$|\psi\rangle \xrightarrow{\text{mis } S_k} |n\rangle, \quad n \in \{0, 1\} \quad (17)$$

I vettori  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$  costituiscono una base ortonormale di  $\mathbb{C}^2$ , giacché oltre ad avere norma unitaria, sono ortogonali:

$$\langle 0|1\rangle = 0, \quad (18)$$

dove nella notazione di Dirac il simbolo  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  denota il prodotto interno. Inoltre [2] essi sono *autovettori* o *autostati* dell'osservabile  $S_k$  che è a sua volta rappresentata da un *operatore hermitiano* [2] che agisce sui vettori di  $\mathbb{C}^2$ :

$$S_k |\alpha\rangle = |\beta\rangle \in \mathbb{C}^2, \quad \forall |\alpha\rangle \in \mathbb{C}^2 \quad (19)$$

In particolare

$$\begin{aligned} S_k |0\rangle &= +\frac{\hbar}{2} |0\rangle \\ S_k |1\rangle &= -\frac{\hbar}{2} |1\rangle, \end{aligned} \quad (20)$$

da cui la denominazione *autovettore*, in quanto l'applicazione di  $S_k$  a  $|0\rangle$  o  $|1\rangle$  restituisce il vettore medesimo, a meno di una costante moltiplicativa, chiamata *autovalore*. Il carattere hermitiano assicura la realtà degli autovalori [2] che rappresentano i risultati di una misura ( $\pm \frac{\hbar}{2}$  nel caso in esame). È utile la rappresentazione matriciale dei vettori ket di  $\mathbb{C}^2$ :

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (21)$$

per cui

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} c_+ \\ c_- \end{pmatrix}, \quad (22)$$

Come è noto, a ogni spazio vettoriale possiamo associare univocamente il suo spazio duale. Nel caso di  $\mathbb{C}^2$ , nella notazione di Dirac gli elementi del duale di  $\mathbb{C}^2$  sono i *vettori bra*:

$$\langle \psi | = ( c_+^* \quad c_-^* ), \quad (23)$$

ove  $c_{\pm}^*$  è il complesso coniugato di  $c_{\pm}$ . In tal modo è immediato eseguire il prodotto interno e quindi il quadrato della *norma* (che è l'analogo della lunghezza di un vettore appartenente a uno spazio euclideo):

$$||\psi\rangle||^2 = \langle \psi | \psi \rangle = ( c_+^* \quad c_-^* ) \begin{pmatrix} c_+ \\ c_- \end{pmatrix} = |c_+|^2 + |c_-|^2, \quad (24)$$

come appunto deve essere. L'ortogonalità di  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$  è immediata:

$$\langle 0 | 1 \rangle = ( 1 \quad 0 ) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (25)$$

L'operatore hermitiano  $S_k$  è poi rappresentato da una matrice hermitiana, e per una nota proprietà di tali matrici (riescono diagonali nella base composta dagli autovettori) si ha:

$$S_k = \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\hbar}{2} \end{pmatrix} \quad (26)$$

In tal modo ritroviamo le (20). Ad esempio:

$$S_k |0\rangle = \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\hbar}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} |0\rangle \quad (27)$$

Nella notazione di Dirac l'operatore  $S_k$  si scrive:

$$S_k = \frac{\hbar}{2} (|0\rangle \langle 0| - |1\rangle \langle 1|) \quad (28)$$

Tutto questo per un assegnato asse cartesiano (individuato da  $k \in \{x, y, z\}$ ) rispetto al quale abbiamo deciso di eseguire la misura. Se oltre a un assegnato  $k$ , consideriamo un altro asse individuato da  $k' \neq k$ , possiamo denotare gli autostati della componente  $S_{k'}$  dello spin con  $|0'\rangle$ ,  $|1'\rangle$ , che compongono una nuova base ortornomale dello spazio di Hilbert associato al sistema. Più precisamente:

$$\begin{aligned} S_{k'} |0'\rangle &= +\frac{\hbar}{2} |0'\rangle \\ S_{k'} |1'\rangle &= -\frac{\hbar}{2} |1'\rangle \end{aligned} \quad (29)$$

Ciò implica che gli autostati di  $S_k$  cioè  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ , si esprimono come combinazione lineare degli autostati di  $S_{k' \neq k}$ :

$$\begin{aligned} |0\rangle &= \alpha_+ |0'\rangle + \alpha_- |1'\rangle \\ |1\rangle &= \beta_+ |0'\rangle + \beta_- |1'\rangle \end{aligned} \quad (30)$$

