Appunti di Fisica 1

Marcello Colozzo http://www.extrabyte.info

1 Energia potenziale

Sia $\mathbf{F}(x, y, z)$ un campo conservativo definito in $D \subseteq \mathbb{R}^3$. Per quanto precede, il lavoro compiuto da $\mathbf{F}$ per spostare un punto materiale da $A(x_1, y_1, z_1) \in D$ a $B(x_2, y_2, z_2) \in D$ dipende esclusivamente dalle coordinate dei predetti punti:

$$L = \int_{\gamma(A,B)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

e non dal percorso seguito (arco di curva γ). Nei casi particolari di campo uniforme e campo centrale, si ha

$$L = \begin{cases} F(y_2 - y_1), & \text{campo uniforme} \\ \int_{r_1}^{r_2} F(r)\, dr, & \text{campo centrale} \end{cases} \tag{1}$$

essendo

$$r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}, \quad r_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$$

Ciò suggerisce di definire una funzione $V(x, y, z)$ tale che

$$V(x_1, y_1, z_1) - V(x_2, y_2, z_2) = \int_{\gamma(A,B)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = L \tag{2}$$

In altri termini, la grandezza scalare $V(x, y, z)$ è tale che la differenza $V(A) - V(B)$ è il lavoro eseguito da $\mathbf{F}$ per spostare un punto materiale da A a B, lungo un qualunque percorso.

Definizione 1 *La grandezza scalare $V(x, y, z)$ si chiama* **energia potenziale**.

Il contenuto fisico di tale definizione è il seguente: l'energia potenziale consente di descrivere un campo conservativo attraverso la capacità delle forze del campo di compiere lavoro quando un corpo (punto materiale) passa da una posizione ad un'altra. Più specificatamente, lo scalare $V(x, y, z)$ è la capacità del campo a compiere lavoro per il solo fatto che il punto materiale occupa la posizione (x, y, z).

La (2) può essere riscritta

$$V_2 - V_1 = -\int_{\gamma(A,B)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}, \quad (V_1 = V(A), \ V_2 = V(B)) \tag{3}$$

Per un assegnato $A(x_1, y_1, z_1)$ e per $B \equiv P(x, y, z)$, la precedente diventa:

$$V(x, y, z) = V(x_1, y_1, z_1) - \int_{\gamma(A,P)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}, \quad \forall (x, y, z) \in D$$

o ciò che è lo stesso

$$V(x, y, z) = C - \int_{\gamma(A,P)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}, \quad \forall (x, y, z) \in D \tag{4}$$

essendo C una costante arbitraria che si identifica con il valore assunto dall'energia potenziale in un punto A fissato ad arbitrio. Ne consegue che l'energia potenziale è definita a meno di una inessenziale costante additiva. Inessenziale, giacché non misurabile (fisicamente possiamo misurare la differenza di energia potenziale pari al lavoro svolto dal campo). Esaminiamo alcuni casi particolari.

1.1 Energia potenziale di un campo uniforme

Dalla prima delle (1):

$$L = F\left(y_2 - y_1\right)$$

Qui è $A\left(x_1, y_1\right)$, $B\left(x_2, y_2\right)$ in un piano contenente la retta di azione della forza costante $\mathbf{F}$ e passante per la posizione iniziale del punto materiale. Ridefiniamo

$$A\left(x_0, y_0\right), \quad P\left(x, y\right), \quad \forall\left(x, y\right)$$

Segue

$$L = F\left(y - y_0\right) \Longrightarrow dL = Fdy,$$

cosicché

$$V\left(y\right) = V\left(y_0\right) - \int_{y_0}^{y} Fdy' = V\left(y_0\right) - F\left(y - y_0\right) \tag{5}$$

Nel caso del campo della forza di gravità (peso) $P = m\mathbf{g}$, il predetto piano è un piano verticale, e l'energia potenziale del campo si esprime come

$$V\left(y\right) = V\left(y_0\right) - mgy + mgy_0 \tag{6}$$

Solitamente si sceglie $V\left(y_0\right) = -mgy_0$, onde

$$V\left(y\right) = -mgy \tag{7}$$

Si noti che il segno $-$ compare per la particolare orientazione dell'asse y (verso il basso). Viceversa, orientando tale asse verso l'alto, si ha

$$V\left(y\right) = mgy \tag{8}$$

1.2 Energia potenziale di un campo centrale

Dalla seconda delle (1):

$$L = \int_{r_1}^{r_2} F\left(r\right) dr$$

Ridefiniamo

$$A\left(r_0\right), \; B \equiv P\left(r\right), \quad \forall r > 0$$

Quindi

$$V\left(r\right) = C - \int_{r_0}^{r} F\left(r'\right) dr', \quad \left(C = V\left(r_0\right)\right) \tag{9}$$

Consideriamo il caso particolare

$$F\left(r\right) = \frac{k}{r^2}, \tag{10}$$

che si presenta nella teoria della gravitazione (Newton) e in elettrostatica (campo generato da una carica elettrica puntiforme), tenendo presente che k può essere positiva o negativa. Segue

$$V\left(r\right) = C - k\int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{r'^2} = C + k \cdot \left.\frac{1}{r'}\right|_{r_0}^{r} = C + k\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$$

Inglobando il termine $C + \frac{k}{r_0}$ nella costante arbitaria

$$V\left(r\right) = C' + \frac{k}{r}, \quad C' \stackrel{def}{=} C + \frac{k}{r_0}$$

Dalla (10)

$$\lim_{r\to+\infty} F(r) = 0$$

cioè il campo si annulla all'infinito nelle coordinate spaziali. Quindi

$$0 = \lim_{r\to+\infty} V(r) = C,$$

onde

$$V(r) = \frac{k}{r} \tag{11}$$

1.3 Energia potenziale di un campo di forze elastiche

Ricordiamo che nel caso dell'oscillatore armonico unidimensionale, la forza di richiamo elastica si scrive:

$$F(x) = -kx \tag{12}$$

essendo $k > 0$ la costante elastica. È evidente che si tratta di una forza centrale (costantemente orientata verso l'origine $O\,(x=0)$). Quindi

$$V(x) = C - \int_{x_0}^{x} (-kx')\,dx' = C + \frac{1}{2}k\left(x^2 - x_0^2\right)$$

Cioè

$$V(x) = C' + \frac{1}{2}kx^2, \qquad (C' \overset{def}{=} C + \frac{1}{2}kx_0^2)$$

Si pone $V(0) = 0$ per cui $C' = 0$. Segue che l'energia potenziale di un campo di forze elastiche unidimensionali è

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2, \tag{13}$$

che si generalizza al caso tridimensionale, nello specifico per un oscillatore armonico tridimensionale isotropo:

$$V(r) = \frac{1}{2}kr^2, \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \tag{14}$$

Riferimenti bibliografici

[1] Sette D., 1968. *Lezioni di Fisica. Volume I*. Veschi