MATEMATICA OPEN SOURCE – HTTP://WWW.EXTRABYTE.INFO
Quaderni di Matematica – 2016

Appunti ed esercizi di Algebra lineare

Marcello Colozzo

$$f_n\left(x;x_1,x_2,...,x_n\right)=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & ... & x_{n-1} & x_n \\ 1 & x & x_2 & ... & x_{n-1} & x_n \\ 1 & x_1 & x & ... & x_{n-1} & x_n \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & x_1 & x_2 & ... & x_{n-1} & x_n \\ 1 & x_1 & x_2 & ... & x_{n-1} & x \end{vmatrix}$$

$$\Delta\left(n\right)=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \end{vmatrix},\quad n=2,3,4,...,+\infty \tag{1}$$

Indice

I Matrici e determinanti. Sistemi di equazioni lineari. Spazi vettoriali **7**

1 Matrici e determinanti **9**
1.1 Definizione di matrice 9
1.2 Classificazione delle matrici 9
1.3 Operazioni elementari sulle matrici 13
1.3.1 Somma e differenza di matrici 13
1.4 Determinanti 18
1.5 Minori di una matrice 25
1.6 Teorema di Laplace 29
1.7 Altre proprietà delle matrici 31
1.8 Inversa di una matrice 35
1.9 Rango di una matrice 37
1.10 Esercizi proposti 37
1.10.1 Operazioni sulle matrici e classificazione delle matrici 37
1.10.2 Minori e complementi algebrici 52
1.10.3 Calcolo di determinanti del secondo ordine 54
1.10.4 Calcolo di determinanti del terzo ordine 54
1.10.5 Calcolo di determinanti di ordine qualsiasi 55

2 Sistemi di equazioni lineari **63**
2.1 Generalità 63
2.2 Ricerca delle soluzioni 64
2.3 Sistemi normali: teorema di Cramer 65
2.4 Sistemi non normali: Teoremi di Rouchè e di Capelli 67
2.5 Sistemi omogenei 71
2.6 Esempi numerici 73

3 Spazi vettoriali **77**
3.1 Definizione assiomatica 77
3.2 Dipendenza ed indipendenza lineare di vettori 82
3.3 Sottospazio vettoriale generato da un numero finito di vettori 85
3.4 Sistemi massimi di vettori linearmente indipendenti di un insieme di vettori . 93
3.5 Basi e dimensioni di uno spazio vettoriale 95
3.6 Il metodo delle trasformazioni elementari 96
3.7 Cambiamento di base 99
3.8 Dimensione di un sottospazio vettoriale 102
3.9 Somma di due spazi vettoriali 103

3.10 Esercizi . . . 106
3.10.1 Soluzioni . . . 108

II Omomorfismi ed isomorfismi **119**

4 Applicazioni lineari tra spazi vettoriali **121**
4.1 Definizione di applicazione lineare . . . 121
4.2 Esercizi . . . 125
4.2.1 Soluzioni . . . 125

5 Omomorfismi e isomorfismi **127**
5.1 Introduzione . . . 127
5.2 Definizione assiomatica e teoremi conseguenti . . . 128
5.3 Esercizi . . . 132
5.3.1 Soluzioni . . . 133
5.4 Lo spazio vettoriale $Hom\,(E, F)$ . . . 135
5.5 Matrice rappresentativa . . . 137
5.6 Relazioni tra le componenti dei vettori trasformati . . . 139
5.7 Sistemi di equazioni lineari. Applicazione di K^n in K^m . . . 140
5.8 Prodotto di endomorfismi . . . 144
5.9 Endomorfismo inverso . . . 148
5.9.1 Esercizi . . . 148
5.10 Autovalori e autovettori di un endomorfismo . . . 151
5.10.1 Definizioni . . . 151
5.10.2 Polinomio caratteristico . . . 153
5.10.3 Endomorfismi diagonalizzabili . . . 156
5.10.4 Esercizi . . . 159
5.11 Similitudine . . . 174
5.11.1 Matrici simili . . . 174

6 Spazio duale **177**
6.1 Forme lineari . . . 177
6.2 Cambiamento di base nello spazio duale. . . . 181

7 Spazi vettoriali euclidei **185**
7.1 Introduzione . . . 185
7.2 Prodotto scalare . . . 185
7.3 Tensore metrico . . . 188
7.4 Spazi vettoriali propriamente euclidei e pseudo-euclidei . . . 190
7.5 Norma di un vettore . . . 190
7.6 Spazi metrici . . . 190
7.7 Base ortonormale . . . 191
7.8 Polinomi ortonormali . . . 193

III Appendici **197**

A Soluzioni degli esercizi proposti **199**

A.1 Calcolo di determinanti del secondo ordine 199

A.2 Determinanti del terzo ordine 201

A.3 Determinanti di ordine qualsiasi 202

Parte I

Matrici e determinanti. Sistemi di equazioni lineari. Spazi vettoriali

Capitolo 1

Matrici e determinanti

1.1 Definizione di matrice

Una **matrice** è una tabella di $m \times n$ elementi disposti per m righe e n colonne. Scriviamo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

A volte si utilizza la seguente notazione simbolica:

$$A = (a_{ij}) \quad \text{con } i = 1, ..., m;\ j = 1, ..., n$$

Gli elementi a_{ij} appartengono a un assegnato campo K.
Se $m = n$ si dice che A è una matrice quadrata di ordine n. Ad es.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

A è una matrice quadrata di ordine 2.

$$B = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cosh t & -5e^{t} \\ 2\sin t & e^{-2t} \\ -\sqrt{2}\sinh t & 10\sin t \end{pmatrix}$$

B è una matrice 3×2 i cui elementi sono funzioni del tempo t.

1.2 Classificazione delle matrici

Consideriamo una matrice $A\,(m \times n)$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

Si definisce **matrice trasposta** di A e si indica con A^T la matrice $(n \times m)$ ottenuta da A scambiando le righe per le colonne:

$$
\begin{aligned}
A^T &= (b_{ij}) = (a_{ji}) \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Ad esempio, la trasposta della matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

è:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

***

Consideriamo la matrice quadrata di ordine n:

$$A = (a_{ij})\,, \text{ con } i, j = 1, 2, ..., n$$

Abbiamo la seguente definizione:

$$\forall i > j,\ \ a_{ij} = 0) \overset{def}{\Longrightarrow} (A \text{ è una matrice } \textbf{triangolare alta} \tag{1.3}$$

Risulta:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & ... & a_{3n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

Viceversa:

$$\forall i < j,\ \ a_{ij} = 0) \overset{def}{\Longrightarrow} (A \text{ è una matrice } \textbf{triangolare bassa} \tag{1.5}$$

Risulta:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & ... & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

Nel caso speciale in cui la matrice quadrata di ordine n, $A = (a_{ij})$ è simultaneamente alta e bassa, si ha:

$$\forall i \neq j,\ \ a_{ij} = 0) \overset{def}{\Longrightarrow} (A \text{ è una matrice } \textbf{diagonale} \tag{1.7}$$

La (1.7) implica:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}, \tag{1.8}$$

e viene indicata con la notazione simbolica:

$$A = diag\,(a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{nn}) \tag{1.9}$$

Se $a_{11} = a_{22} = ... = a_{nn} = k$, la matrice si dice **scalare**, e per $k = 1$, la (1.9) è la matrice **identità di ordine** n:

$$\begin{aligned} I_n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & ... & 1 \end{pmatrix} \\ &= diag\,(1, 1, 1, ..., 1) \end{aligned} \tag{1.10}$$

Quando non è rilevante l'ordine n della matrice, la matrice identità si indica semplicemente con I.