Senza perdita di generalità, supponiamo che  $S_k = S_z$  e  $S_{k'} = S_x$ . In tal caso, le (30) si scrivono nella forma più chiara:

$$\begin{aligned} |\uparrow\rangle &= \alpha_+ |\rightarrow\rangle + \alpha_- |\leftarrow\rangle \\ |\downarrow\rangle &= \beta_+ |\rightarrow\rangle + \beta_- |\leftarrow\rangle \end{aligned} \quad (31)$$

Se misuriamo  $S_z$  ottenendo (ad esempio) spin up, dalle (31) vediamo che ora lo stato è una sovrapposizione lineare degli stati di spin (secondo l'asse  $x$ )  $|\rightarrow\rangle$  e  $|\leftarrow\rangle$ . Quindi se ora decidiamo di misurare  $S_x$  abbiamo una probabilità  $|\alpha_+|^2$  di ottenere  $+\hbar/2$  (spin nella direzione positiva dell'asse  $x$ ), e una probabilità  $|\alpha_-|^2$  di ottenere  $-\hbar/2$  (spin nella direzione negativa dell'asse  $x$ ).

Per quanto precede, il formalismo matematico degli operatori  $S_k$  "parla" il linguaggio delle matrici. Più precisamente:

$$\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2} \boldsymbol{\sigma}, \quad (32)$$

dove  $\boldsymbol{\sigma}$  è il vettore delle *matrici di Pauli*:

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z),$$

con

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (33)$$

Per non perderci nel formalismo matematico, illustriamo graficamente quanto detto. In fig. 2 lo spin  $\mathbf{S}$  è in tratteggio, in quanto il principio di indeterminazione impedisce la conoscenza delle componenti di  $\mathbf{S}$ . Ciò che invece conosciamo esattamente sono le probabilità che una misura di una assegnata componente  $S_k$  fornisca  $\pm \frac{\hbar}{2}$ . Tale circostanza ci obbliga a sostituire lo spazio fisico (dove, cioè, è definito il vettore  $\mathbf{S}$ ) con uno spazio astratto bidimensionale, in cui un assegnato vettore unitario ha per componenti le predette ampiezze di probabilità, cioè i numeri complessi  $c_{\pm}$  (cfr. fig. 3).

## 4 Il quantum bit

Dal punto di vista della teoria dell'informazione le variabili dicotomiche  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$  implementano una coppia di variabili *statisticamente indipendenti*. Sussiste, quindi, la seguente definizione:



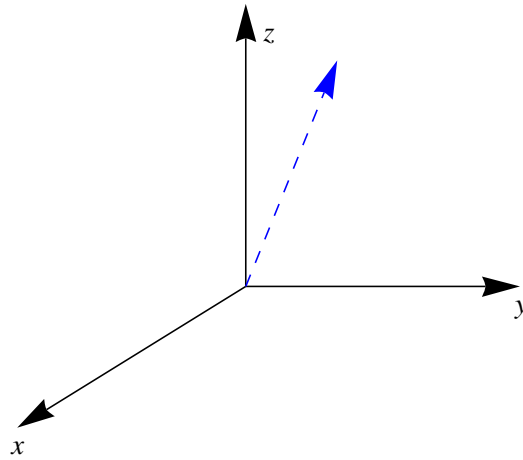


Figura 2: Il tratteggio simboleggia l'indeterminazione sulle componenti  $S_x, S_y, S_z$  di un sistema quantistico di spin  $1/2$ .

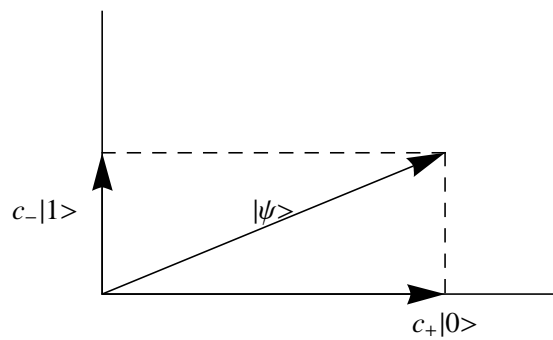


Figura 3: Rappresentazione simbolica di uno spazio di Hilbert 2-dimensionale, che implementa lo spazio degli stati per un sistema di spin  $1/2$ .

**Definizione 3** Il **bit** è la quantità minima di informazione necessaria per distinguere due eventi statisticamente indipendenti relativi a un assegnato processo aleatorio.

Ad esempio considerando come processo aleatorio il lancio di una moneta, si ha che gli eventi statisticamente indipendenti relativi a tale processo, sono Testa e Croce ossia i possibili risultati del lancio medesimo. Quindi

$$\begin{aligned} \text{Testa} &\rightarrow \text{bit } 0 \\ \text{Croce} &\rightarrow \text{bit } 1 \end{aligned} \quad (34)$$

Nel caso quantistico oltre ai bit classici  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ , abbiamo un **quantum bit** o **qubit**, dato dalla (16) che qui riscriviamo

$$|\psi\rangle = c_+ |0\rangle + c_- |1\rangle, \quad (35)$$

dove, ricordiamolo, i coefficienti complessi  $c_{\pm}$  verificano la condizione di normalizzazione:

$$|c_+|^2 + |c_-|^2 = 1 \implies \|\psi\|^2 = 1 \quad (36)$$

Anche se idealmente possiamo inglobare in un qubit  $|\psi\rangle$  una quantità infinita di informazione (al variare dei coefficienti normalizzati  $c_{\pm}$ ), in realtà i bit disponibili sono quelli classici, ovvero  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ , giacché in seguito alla misura il qubit si riduce a uno dei due bit classici componenti. Quindi l'informazione infinita è potenzialmente inglobata in un qubit e al tempo stesso rimane confinata nella dimensione submicroscopica, per cui è inutilizzabile per le ragioni appena esposte.

Un *analizzatore di spin* è implementato da un **apparato di Stern-Gerlach** che realizza un'operazione di misura di  $S_k$  comportandosi alla stregua di un dispositivo (macroscopico) che accetta in input un qubit e restituisce in output un bit, come appare nello schema di fig. 4. La "cancellazione" del bit non misurato, potrebbe essere apparente nel senso che secondo alcune **teorie**, in seguito all'operazione di misura l'universo si riproduce in due copie distinte, in modo da riprodurre entrambe le variabili 0/1. Se ad esempio, il risultato della misura è l'autostato  $|0\rangle$ , il rimanente autostato  $|1\rangle$  viene *salvato* in una copia dell'universo prodotta dall'operazione di misura. In tale paradigma l'operazione di misura di una qualunque osservabile quantistica è un'operazione di *cloning* (o di *splitting*) dell'universo in un numero di copie pari alla cardinalità dello spettro degli autovalori dell'osservabile medesima.

## 5 Sistemi compositi. Registri a due celle

Supponiamo ora che il nostro microsistema  $\Sigma$  sia un *sistema composito*, nel senso che è costituito da due sottosistemi  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$ , entrambi di spin  $1/2$ . In tal caso lo spazio di Hilbert associato a  $\Sigma$  è il prodotto tensoriale degli spazi di Hilbert di singolo sottosistema [2]:

$$\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \quad (37)$$

La dimensione di tale spazio è

$$\dim \mathcal{H} = 4 \quad (38)$$

Lo spin dell'intero sistema  $\Sigma$  si ottiene da una complicata regola di composizione che qui omettiamo, rimandando a [2]. Il caso che ci interessa è il cosiddetto *singoletto di spin*, cioè spin totale nullo. Intuitivamente si possono immaginare i due spin dei sistemi componenti antiparalleli in modo da riprodurre una risultante nulla, prendendo con le dovute cautele tale modalità di visualizzazione,

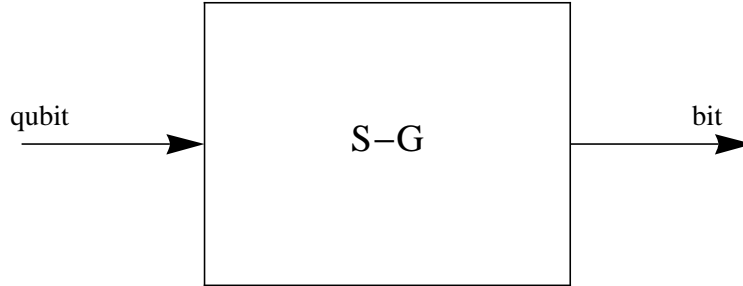


Figura 4: Schema a blocchi di un analizzatore di spin (*apparato di Stern-Gerlach*) per un sistema di spin  $1/2$ .

giacché lo spin è un'osservabile quantistica priva di analogo classico. Iniziamo con l'osservare che la base canonica dello spazio prodotto tensoriale è:

$$\{|0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2, |0\rangle_1 \otimes |1\rangle_2, |1\rangle_1 \otimes |0\rangle_2, |1\rangle_1 \otimes |1\rangle_2\}, \quad (39)$$

essendo

$$\{|0\rangle_j, |1\rangle_j\}, \quad j \in \{1, 2\} \quad (40)$$

il sistema di autovettori della componente  $k$ -esima dello spin di  $\Sigma_j$ . A prescindere dal predetto caso particolare di singoletto di spin, il più generale vettore ket dello spazio prodotto tensoriale è

$$|\psi\rangle = c_1 |0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 + c_2 |0\rangle_1 \otimes |1\rangle_2 + c_3 |1\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 + c_4 |1\rangle_1 \otimes |1\rangle_2 \quad (41)$$