***

Sia A una matrice quadrata di ordine n.

$$\begin{aligned} A = A^T &\overset{def}{\Longrightarrow} A \text{ è } \textbf{simmetrica} \\ A = -A^T &\overset{def}{\Longrightarrow} A \text{ è } \textbf{antisimmetrica} \end{aligned} \tag{1.11}$$

Cioè, rispettiavamente:

$$\begin{aligned} &\forall i, j \in \{1, 2, 3, ..., n\}\,,\ a_{ij} = a_{ji} \\ &\forall i, j \in \{1, 2, 3, ..., n\}\,,\ a_{ij} = -a_{ji} \end{aligned} \tag{1.12}$$

Esempi.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -5 \\ 3 & -5 & 6 \end{pmatrix} \tag{1.13}$$

La (1.13) è simmetrica:

$$\begin{aligned} A^T &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -5 \\ 3 & -5 & 6 \end{pmatrix} \\ &= A \end{aligned}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.14}$$

La (1.14) è antisimmetrica:

$$\begin{aligned} B^T &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & -4 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \\ &= -B \end{aligned}$$

***

Sia A una matrice quadrata di ordine n sul campo complesso $\mathbb{C}$, cioè $a_{ij} \in \mathbb{C}$. Si definisce **matrice coniugata di** A, la matrice quadrata di ordine n i cui elementi sono i complessi coniugati degli elementi di A:

$$A^* \overset{def}{=} \left(a_{ij}^*\right)$$

Ad esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 4+5i & -3i \\ 2 & 2-\sqrt{3}i \end{pmatrix} \Longrightarrow A^* = \begin{pmatrix} 4-5i & 3i \\ 2 & 2+\sqrt{3}i \end{pmatrix}$$

Sussiste la proprietà:

$$(A^*)^* = A$$

***

Sia A una matrice quadrata di ordine n sul campo complesso $\mathbb{C}$. Abbiamo le seguenti definizioni:

$$\begin{aligned} (A^*)^T = A &\overset{def}{\Longrightarrow} A \text{ è } \textbf{hermitiana} \\ (A^*)^T = -A &\overset{def}{\Longrightarrow} A \text{ è } \textbf{antihermitiana} \end{aligned} \tag{1.15}$$

Cioè, rispettivamente:

$$\begin{aligned} \forall i,j \in \{1,2,...,n\}\,,\ a_{ji}^* = a_{ij}) &\overset{def}{\Longrightarrow} A \text{ è } \textbf{hermitiana} \\ \forall i,j \in \{1,2,...,n\}\,,\ a_{ji}^* = -a_{ij}) &\overset{def}{\Longrightarrow} A \text{ è } \textbf{antihermitiana} \end{aligned}$$

Ad esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ 1+i & 3 & i \\ 2 & -i & 0 \end{pmatrix}$$

Passando alla trasposta della coniugata:

$$
\begin{aligned}
(A^*)^T &= \begin{pmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ 1+i & 3 & i \\ 2 & -i & 0 \end{pmatrix} \\
&= A,
\end{aligned}
$$

donde A è hermitiana.

$$
B = \begin{pmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ -1-i & 3i & i \\ -2 & i & 0 \end{pmatrix}
$$

Passando alla trasposta della coniugata:

$$
\begin{aligned}
(B^*)^T &= \begin{pmatrix} 1 & -1+i & -2 \\ 1+i & -3i & -i \\ 2 & -i & 0 \end{pmatrix} \\
&= -B,
\end{aligned}
$$

donde B è antihermitiana.

1.3 Operazioni elementari sulle matrici

1.3.1 Somma e differenza di matrici

Sian $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ con $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ...n$. Si definisce **somma** di A e B, la matrice $m \times n$:

$$
A + B = (c_{ij}), \tag{1.16}
$$

essendo:

$$
c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \tag{1.17}
$$

La **differenza** $A - B$ è la somma $A + (-B)$, essendo $-B = (-b_{ij})$. Quindi:

$$
A - B = (d_{ij}),
$$

con

$$
d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}
$$

Esempio.

$$
A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 \\ -1 & 5 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 \\ 1 & -5 & -9 \end{pmatrix}
$$

Abbiamo:

$$A+B=\begin{pmatrix} -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$A-B=\begin{pmatrix} 6 & 8 & 0 \\ -2 & 10 & 18 \end{pmatrix}$$

Consideriamo le matrici $A\,(n\times m)$ e $B\,(m\times p)$:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2m} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nm} \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2p} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_{m1} & b_{m2} & ... & b_{mp} \end{pmatrix} \tag{1.18}$$

che possono essere indicate con la notazione compatta:

$$A=(a_{ij})\,,\ i=1,2,...,n;\ j=1,2,...,m$$
$$B=(b_{ij})\,,\ i=1,2,...m;\ j=1,2,...,p$$

Si definisce **matrice prodotto righe per colonne** e si indica con AB, la matrice $n\times p$:

$$AB=(c_{ij})\,,\ i=1,2,...n;\ j=1,2,...,p \tag{1.19}$$

essendo:

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj} \tag{1.20}$$

Esempio 1. Date le matrici:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Determinare la matrice AB.

Soluzione 2. Abbiamo $A\,(3\times 3)\,,\ B\,(3\times 4)$, quindi $AB\,(3\times 4)$. Applicando la (1.20):

$$AB=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 0 \\ 7 & 5 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Ciò premesso, sussiste il

Teorema 3. Siano $A\,(n\times m)$ e $B\,(m\times p)$. Risulta:

$$(AB)^T=B^TA^T \tag{1.21}$$

Dimostrazione. Poniamo:

$$A=(a_{ij})\ \text{ con } i=1,...,n;\ j=1,...,m$$
$$B=(b_{ij})\ \text{ con } i=1,...,m;\ j=1,...,p$$

Indichiamo con un apice gli elementi di matrice delle rispettive trasposte:

$$\begin{aligned} A^T &= \left(a'_{ij}\right) \text{ con } a'_{ij} = a_{ji} \\ B^T &= \left(b'_{ij}\right) \text{ con } b'_{ij} = b_{ji} \end{aligned} \tag{1.22}$$

Il prodotto di A e B:

$$AB = (c_{ij}) \text{ con } c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} \tag{1.23}$$

la cui trasposta è

$$(AB)^T = \left(c'_{ij}\right) \text{ con } c'_{ij} = c_{ji} = \sum_{k=1}^{m} a_{jk} b_{ki} \tag{1.24}$$

Il prodotto di B^T e A^T:

$$B^T A^T = \left(c''_{ij}\right) \text{ con } c''_{ij} = \sum_{k=1}^{m} b'_{ik} a'_{kj} \tag{1.25}$$

Per le (1.22):

$$c''_{ij} = \sum_{k=1}^{m} b_{ki} a_{jk} = c'_{ij} \Longrightarrow B^T A^T = (AB)^T ,$$

donde l'asserto. □

Teorema 4. Se A è una matrice quadrata di ordine n, la matrice $A + A^T$ è simmetrica.