Se  $|\psi\rangle$  è il vettore di stato del sistema composito, imponiamo la normalizzazione:

$$\langle\langle\psi|\psi\rangle\rangle = \sum_{k=1}^4 |c_k|^2 = 1 \quad (42)$$

Da un punto di vista computazionale il microsistema  $\Sigma$  implementa un *registro a due celle*, costituito dai microsistemi  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$ , i cui stati sono simboleggiati da

$$\uparrow\uparrow, \uparrow\downarrow, \downarrow\uparrow, \downarrow\downarrow \quad (43)$$

che corrispondono agli stati binari:

$$00, 01, 10, 11 \quad (44)$$

La (41) ci dice che il registro  $\Sigma$  è in uno stato di sovrapposizione lineare di coppie di stati binari dati dalla (44). La singola coppia binaria può essere estratta attraverso una misura di una assegnata componente di spin. A tale scopo denotiamo con  $\mathbf{S}_j = (S_{jx}, S_{jy}, S_{jz})$  il momento angolare di spin del sottosistema  $\Sigma_j$ . Eseguendo una misura di  $S_{1k}$ , i risultati possibili sono:

$$|\psi\rangle \xrightarrow{\text{mis } S_{1k}} c_1 |0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 + c_2 |0\rangle_1 \otimes |1\rangle_2 \quad \text{con probabilità } |c_1|^2 + |c_2|^2 \quad (45)$$

e

$$|\psi\rangle \xrightarrow{\text{mis } S_{1k}} c_3 |1\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 + c_4 |1\rangle_1 \otimes |1\rangle_2 \text{ con probabilità } |c_3|^2 + |c_4|^2 \quad (46)$$

Nel primo caso il sottosistema  $\Sigma_1$  viene a trovarsi nello stato  $|0\rangle_1$ , mentre nel secondo caso lo stato risultante è  $|1\rangle_1$ . D'altra parte, il sottosistema  $\Sigma_2$  permane nella sovrapposizione lineare di  $|0\rangle_2$  e  $|1\rangle_2$ . Una situazione analoga si verifica se eseguiamo una misura di  $S_{2k}$ , cioè della componente del momento angolare di spin di  $\Sigma_2$  secondo la direzione dell'asse  $k \in \{x, y, z\}$ .

Sussiste la seguente definizione:

**Definizione 4** Si dice **spazio di Bell** il seguente sottospazio vettoriale di  $\mathcal{H}$  (eq. (37)):

$$V_{Bell} \stackrel{def}{=} \mathcal{L}(\{|0\rangle_1 \otimes |1\rangle_2, |1\rangle_1 \otimes |0\rangle_2\}), \quad (47)$$

ove  $\mathcal{L}$  denota l'involuppo lineare, ovvero l'insieme delle combinazioni lineari di vettori tra parentesi. Un qualunque elemento di  $V_{Bell}$  di norma unitaria, si dice **stato di Bell** :

$$|\psi\rangle_{Bell} = \gamma_1 |0\rangle_1 \otimes |1\rangle_2 + \gamma_2 |1\rangle_1 \otimes |0\rangle_2, \quad (|\gamma_1|^2 + |\gamma_2|^2 = 1) \quad (48)$$

Se lo stato di  $\Sigma$  è uno stato di Bell, misurando  $S_1$  può aversi:

$$|\psi\rangle_{Bell} \xrightarrow{\text{mis } S_{1k}} |0\rangle_1 \otimes |1\rangle_2 \text{ con probabilità } |\gamma_1|^2 \quad (49)$$

oppure

$$|\psi\rangle_{Bell} \xrightarrow{\text{mis } S_{1k}} |1\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 \text{ con probabilità } |\gamma_2|^2 \quad (50)$$

In entrambi i casi, la misura della osservabile  $S_1$  distrugge la sovrapposizione lineare sia di  $\Sigma_1$  che di  $\Sigma_2$ . Infatti per quest'ultimo si ha come stato risultante  $|1\rangle_2$  o  $|0\rangle_2$ . In altri termini, una qualunque misura su  $\Sigma_1$  ha effetti su  $\Sigma_2$ , anche se tali sottosistemi sono spazialmente separati. In tal caso, sussiste la seguente definizione:

**Definizione 5** Il sistema composto  $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$  è **non-separabile** o **entangled** se e solo se il suo vettore di stato appartiene allo spazio di Bell.