Dimostrazione. Poniamo $A = (a_{ij})$ con $i, j = 1, 2, ..., n$. Quindi, $A^T = (a_{ji})$; la somma è:

$$A + A^T = (\alpha_{ij}) ,$$

essendo:

$$\alpha_{ij} = a_{ij} + a_{ji}$$

Risulta:

$$\alpha_{ji} = \alpha_{ij}, \forall i, j = 1, 2, ..., n$$

donde la simmetria di $A + A^T$. □

Teorema 5. Se A è una matrice quadrata di ordine n, la matrice $A - A^T$ è antisimmetrica.

Dimostrazione. Poniamo $A = (a_{ij})$ con $i, j = 1, 2, ..., n$. Quindi, $A^T = (a_{ji})$; la differenza è:

$$A - A^T = (\beta_{ij}) ,$$

essendo:

$$\beta_{ij} = a_{ij} - a_{ji}$$

Risulta:

$$\beta_{ji} = -\beta_{ij}, \forall i, j = 1, 2, ..., n$$

donde l'antisimmetria di $A - A^T$. □

Corollario 6. Ogni matrice quadrata si esprime come somma di una matrice simmetrica e di una matrice antisimmetrica.

Dimostrazione. Sia $A = (a_{ij})$ con $i, j = 1, 2, ..., n$. Il generico elemento di matrice può scriversi:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= a_{ij} + \frac{1}{2}a_{ji} - \frac{1}{2}a_{ji} \\ &= \frac{1}{2}a_{ij} + \frac{1}{2}a_{ij} + \frac{1}{2}a_{ji} - \frac{1}{2}a_{ji} \\ &= \frac{1}{2}\left(a_{ij} + a_{ji}\right) + \frac{1}{2}\left(a_{ij} - a_{ji}\right) \end{aligned} \tag{1.26}$$

La (1.26) implica:

$$A = \underbrace{\frac{1}{2}\left(A + A^T\right)}_{\text{simmetrica}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(A - A^T\right)}_{\text{antisimmetrica}},$$

donde l'asserto. □

Definizione. Se A è una matrice quadrata, diremo che A è ***ortogonale*** se:

$$AA^T = A^T A = I, \tag{1.27}$$

essendo A^T la matrice trasposta di A. In altri termini, la matrice A è ortogonale se l'inversa (per tale definizione vedere § 1.8) coincide con la trasposta:

$$A^{-1} = A^T \tag{1.28}$$

Definizione. Se A è una matrice quadrata di ordine n e se $p \in \mathbb{N}$, la potenza p-esima di A è:

$$A^p = \underbrace{A \cdot A \cdot ... \cdot A}_{p \text{ volte}}$$

Definizione. Se A è una matrice quadrata di ordine n si dice che A è ***idempotente***, se:

$$A^2 = A$$

Definizione. Se A è una matrice quadrata di ordine n e se $p \in \mathbb{N}$, si dice che A è ***nilpotente di ordine*** p, se:

$$A^p = 0$$

Teorema 7. Se A è nilpotente di ordine p, ogni intero $p' > p$ è ordine di nilpotenza per A.

Dimostrazione.

$$\forall p' > p, \quad A^{p'} = A^p A^{p'-p} = 0 \cdot A^{p'-p} = 0$$

□

Teorema 8. A è nilpotente di ordine $p = 2) \Longrightarrow (\forall s \in \mathbb{N},\ A\left(I \pm A\right)^s = A$

Dimostrazione. La dimostrazione segue per calcolo diretto:

$$\begin{aligned} &s = 1 \Longrightarrow A\left(I \pm A\right) = A \pm A^2 = A \\ &s = 2 \Longrightarrow A\left(I \pm A\right)^2 = A \pm 2A^2 + A^3 = A \\ &... \\ &s = s \Longrightarrow A\left(I \pm A\right)^s = A \end{aligned}$$

□

***

Assegnate due matrici quadrate dello stesso ordine $A\,(n \times n)$, $B\,(n \times n)$, si osservi che in generale il prodotto righe per colonne non è commutativo, cioè:

$$AB \neq BA$$

Se risulta:

$$AB = BA$$

si dice che A e B **commutano** o che il prodotto AB è **commutativo.**
Se risulta:

$$AB = -BA$$

si dice che A e B **anticommutano** o che il prodotto AB è **anticommutativo.**
Possiamo poi considerare la potenza *k-sima* di una matrice quadrata:

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k \text{ volte}}$$

Si consideri ad esempio, la matrice quadrata di ordine 3:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ A^3 = A^2 \cdot A &= \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 11 & -8 & 0 \\ 8 & -1 & 8 \\ 8 & -4 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Verifichiamo che il prodotto $A^2 \cdot A$ è commutativo:

$$\begin{aligned} A \cdot A^2 &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 11 & -8 & 0 \\ 8 & -1 & 8 \\ 8 & -4 & 3 \end{pmatrix} = A^2 \cdot A \end{aligned}$$

Determiniamo A^5:

$$A^5 = A^2A^3 = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 & -8 & 0 \\ 8 & -1 & 8 \\ 8 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 39 & -41 & -21 \\ 62 & -33 & 20 \\ 41 & -31 & -2 \end{pmatrix}$$

Si osservi che A^2A^3 è commutativo:

$$A^3A^2 = \begin{pmatrix} 11 & -8 & 0 \\ 8 & -1 & 8 \\ 8 & -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 39 & -41 & -21 \\ 62 & -33 & 20 \\ 41 & -31 & -2 \end{pmatrix} = A^2A^3$$

1.4 Determinanti

Abbiamo visto che una matrice è un array di $m \times n$ numeri. Nel caso speciale di una matrice quadrata:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \tag{1.29}$$

è possibile associare a tale array un numero, che si chiama **determinante** della matrice e si indica con il simbolo $\det A$,

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Per $n = 1$, si pone per definizione:

$$\det A \stackrel{def}{=} a_{11}$$

Per definire $\det A$ nel caso $n \geq 2$, dobbiamo introdurre la nozione di **prodotto associato** alla matrice (1.29). A tale scopo chiediamoci se sia possibile prendere tra gli n^2 elementi di A, un sottoinsieme S costituito da n elementi tali che:

$$\forall a_{ij}, a_{hk} \in S, \quad (i \neq h, j \neq k)$$

cioè due qualunque elementi di S non appartengono nè alla stessa riga, nè alla stessa colonna. Quindi il sottoinsieme deve essere del tipop:

$$S = \{a_{h_1k_1}, a_{h_2k_2}, ..., a_{h_nk_n}\}$$

con h_i, k_i tali che:

$$\forall i, j \in \{1, 2, ..., n\}\,,\ i \neq j \Longrightarrow (h_i \neq h_j, k_i \neq k_j)$$

Cioè

$$\begin{aligned} &h_1, h_2, ..., h_n \\ &k_1, k_2, ..., k_n \end{aligned} \tag{1.30}$$

sono permutazioni arbitrarie (distinte o coincidenti) degli elementi $1, 2, 3, ..., n$.
Ad esempio, per $n = 5$ consideriamo:

$$\begin{aligned} (h_1, h_2, ..., h_n) &= (4, 2, 1, 3, 5) \\ (k_1, k_2, ..., k_n) &= (2, 4, 3, 1, 5) \end{aligned}$$

ottenendo:

$$S = \{a_{42}, a_{24}, a_{13}, a_{31}, a_{55}\} \tag{1.31}$$

Quindi, gli elementi dell'insieme (1.31) soddisfano la condizione richiesta.
Siano ora h e k le inversioni della prima e seconda delle (1.30), rispettivamente. Il prodotto associato alla matrice quadrata (1.29) è per definizione:

$$(-1)^{h+k}\, a_{h_1k_1} a_{h_2k_2} ... a_{h_nk_n}$$

Si osservi che:

$$\begin{aligned} (-1)^{h+k} &= +1, \ \text{ se } h + k \text{ è pari} \\ (-1)^{h+k} &= -1, \ \text{ altrimenti} \end{aligned}$$

Inoltre $h + k$ è pari se h, k hanno la medesima parità, cioè se le due permutazioni sono della stessa classe. Viceversa, se $h + k$ è dispari.
Per $n = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Abbiamo i seguenti sottoinsiemi:

$$\begin{aligned} &a_{11}, a_{22} \\ &a_{12}, a_{21} \end{aligned}$$

e i relativi prodotti associati:

$$+ a_{11}a_{21}$$
$$- a_{21}a_{22}$$

Da ciò segue che per ottenere tutti i prodotti associati basta tenere fisso uno degli indici h_i, k_i, facendo variare l'altro in tutti i modi possibili, per cui il numero di prodotti associati ad una matrice di ordine n, è pari a $n!$ Ad esempio, per $n = 3$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

abbiamo $3! = 6$ prodotti associati. Infatti gli insiemi sono:

$$a_{11}, a_{22}, a_{33}$$
$$a_{12}, a_{21}, a_{33}$$
$$a_{13}, a_{21}, a_{32}$$
$$a_{13}, a_{23}, a_{31}$$
$$a_{11}, a_{23}, a_{32}$$
$$a_{11}, a_{23}, a_{32}$$

Nel caso generale, il determinante di A è la somma degli $n!$ prodotti associati. Per eseguire la somma si può fissare la *n-pla* $h_1, h_2, ..., h_n$, per poi variare in tutti i modi possibili $k_1, k_2, ..., k_n$, o viceversa. Abbiamo quindi:

$$\det A = (-1)^h \sum_{k_1 k_2 ... k_n} (-1)^k a_{h_1 k_1} a_{h_2 k_2} ... a_{h_n k_n} \tag{1.32}$$
$$\det A = (-1)^k \sum_{h_1 h_2 ... h_n} (-1)^h a_{h_1 k_1} a_{h_2 k_2} ... a_{h_n k_n}$$

Nel caso speciale in cui $(h_1, h_2, ..., h_n) = (1, 2, ..., n)$, la prima delle (1.32) diventa $(h = 0)$:

$$\det A = \sum_{k_1 k_2 ... k_n} (-1)^k a_{1k_1} a_{2k_2} ... a_{nk_n} \tag{1.33}$$

Nel caso speciale in cui $(k_1, k_2, ..., k_n) = (1, 2, ..., n)$, la seconda delle (1.32) diventa $(k = 0)$:

$$\det A = \sum_{h_1 h_2 ... h_n} (-1)^h a_{h_1 1} a_{h_2 2} ... a_{h_n n} \tag{1.34}$$

Ad esempio, per $n = 3$:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{13}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{13}a_{22}$$

Per $n = 4$

$$\begin{aligned}
\det A = &\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} - a_{11}a_{32}a_{23}a_{44} + a_{11}a_{32}a_{24}a_{43} \\
&+ a_{11}a_{42}a_{23}a_{34} - a_{11}a_{42}a_{24}a_{33} - a_{21}a_{12}a_{33}a_{44} + a_{21}a_{12}a_{34}a_{43} \\
&+ a_{21}a_{32}a_{13}a_{44} - a_{21}a_{32}a_{14}a_{43} - a_{21}a_{42}a_{13}a_{34} + a_{21}a_{42}a_{14}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23}a_{44} \\
&- a_{31}a_{12}a_{24}a_{43} - a_{31}a_{22}a_{13}a_{44} + a_{31}a_{22}a_{14}a_{43} + a_{31}a_{42}a_{13}a_{24} \\
&- a_{31}a_{42}a_{14}a_{23} - a_{41}a_{12}a_{23}a_{34} + a_{41}a_{12}a_{24}a_{33} + a_{41}a_{22}a_{13}a_{34} \\
&- a_{41}a_{22}a_{14}a_{33} - a_{41}a_{32}a_{13}a_{24} + a_{41}a_{32}a_{14}a_{23}
\end{aligned}$$

Da ciò segue che al crescere di n, aumenta la complessità del calcolo diretto del determinante. Fortunatamente esistono teoremi che riducono tale complessità di calcolo.

Teorema 9. Se A è una matrice quadrata di ordine n:

$$\det A = \det A^T$$

Dimostrazione. Siano:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\det A^T = \begin{vmatrix} a'_{11} & \dots & a'_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a'_{n1} & \dots & a'_{nn} \end{vmatrix}$$

Per definizione di matrice trasposta:

$$a'_{hk} = a_{kh} \tag{1.35}$$

Il determinante di A:

$$\det A = \sum_{k_1 k_2 \dots k_n} (-1)^k a_{1k_1} a_{2k_2} \dots a_{nk_n}$$

Per la (1.35):

$$\begin{aligned}
\det A &= \sum_{k_1 k_2 \dots k_n} (-1)^k a'_{k_1 1} a'_{k_2 2} \dots a'_{k_n n} \\
&= \det A^T
\end{aligned}$$

□

Teorema 10. Sia A una matrice quadrata di ordine n. Se negli indici di riga eseguiamo la sostituzione:

$$(1, 2, ..., n) \to (h_1, h_2, ..., h_n) \tag{1.36}$$

otteniamo una nuova matrice quadrata di ordine n, che indichiamo con A'. Risulta:

$$\det A' = (-1)^h \det A,$$

essendo h il numero di inversioni della sostituzione (1.36).