## 6 Teorema no-signaling

Un esempio interessante è fornito dal processo di scattering protone-protone a basse energia. Per il principio di esclusione di Pauli il sistema  $\Sigma$  composto dai due protoni, viene a trovarsi nello stato di singoletto di spin, cioè spin totale 0. In questo caso particolare, il vettore di stato si scrive [2]:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_1 \otimes |1\rangle_2 - |1\rangle_1 \otimes |0\rangle_2), \quad (51)$$

avendo orientato l'analizzatore di spin nella direzione dell'asse  $z$ . Cioè  $|0\rangle_j$  e  $|1\rangle_j$  sono gli autostati della componente  $z$  (i.e.  $S_{jz}$ ) della particella  $j$ -esima. Dalla (51) vediamo che il singoletto di spin è uno stato di Bell. In particolare abbiamo una probabilità del 50% di trovare: spin up per la particella 1 - spin down per la particella 2. In questo esperimento concettuale le particelle vengono diffuse lungo la stessa retta ma in versi opposti come mostrato in fig. 5, dove abbiamo denotato con  $A$  e  $B$  rispettivamente Alice e Bob, ovvero i due osservatori in quiete nel sistema di riferimento inerziale rispetto al quale si muovono le particelle.

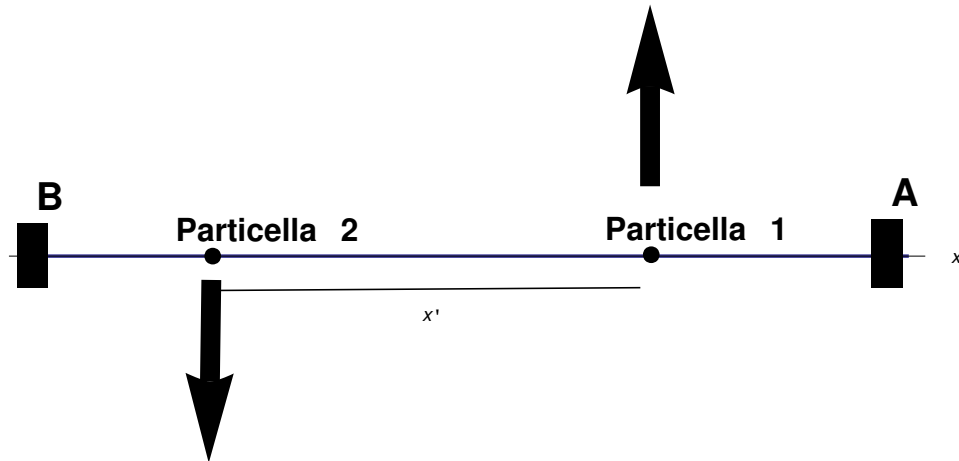


Figura 5: A e B rappresentano Alice e Bob i quali muniti di un analizzatore di spin, misurano la componente  $z$  delle rispettive particelle.

Per quanto precede, se A misura la componente  $z$  dello spin della particella 1 (cioè  $S_{1z}$ ), esiste una probabilità del 50% di trovare spin up o down. Se il risultato è up, allora potrà asserire con certezza che il risultato di B sarà down, anche se B non compie misure. È importante sottolineare il fatto che A esegue la misura *prima* di B. Nel caso contrario B ha una probabilità del 50% di trovare up o down, e in base al risultato ottenuto, conoscerà con certezza il risultato trovato successivamente da A, anche se A si trova ad anni luce di distanza.

Consideriamo ora il seguente scenario: mentre Bob misura la componente  $S_x$  dello spin della particella 2, Alice è libera di scegliere di misurare  $S_z$  o  $S_x$  della particella 1, supponendo che le misure di A siano eseguite prima delle misure di B. Se A misura  $S_z$ , B ha una probabilità del 50% di trovare  $S_x$  positivo o negativo. Infatti, se A ottiene ad esempio  $S_z$  positivo (up), necessariamente la particella 2 si porta in down, e quest'ultimo si esprime come combinazione lineare degli autostati di  $S_x$  (della particella 2) con coefficienti  $1/\sqrt{2}$  (a meno di un segno negativo), onde la probabilità è  $1/2$ . In altri termini, se A misura  $S_z$ , il risultato delle misure di B è indeterminato. Viceversa se A misura  $S_x$ , allora il risultato delle misure di B è completamente determinato. In sintesi:

1. **Alice misura  $S_z$ ; Bob misura  $S_x$**

Le due misure sono scorrelate al 100%.

2. **Alice misura  $S_x$ ; Bob misura  $S_x$**

Le due misure sono correlate al 100%.

3. **Alice non compie misure**

I risultati delle misure di B sono casuali.