Dimostrazione. Poniamo $A' = (a'_{hk})$:

$$a'_{1r} = a_{h_1 r}, a'_{2r} = a_{h_2 r}, ..., a'_{nr} = a_{h_n r} \quad \text{con } r = 1, 2, ..., n$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned} \det A' &= \sum_{k_1 k_2 ... k_n} (-1)^k a'_{1k_1} a'_{2k_2} ... a'_{nk_n} \\ &= \sum_{k_1 k_2 ... k_n} (-1)^k a_{h_1 k_1} a_{h_2 k_2} ... a_{h_n k_n} \\ &= (-1)^h \det A \end{aligned}$$

□

Ad esempio, consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Eseguiamo la sostituzione degli indici di riga:

$$(1, 2, 3) \to (3, 1, 2) \tag{1.37}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} a'_{11} = a_{31},\ a'_{21} = a_{11},\ a_{31} = a_{21} \\ a'_{21} = a_{11},\ a'_{22} = a_{12}\ a'_{23} = a_{13} \\ a'_{31} = a_{21},\ a'_{32} = a_{22},\ a'_{33} = a_{23} \end{aligned}$$

Da cui:

$$A' = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

Si osservi che la sostituzione (1.37) presenta due inversioni, quindi $h = 2$. Il determinante di A' è:

$$\det A' = (-1)^2 \det A = \det A$$

In maniera analoga si dimostra il seguente

Teorema 11. Sia A una matrice quadrata di ordine n. Se negli indici di colonna eseguiamo la sostituzione:

$$(1, 2, ..., n) \to (k_1, k_2, ..., k_n) \tag{1.38}$$

otteniamo una nuova matrice quadrata di ordine n, che indichiamo con A'. Risulta:

$$\det A' = (-1)^k \det A,$$

essendo k il numero di inversioni della sostituzione (1.38).

I due teoremi precedenti si specializzano nel seguente:

Teorema 12. Un determinante inverte il proprio segno se si scambiano due righe o due colonne.

Dimostrazione. Poniamo:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.39}$$

Senza ledere la generalità, scambiamo la prima riga con la seconda, ottenendo:

$$\det A' = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.40}$$

Si osservi che (1.40) si ottiene da (1.39) attraverso la sostituzione di indici di riga:

$$(1, 2, ..., n) \to (2, 1, ..., n)$$

Tale sostituzione ha $h = 1$ inversioni. Per i teoremi precedenti:

$$\det A' = -\det A$$

In maniera analoga si dimostra che

$$\det A'' = -\det A,$$

essendo $\det A''$ il determinante ottenuto da (1.39) scambiando la prima con la seconda colonna. □

Teorema 13. Se in una matrice quadrata $A\,(n \times n)$ contiene due righe (o due colonne) identiche, segue che $\det A = 0$.

Dimostrazione. Senza ledere la generalità:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Se scambiamo la prima riga con la seconda otteniamo una matrice $A' = A$. Per il teorema precedente:

$$\det A' = -\det A$$

D'altro canto $A' = A$ implica:

$$\det A' = \det A$$

donde:

$$\det A = -\det A \Longrightarrow \det A = 0$$

cioè l'asserto. □

Teorema 14. Sia $A\,(n \times n)$ una matrice quadrata:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Moltiplicando la riga *i-esima* per una costante λ, si ottiene la matrice

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \dots & a'_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

essendo $a'_{ir} = \lambda a_{ir}$.
Ciò posto, i determinanti di A e A' sono legati dalla relazione:

$$\det A' = \lambda \det A$$

Dimostrazione. Nella (1.32) troviamo un fattore λ in ogni termine della sommatoria, donde:

$$\begin{aligned} \det A' &= \lambda\,(-1)^h \sum_{k_1 k_2 \dots k_n} (-1)^k\, a_{h_1 k_1} a_{h_2 k_2} \dots a_{h_n k_n} \\ &= \lambda \det A \end{aligned}$$

□

Da tale teorema segue che se gli elementi di una riga hanno un fattore comune λ, questo può essere posto fuori del determinante:

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Il teorema precedente si generalizza al caso della moltiplicazione di una costante per gli elementi di una colonna. Ad esempio:

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \lambda a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Teorema 15. Se in una matrice quadrata $A\,(n \times n)$, gli elementi di una riga (o di una colonna) sono tutti nulli, si ha $\det A = 0$.

Dimostrazione. Per il teorema (14):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0,$$

donde l'asserto. □

Teorema 16. Se una matrice quadrata $A\,(n \times n)$ contiene due righe (o due colonne) proporzionali, allora è $\det A = 0$.

Dimostrazione. Qui per "righe proporzionali" intendiamo:

$$\exists \lambda : a_{s1} = \lambda a_{r1}, \;\; a_{s2} = \lambda a_{r2}, ..., a_{sn} = \lambda a_{rn},$$

donde:

$$\begin{aligned}
\det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{r1} & a_{r2} & ... & a_{rn} \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda a_{r1} & \lambda a_{r2} & ... & \lambda a_{rn} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{r1} & a_{r2} & ... & a_{rn} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{r1} & a_{r2} & ... & a_{rn} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= \lambda \cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

□

1.5 Minori di una matrice

Consideriamo una matrice $A\,(m \times n)$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Sia $p \in \mathbb{N} - \{0\} \mid p \leq \min\{m, n\}$. Quindi prendiamo p righe di indice $h_1 < h_2 < ... < h_p$, e p colonne di indici $k_1, k_2, ..., k_p$; in tal modo resta individuato il determinante:

$$a_{h_1 h_2 ... h_p, k_1 k_2 ... k_p} = \begin{vmatrix} a_{h_1 k_1} & a_{h_1 k_2} & ... & a_{h_1 k_p} \\ a_{h_2 k_1} & a_{h_2 k_2} & ... & a_{h_2 k_p} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{h_p k_1} & a_{h_p k_2} & ... & a_{h_p k_p} \end{vmatrix} \tag{1.41}$$

Il determinante (1.41) si chiama **minore di ordine** p della matrice A. Ad esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \tag{1.42}$$

Assumiamo:

$$h_1 = 1,\ h_2 = 2$$
$$k_1 = 2,\ k_2 = 3$$

Quindi:

$$a_{12,23} = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix},$$

che è un minore di ordine 2 della matrice (1.42).
Ora consideriamo il caso particolare di una matrice quadrata di ordine n :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Assegnati $p \in \{1, 2, ..., n-1\}$, $h_1, h_2, ..., h_p, k_1, k_2, ..., k_p$ abbiamo il minore di ordine p :

$$a_{h_1 h_2 ... h_p, k_1 k_2 ... k_p} = \begin{vmatrix} a_{h_1 k_1} & a_{h_1 k_2} & ... & a_{h_1 k_p} \\ a_{h_2 k_1} & a_{h_2 k_2} & ... & a_{h_2 k_p} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{h_p k_1} & a_{h_p k_2} & ... & a_{h_p k_p} \end{vmatrix} \tag{1.43}$$