Il caso più interessante è il n. 2, in cui una possibile tabella di risultati delle misure è la seguente:

A	B
0	1
1	0
1	0
0	1
1	0
0	1

Il predetto caso è caratterizzato dalla condizione  $k = k'$  con  $k \in \{x, y, z\}$ . In altre parole, Alice e Bob si mettono d'accordo di misurare componenti omonime del momento angolare di spin delle rispettive particelle (1 e 2). Il risultato trovato da B in seguito alle misure eseguite da A è:

$$y(n) \in \{0, 1\} - \{n\}, \quad \forall n \in \{0, 1\}, \quad (52)$$

dove  $n$  è il risultato trovato da A. Si noti l'analogia di  $y(n)$  con un **segnale deterministico**  $y(t)$ , cioè tale che il valore assunto da  $y$  nell'istante  $t' > t$  è univocamente determinato dal valore assunto da  $y$  al tempo  $t$ . Nel caso di  $y(n)$  la variabile continua  $t$  è rimpiazzata dalla variabile discreta  $n$  che può assumere solo i valori 0/1. La grandezza  $y(n)$  è comunque una variabile deterministica, in quanto si comporta alla stregua di un segnale però non nel dominio del tempo o delle frequenze (a meno di una trasformata di Fourier), ma nel *dominio degli stati di spin*. Tale processo deterministico implementa un *commutatore di stati logici*, in virtù della (52). Infatti, se in seguito all'operazione di misura il microsistema  $\Sigma_1$  occupa lo stato logico 0, il microsistema  $\Sigma_2$  verrà *istantaneamente* a trovarsi nello stato logico 1.

Il caso n. 1 è invece caratterizzato dalla condizione  $k \neq k'$ , giacché A e B misurano componenti eteronime dello spin di singola particella. In luogo della (52) ora abbiamo

$$y(n) \in \{0, 1\}, \quad \forall n \in \{0, 1\} \quad (53)$$

Ne consegue che la variabile  $y$  è un processo aleatorio, in quanto i valori che tale variabile assume non sono univocamente determinati da  $n$ . Più precisamente, tali valori sono scorrelati al 100%. Nel linguaggio delle **funzioni di autocorrelazione** ciò si esprime dicendo che la corrispondente funzione di autocorrelazione è identicamente nulla. Come è noto, in questo caso la variabile aleatoria  $y(n)$  è un white noise. Una possibile tabella di misure è

A	B
0	0
1	0
1	1
0	0
1	1
0	1

Questi risultati esprimono il *Teorema no-signaling* secondo cui non è possibile trasmettere informazione da un punto all'altro utilizzando i fenomeni di Entanglement.

## 7 Teorema di Bell

Siano  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{n}'$  le direzioni orientate rispetto alle quali Alice e Bob misurano le componenti dello spin di singola particella nell'esperimento concettuale esaminato nella sezione precedente. Denotiamo tali componenti con la notazione:

$$S_1(\mathbf{n}) = \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{n}, \quad S_2(\mathbf{n}') = \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{n}' \quad (54)$$

Dal momento che le misure sulla particella 1 hanno effetti sulle misure eseguite sulla particella 2 e viceversa, i simboli (54) vanno riscritti come

$$S_1(\mathbf{n}, \mathbf{n}'), \quad S_2(\mathbf{n}, \mathbf{n}') \quad (55)$$

Si noti che tali simboli non esprimono una dipendenza funzionale da  $\mathbf{n}, \mathbf{n}'$ , giacché i risultati possibili sono:

$$S_j(\mathbf{n}, \mathbf{n}') = \pm \frac{\hbar}{2}, \quad \forall \mathbf{n}, \mathbf{n}' \in \mathbb{R}^3 \quad (56)$$

In altri termini, la posizione (55) presuppone un'azione a distanza ovvero l'esistenza di un campo di interazione *non locale*, violando quindi il *Principio di località di Einstein*, il quale ultimo esclude eventuali azioni a distanza. D'altra parte, il *localismo* può essere recuperato invocando l'esistenza di **variabili nascoste** che siano in grado di riprodurre i risultati delle misure. In luogo delle (55) abbiamo

$$S_1(\mathbf{n}, \lambda), \quad S_2(\mathbf{n}, \lambda), \quad (57)$$

dove  $\lambda \in \Lambda \subseteq \mathbb{R}$  è un parametro ignoto che ingloba le variabili nascoste. Ad esempio, misurando componenti omonime:

$$S_1(\mathbf{n}, \lambda) = \pm \frac{\hbar}{2} \iff S_2(\mathbf{n}, \lambda) = \mp \frac{\hbar}{2} \quad (58)$$

In generale

$$|S_1(\mathbf{n}, \lambda)| = +\frac{\hbar}{2}, \quad |S_2(\mathbf{n}', \lambda)| = +\frac{\hbar}{2} \quad (59)$$