Al tempo stesso resta definito il minore di ordine $n - p$:

$$a_{h_{p+1} h_{p+2} ... h_n, k_{p+1} k_{p+2} ... k_n} \overset{def}{=} \begin{vmatrix} a_{h_{p+1} k_{p+1}} & a_{h_{p+1} k_{p+2}} & ... & a_{h_n k_n} \\ a_{h_{p+2} k_{p+1}} & a_{h_{p+2} k_{p+2}} & ... & a_{h_n k_p} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{h_n k_{p+1}} & a_{h_n k_{p+2}} & ... & a_{h_n k_n} \end{vmatrix} \tag{1.44}$$

Il minore (1.44) si chiama **minore complementare** del minore (1.43). Definiamo poi **complemento algebrico** o **aggiunto** o **cofattore** del minore (1.43):

$$a'_{h_1 h_2 ... h_p, k_1 k_2 ... k_p} = (-1)^{\sum_{r=1}^{p} h_r + \sum_{r=1}^{p} k_r} a_{h_{p+1} h_{p+2} ... h_n, k_{p+1} k_{p+2} ... k_n}$$

Esempi numerici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 12 \\ -4 & 2 & 3 \\ 9 & -6 & 14 \end{pmatrix}$$

Poniamo: $h_1 = 1, h_2 = 2$; $k_1 = 1, k_2 = 2$, per cui $h_{p+1} = 3$, $k_{p+1} = 3$, essendo $p = 2$. Perciò il minore di ordine 2:

$$a_{12,12} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

Il minore complementare del minore $a_{12,12}$ è di ordine 1:

$$a_{3,3} = \det(14) = 14$$

Il complemento algebrico di $a_{12,12}$ è:

$$a'_{12,12} = (-1)^6 \, a_{3,3} = 14$$

***

Sia:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 7 & 9 \\ 3 & 2 & 9 & 4 \\ -7 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Prendiamo $p = 2$, donde: $h_1 = 1, h_2 = 2$; $k_1 = 1, k_2 = 2$

$$a_{12,12} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Il minore complementare del minore $a_{12,12}$ è

$$a_{34,34} = \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -4$$

Il complemento algebrico di $a_{12,12}$ è:

$$a'_{12,12} = (-1)^6 \, a_{34,34} = -4$$

Sia:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 9 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & -3 & 2 \\ 5 & -4 & 6 & -2 & 1 \\ 0 & 8 & 1 & 5 & 3 \\ 6 & 4 & 9 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Consideriamo il minore del second'ordine:

$$a_{24,23} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} = 11$$

Il minore complementare di $a_{24,23}$ è di ordine 3:

$$a_{135,145} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 5 & -2 & 1 \\ 6 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -41$$

Il complemento algebrico di $a_{24,23}$ è:

$$a'_{24,23} = (-1)^{6+5} \, a_{135,145} = +41$$

***

Sia

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -10 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned}
a_{12,12} &= \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \\
a_{12,13} &= \begin{vmatrix} 2 & -10 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 44 \\
a_{12,23} &= \begin{vmatrix} 0 & -10 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 10 \\
a_{13,12} &= \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \\
a_{13,13} &= \begin{vmatrix} 2 & -10 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \\
a_{13,23} &= \begin{vmatrix} 0 & -10 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -10 \\
a_{13,23} &= \begin{vmatrix} 0 & -10 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -10 \\
a_{13,23} &= \begin{vmatrix} 0 & -10 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -10 \\
a_{23,12} &= \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -4 \\
a_{23,23} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \\
a_{3,3} &= \det(1) = 1 \\
a'_{12,12} &= (-1)^6 a_{3,3} = -1 \\
&\text{ecc.}
\end{aligned}$$

***

La nozione di minore di ordine p si specializza nel caso $p = 1$. Più specificatamente, un qualunque elemento a_{hk} di una matrice $A(n \times n)$ è un minore di ordine 1. Il complemento algebrico di a_{hk} è:

$$a'_{hk} = (-1)^{h+k} M_{hk}, \tag{1.45}$$

essendo

$$M_{hk} = \det A_{hk}$$

Qui A_{hk} è la **matrice complementare** di A :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,k-1} & a_{2k} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{h-1,1} & \dots & a_{h-1,k-1} & a_{h-1,k} & a_{h-1,k+1} & \dots & a_{h-1,n} \\ a_{h1} & \dots & a_{h,k-1} & a_{hk} & a_{h,k+1} & \dots & a_{hn} \\ a_{h+1,1} & \dots & a_{h+1,k-1} & a_{h+1,k} & a_{h+1,k+1} & \dots & a_{h+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,k-1} & a_{nk} & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \tag{1.46}$$

cioè la matrice quadrata di ordine $n-1$ ottenuta dalla (1.46) cancellando la riga *h-esima* e la colonna *k-esima*:

$$A_{hk} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,k-1} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{h-1,1} & \dots & a_{h-1,k-1} & a_{h-1,k+1} & \dots & a_{h-1,n} \\ a_{h+1,1} & \dots & a_{h+1,k-1} & a_{h+1,k+1} & \dots & a_{h+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

1.6 Teorema di Laplace

Consideriamo la matrice quadrata:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Fissiamo $p < n$, dopodiché prendiamo p righe di indici: $h_1 < h_2 < \dots < h_p$. Resta così individuata la matrice $p \times n$:

$$\begin{pmatrix} a_{h_1 1} & a_{h_1 2} & \dots & a_{h_1 n} \\ a_{h_2 1} & a_{h_2 2} & \dots & a_{h_2 n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{h_p 1} & a_{h_p 2} & \dots & a_{h_p n} \end{pmatrix}$$

Il numero di minori che possono essere estratti da tale matrice, è pari al numero delle combinazioni di classe p di n oggetti, cioè

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Abbiamo quindi:

$$a_{h_1 h_2 \dots h_p, k_1, k_2, \dots, k_p},$$

essendo $k_1 < k_2 < \dots < k_p$ una qualunque combinazione di classe p di $1, 2, \dots, n$. Ciò posto, sussiste il Teorema di Laplace:

Teorema 17.

$$\det A = \sum_{k_1 k_2 \ldots k_p} a_{h_1 h_2 \ldots h_p, k_1, k_2, \ldots, k_p} a'_{h_1 h_2 \ldots h_p, k_1, k_2, \ldots, k_p} \tag{1.47}$$

Dimostrazione. Omessa. □

Nel caso speciale $p = 1$, la (1.47) si scrive:

$$\det A = \sum_k a_{hk} a'_{hk} \tag{1.48}$$

che esprime lo sviluppo di un determinante secondo gli elementi di una riga assegnata (somma degli $\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} = n$ prodotti dei singoli elementi per i corrispondenti complementi algebrici). In maniera analoga si dimostra lo sviluppo secondo gli elementi di una colonna assegnata. Nella (1.48) a'_{hk} è il complemento algebrico del minore a_{hk} ed è dato dalla (1.45) che riscriviamo:

$$a'_{hk} = (-1)^{h+k} \det A_{hk} = \begin{cases} \det A_{hk}, & h+k \text{ pari} \\ -\det A_{hk}, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La relazione precedente suggerisce la seguente

Definizione. Un elemento a_{hk} di una matrice quadrata, si dice di **posto pari** o di **posto dispari** se $h + k$ è pari o dispari rispettivamente.