Non conoscendo i valori assunti da  $\lambda$ , possiamo congetturare che si tratti di una variabile aleatoria con densità di probabilità  $p(\lambda)$  (altrettanto ignota):

$$p(\lambda) \geq 0, \quad \int_{\Lambda} p(\lambda) d\lambda = 1 \quad (60)$$

Possiamo svincolarci da  $\lambda$  integrando su tale variabile, per ottenere la *correlazione*:

$$f(\mathbf{n}, \mathbf{n}') = \int_{\Lambda} p(\lambda) S_1(\mathbf{n}, \lambda) S_2(\mathbf{n}', \lambda) d\lambda, \quad (61)$$

dopo aver adimensionalizzato le grandezze  $S_1(\mathbf{n}, \lambda)$ ,  $S_2(\mathbf{n}', \lambda)$ :

$$S_j(\mathbf{n}, \lambda) \rightarrow \frac{2}{\hbar} S_j(\mathbf{n}, \lambda) = S'_j(\mathbf{n}, \lambda) \stackrel{def}{=} S_j(\mathbf{n}, \lambda) \quad (62)$$

La funzione  $f(\mathbf{n}, \mathbf{n}')$  ci dice in che modo le variabili nascoste  $\lambda$  connettono le misure eseguite sulle singole particelle. Ciò premesso, sussiste il seguente teorema

**Teorema 6 (Teorema di Bell)**

$$|f(\mathbf{n}, \mathbf{n}') - f(\mathbf{n}, \mathbf{n}''')| + |f(\mathbf{n}'', \mathbf{n}''') + f(\mathbf{n}'', \mathbf{n}')| \leq 2, \quad \forall \mathbf{n}, \mathbf{n}', \mathbf{n}'', \mathbf{n}''' \in \mathbb{R}^3 \quad (63)$$

La (63) è nota come **disuguaglianza di Bell**.

**Dimostrazione.** Scriviamo

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{n}, \mathbf{n}') - f(\mathbf{n}, \mathbf{n}''') &= \int_{\Lambda} p(\lambda) S_1(\mathbf{n}, \lambda) S_2(\mathbf{n}', \lambda) d\lambda - \int_{\Lambda} p(\lambda) S_1(\mathbf{n}, \lambda) S_2(\mathbf{n}''', \lambda) d\lambda \\
&= \int_{\Lambda} p(\lambda) S_1(\mathbf{n}, \lambda) S_2(\mathbf{n}', \lambda) d\lambda - \int_{\Lambda} p(\lambda) S_1(\mathbf{n}, \lambda) S_2(\mathbf{n}''', \lambda) d\lambda \\
&\pm \int_{\Lambda} p(\lambda) S_1(\mathbf{n}, \lambda) S_2(\mathbf{n}', \lambda) S_1(\mathbf{n}'', \lambda) S_2(\mathbf{n}''', \lambda) d\lambda \\
&\mp \int_{\Lambda} p(\lambda) S_1(\mathbf{n}, \lambda) S_2(\mathbf{n}', \lambda) S_1(\mathbf{n}'', \lambda) S_2(\mathbf{n}''', \lambda) d\lambda
\end{aligned} \tag{64}$$

Cioè

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{n}, \mathbf{n}') - f(\mathbf{n}, \mathbf{n}''') &= \int_{\Lambda} p(\lambda) S_1(\mathbf{n}, \lambda) S_2(\mathbf{n}', \lambda) [1 \pm S_1(\mathbf{n}'', \lambda) S_2(\mathbf{n}''', \lambda)] d\lambda \\
&- \int_{\Lambda} p(\lambda) S_1(\mathbf{n}, \lambda) S_2(\mathbf{n}''', \lambda) [1 \pm S_1(\mathbf{n}'', \lambda) S_2(\mathbf{n}', \lambda)] d\lambda
\end{aligned} \tag{65}$$