Esempi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 9 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Sviluppiamo il determinante di A secondo gli elementi della prima riga:

$$\det A = (+1) \cdot \begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 104,$$

poiché:

$$a'_{11} = (-1)^2 A_{11} = (+1) \cdot \begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$a'_{12} = (-1)^3 A_{12} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$a'_{22} = (-1)^4 A_{13} = (+1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

***

Calcoliamo il determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & -4 \\ -1 & 3 & -2 & 5 \\ 4 & 5 & 7 & -6 \end{vmatrix}$$

Sviluppando secondo gli elementi della seconda colonna:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -1 & -2 & 5 \\ 4 & 7 & -6 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & 5 \\ 4 & 7 & -6 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \\ 4 & 7 & -6 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \\ -1 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

Risulta:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -1 & -2 & 5 \\ 4 & 7 & -6 \end{vmatrix} = -36$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & 5 \\ 4 & 7 & -6 \end{vmatrix} = -48$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \\ 4 & 7 & -6 \end{vmatrix} = 60$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \\ -1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 0,$$

donde:

$$\Delta = -288$$

1.7 Altre proprietà delle matrici

Sia $A\,(n \times n)$ una matrice quadrata di ordine n. Senza ledere la generalità supponiamo che $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Fissiamo arbitrariamente $p \in \mathbb{N} : p < n$, e le righe: $h_1 < h_2 < ... < h_p$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{h_1 1} & a_{h_1 2} & ... & a_{h_1 n} \\ a_{h_2 1} & a_{h_2 2} & ... & a_{h_n n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{h_p 1} & a_{h_p 2} & ... & a_{h_p n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{1.49}$$

Fissiamo l'attenzione sulle p righe:

$$(a_{h_r 1}, a_{h_r 2}, ..., a_{h_r n}) \quad \text{con } r = 1, 2, ..., p$$

Se $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_p \in \mathbb{R}$, consideriamo le combinazioni lineari:

$$
\begin{aligned}
b_1 &= \lambda_1 a_{h_1 1} + \lambda_2 a_{h_2 1} + ... + \lambda_p a_{h_p 1} \\
b_2 &= \lambda_1 a_{h_1 2} + \lambda_2 a_{h_2 2} + ... + \lambda_p a_{h_p 2} \\
&... \\
b_n &= \lambda_1 a_{h_1 n} + \lambda_2 a_{h_2 n} + ... + \lambda_p a_{h_p n}
\end{aligned}
$$

Indichiamo con B la matrice ottenuta da (1.49) con la sostituzione

$$(a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}) \longrightarrow (a_{i1} + b_1, a_{i2} + b_2, ..., a_{in} + b_n)\,,$$

per un assegnato $i \in \{1, 2, ..., n\} - \{h_1, h_2, ..., h_p\}$. Sussiste il

Teorema 18.

$$\det A = \det B$$

Dimostrazione. Omessa. □

Un caso particolare è:

$$(a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}) \longrightarrow (a_{i1} + \lambda a_{r1}, a_{i2} + \lambda a_{r2}, ..., a_{in} + \lambda a_{rn})\,,$$

essendo $i, r \in \{1, 2, ..., n\}$ con $i \neq n$. Tale sostituzione produce la matrice:

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} + \lambda a_{r1} & a_{i2} + \lambda a_{r1} & ... & a_{in} + \lambda a_{r1} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Si ha:

$$\det C = \det A$$

Esempi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -36$$

Fissiamo $p = 2$, $h_1 = 2, h_2 = 3$. Quindi:

$$
\begin{aligned}
b_1 &= \lambda_1 \cdot (-4) + \lambda_2 \cdot (2) \\
b_2 &= \lambda_1 \cdot (1) + \lambda_2 \cdot (1) \\
b_3 &= \lambda_1 \cdot (1) + \lambda_2 \cdot (-1)
\end{aligned}
$$

Assumendo $(\lambda_1, \lambda_2) = (1, 2)$:

$$b_1 = 0,\ b_2 = 3,\ b_3 = -1$$

Per $i = 1$:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Un calcolo diretto porge:

$$\det B = -36$$

$$***$$

Sia:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

Eseguiamo la sostituzione:

$$(a_{11}, a_{12}, a_{13}) \longrightarrow (a_{11} + \lambda a_{21}, a_{12} + \lambda a_{22}, a_{13} + \lambda a_{23})$$

Per $\lambda = 1$

$$(1, -1, 0) \to (3, 0, 1)$$

donde:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

Per $\lambda = -1/2$

$$(1, -1, 0) \to \left(0, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

donde:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\det C = \begin{vmatrix} 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

Eseguiamo la sostituzione:

$$(a_{21}, a_{22}, a_{23}) \longrightarrow (a_{21} + \lambda a_{11}, a_{22} + \lambda a_{12}, a_{23} + \lambda a_{13})$$

Per $\lambda = -2$:

$$(2, 1, 1) \to (0, 3, 1)\,,$$

donde:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\det C = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

Osservazione. I teoremi precedenti continuano a valere nel caso di *sostituzioni per colonna.* Ad esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 14$$

Eseguiamo la sostituzione per colonna:

$$(a_{11}, a_{21}, a_{31}) \to (a_{11} + \lambda a_{12}, a_{21} + \lambda a_{22}, a_{31} + \lambda a_{32})$$

Per $\lambda = 1$

$$(1, -1, 5) \to (3, 0, 7)\,,$$

donde:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 5 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 14$$

Teorema 19. Sia $A\,(n \times n)$ e $p \in \{1, 2, ..., n-1\}$. Fissiamo quindi $h_1 < h_2 < h_p$.

$$\exists i_0 \in \{1, 2, ..., n\} : (a_{i_0 1}, a_{i_0 2}, ..., a_{i_0 n}) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \left(a_{h_j 1}, a_{h_j 2}, ..., a_{h_j n}\right) \Longrightarrow \det A = 0$$

$$\exists j_0 \in \{1, 2, ..., n\} : (a_{1 j_0}, a_{2 j_0}, ..., a_{n j_0}) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \left(a_{1 h_i}, a_{2 h_i}, ..., a_{n h_i}\right) \Longrightarrow \det A = 0$$

Dimostrazione. Omessa. □

Secondo il teorema precedente, un determinante è nullo se una riga (o una colonna) è combinazione lineare di altre righe (o di altre colonne). Ad esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 19 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Qui è:

$$(5, 7, 19) = 2\,(1, 2, 5) + 3\,(1, 1, 3)\,,$$

donde

$$\det A = 0$$

come confermato da un calcolo diretto.