Segue

$$\begin{aligned}
|f(\mathbf{n}, \mathbf{n}') - f(\mathbf{n}, \mathbf{n}''')| &\leq \int_{\Lambda} p(\lambda) \underbrace{|S_1(\mathbf{n}, \lambda)|}_{=1} \underbrace{|S_2(\mathbf{n}', \lambda)|}_{=1} [1 \pm S_1(\mathbf{n}'', \lambda) S_2(\mathbf{n}''', \lambda)] d\lambda \\
&+ \int_{\Lambda} p(\lambda) \underbrace{|S_1(\mathbf{n}, \lambda)|}_{=1} \underbrace{|S_2(\mathbf{n}''', \lambda)|}_{=1} [1 \pm S_1(\mathbf{n}'', \lambda) S_2(\mathbf{n}', \lambda)] d\lambda \\
&= \int_{\Lambda} p(\lambda) [1 \pm S_1(\mathbf{n}'', \lambda) S_2(\mathbf{n}''', \lambda)] d\lambda \\
&+ \int_{\Lambda} p(\lambda) [1 \pm S_1(\mathbf{n}'', \lambda) S_2(\mathbf{n}', \lambda)] d\lambda \\
&= 2 \underbrace{\int_{\Lambda} p(\lambda) d\lambda}_{=1} \pm \underbrace{\int_{\Lambda} p(\lambda) S_1(\mathbf{n}'', \lambda) S_2(\mathbf{n}''', \lambda) d\lambda}_{=f(\mathbf{n}'', \mathbf{n}''')} \pm \underbrace{\int_{\Lambda} p(\lambda) S_1(\mathbf{n}'', \lambda) S_2(\mathbf{n}', \lambda) d\lambda}_{=f(\mathbf{n}'', \mathbf{n}')}
\end{aligned}$$

Cioè

$$|f(\mathbf{n}, \mathbf{n}') - f(\mathbf{n}, \mathbf{n}''')| \leq 2 \pm [f(\mathbf{n}'', \mathbf{n}''') + f(\mathbf{n}'', \mathbf{n}')]$$

onde l'asserto. ■

Dal teorema appena dimostrato discende che le correlazioni di spin sono dovute a variabili nascoste se e solo se le predette correlazioni verificano la disuguaglianza di Bell. Nel caso specifico di un sistema costituito da due sottosistemi di spin 1/2, si perviene a una violazione della disuguaglianza di Bell, nel senso che

$$\exists \mathbf{n}, \mathbf{n}', \mathbf{n}'', \mathbf{n}''' \in \mathbb{R}^3 \mid |f(\mathbf{n}, \mathbf{n}') - f(\mathbf{n}, \mathbf{n}''')| + |f(\mathbf{n}'', \mathbf{n}''') + f(\mathbf{n}'', \mathbf{n}')| > 2$$

Ne concludiamo la non-località dei fenomeni di Entanglement, in forza della non esistenza di variabili nascoste in grado di correlare le misure di spin eseguite sui singoli sottosistemi.



Nel caso in esame la domanda è: il segnale viene ricevuto prima di essere trasmesso? Questo è un esempio di *paradosso di incoerenza* che sostanzialmente nasce dalle trasformazioni di Lorentz e dalla metrica pseudoeuclidea dello spaziotempo della Relatività Speciale.

Peraltro, il paradosso ha luogo perchè si considera un trasferimento di energia oltre che di informazione. Questo è proprio il caso dell'EM-channel, cioè delle onde elettromagnetiche. Consideriamo ad esempio la propagazione di un pacchetto d'onde. Se  $f(\mathbf{x}, t)$  è la generica componente del campo elettrico/magnetico (o del potenziale vettore), si ha con ovvio significato dei simboli:

$$f(\mathbf{x}, t) = A \int_{\Delta k} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega(k)t)} d^3k,$$

ove  $\omega(k)$  determina la legge di dispersione del mezzo in cui il pacchetto si propaga. Per inciso, la velocità di fase

$$v_f = \frac{\omega}{k}$$

può benissimo superare la velocità della luce, mentre la velocità di gruppo  $v_g = \frac{d\omega(k)}{dk}$  non può, ed è proprio a questa velocità che avviene il trasferimento di energia. Nell'EPR-Channel invece, non si ha trasferimento di energia. Anzi, qui la variabile continua  $\mathbf{x}$  sparisce per lasciare il posto a variabili "piazzate" in uno spazio di Hilbert. Ora le variabili sono quantizzate ed assumono due valori distinti del tipo 0/1 cioè bit di informazione e il sistema vive in una sovrapposizione di bit dando luogo ai qubit (quantum bit). Per un sistema composito si passa al prodotto tensoriale dei rispettivi spazi di Hilbert e le correlazioni sono istantanee proprio perchè è sparita la variabile  $\mathbf{x}$ . Non c'è trasferimento di energia ma solo di informazione, per cui la Relatività Speciale non viene intaccata. Il problema è che si tratta di informazione scorrelata o meglio, disordinata (ciò che in fisica si chiama rumore). Tutto questo ci richiama metaforicamente la questione del calore in termodinamica che è una forma di energia, ma degradata e come tale inutilizzabile.

## Riferimenti bibliografici

- [1] Caldirola P., *Dalla microfisica alla macrofisica*
- [2] Sakurai. *Meccanica Quantistica moderna*
- [3] Caldirola P. *Introduzione alla Fisica Teorica*
- [4] Onofri. *Istituzioni di Fisica Teorica*