Teorema 20. Siano A, B matrici quadrate di ordine n.

$$\det (A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$$

Dimostrazione. Omessa. □

1.8 Inversa di una matrice

Consideriamo la matrice quadrata di ordine n :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}, \tag{1.50}$$

Secondo la (1.45) per ogni elemento a_{hk} resta univocamente definito il suo complemento algebrico a'_{hk}:

$$a_{hk} \to a'_{hk} = (-1)^{h+k} \det A_{hk}$$

Resta così definita la matrice quadrata di ordine n:

$$A^{(a)} \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & ... & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & ... & a'_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a'_{n1} & a'_{n2} & ... & a'_{nn} \end{pmatrix}^T$$

che si chiama **matrice aggiunta** della matrice A. In altri termini, la matrice aggiunta è la trasposta della matrice dei complementi algebrici.

Definizione. Una matrice quadrata è ***non singolare*** se il suo determinante è non nullo. Nel caso contrario, la matrice è ***singolare***.

Definizione. Sia A una matrice quadrata di ordine n. Se A è non singolare, si definisce ***inversa*** di A e si indica con A^{-1} la matrice quadrata di ordine n tale che:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n,$$

essendo I_n la matrice identità di ordine n.

Proposizione. Sia A una matrice quadrata di ordine n non singolare. La sua inversa è:

$$A^{-1} = \frac{A^{(a)}}{\det A} \tag{1.51}$$

Dimostrazione. Omessa. □

***

Definizione. Una matrice quadrata di ordine n si dice **involutoria** se coincide con la propria inversa:

$$A^{-1} = A \Longleftrightarrow A^2 = I$$

Esempi
Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$
$$\det A = 43$$

La matrice aggiunta è:

$$A^{(a)} = \begin{pmatrix} 19 & 5 & 2 \\ -24 & 5 & 2 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

Quindi l'inversa:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{19}{43} & \frac{5}{43} & \frac{2}{43} \\ -\frac{24}{43} & \frac{5}{43} & \frac{2}{43} \\ \frac{2}{43} & -\frac{4}{43} & \frac{7}{43} \end{pmatrix}$$

***

Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

La matrice aggiunta è:

$$A^{(a)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si osservi che $\det A = 0$, per cui la matrice è singolare e come tale è priva di inversa.

1.9 Rango di una matrice

Se $A\,(n \times n) \neq 0$ per § 1.5 esistono minori di ordine $p = 1, 2, ..., \min\{m, n\}$.

Definizione. Dicesi ***rango*** o ***caratteristica*** di A, l'intero naturale:

$$r\,(A) \overset{def}{=} p_{>},$$

essendo $p_{>} = \max\{p\}$: i minori di ordine $p_{>}$ sono non nulli.

Da tale definizione segue che se $r\,(A) = p_{>}$, significa:

1. Esiste almeno un minore di ordine $p_{>}$ non nullo;
2. se $p_{>} < \min\{m, n\}$, i minori di ordine $p_{>} + 1$, $p_{>} + 2, ...$, sono tutti nulli.

1.10 Esercizi proposti

1.10.1 Operazioni sulle matrici e classificazione delle matrici

(per alcune soluzioni consultare l'Appendice A)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 2 & 4 \\ 4 & -7 & 4 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 & -2 \\ 3 & -5 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & -2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$3\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 & 0 \\ 12 & 0 & 6 & 3 \\ 6 & -15 & 3 & 6 \end{pmatrix};$$

$$-\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

***

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = -12$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -8 & -12 & -4 \\ -4 & -6 & -2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & -9 \\ 0 & 1 & -7 & 10 \\ 5 & 3 & 8 & -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 13 & 16 & -14 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 29 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 8 & -12 \end{pmatrix};$$

Date le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix},$$

calcolare la matrice prodotto AB.
Date le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix},$$

determinare:

$$D = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \\ t & u \end{pmatrix} : A + B - D = 0$$

***

Date le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \tag{1.52}$$

determinare: $A + B$, $A - C$, $-2A$. Verificare l'identità:

$$A + (B - C) = (A + B) - C$$

Determinare una matrice D tale che:

$$A + D = B$$

Verificare le identità:

$$\begin{aligned} D &= B - A \\ D &= -(A - B) \end{aligned}$$

***

Date le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

verificare la non commutatività del loro prodotto.
Soluzione

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ BA &= \begin{pmatrix} 1-6-6 & -1+4+3 & 1-2 \\ 2-12-12 & -2+8+6 & 2-4 \\ 1-6-6 & -1+4+3 & 1-2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -11 & 6 & -1 \\ -20 & 12 & -2 \\ -11 & 6 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

cioè $AB \neq BA$.

***

Date le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

verificare l'identità matriciale:

$$AB = AC$$

Soluzione
Procediamo per calcolo diretto:

$$AB = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 15 & 0 & -5 \\ -3 & 15 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$
$$AC = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 15 & 0 & -5 \\ -3 & 15 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

***

Date le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

verificare l'identità (proprietà distributiva rispetto alla moltiplicazione righe per colonne):

$$A\,(BC) = (AB)\,C$$

Soluzione
Procediamo per calcolo diretto:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 18 \\ 1 & 15 \end{pmatrix}$$
$$(AB)\,C = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & -7 \\ 35 & -2 & -39 & 22 \\ 31 & 2 & -27 & 11 \end{pmatrix}$$
$$BC = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -3 & -1 \\ 4 & 0 & -4 & 2 \\ 7 & -2 & -11 & 8 \end{pmatrix}$$
$$A\,(BC) = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & -7 \\ 35 & -2 & -39 & 22 \\ 31 & 2 & -27 & 11 \end{pmatrix}$$

***

Date le matrici (1.52) verificare la proprietà distributiva della moltiplicazione righe per colonne rispetto all'addizione di matrici:

$$A\,(B + C) = AB + AC \tag{1.53}$$

Soluzione

$$B + C = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 4 \\ 4 & 5 & 7 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Quindi:

$$A\left(B+C\right)=\begin{pmatrix} 6 & 16 & 0 \\ 41 & -4 & 32 \\ 6 & -7 & 3 \end{pmatrix}$$

Determiniamo il secondo membro della (1.53):

$$AB=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 19 & -5 & 16 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$
$$AC=\begin{pmatrix} 1 & 13 & -3 \\ 22 & 1 & 16 \\ 5 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

da cui:

$$AB+AC=\begin{pmatrix} 6 & 16 & 0 \\ 41 & -4 & 32 \\ 6 & -7 & 3 \end{pmatrix}$$

***

Data la matrice:

$$A=\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$

essendo $i=\sqrt{-1}$, determinare A^n per $n\in\mathbb{N}$.
Soluzione

$$A^2=\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-I$$
$$A^3=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}=-A$$
$$A^4=A^3A=\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=I$$

Da ciò segue:

$$n \text{ è pari} \Longrightarrow A^n=\pm I$$
$$n \text{ è dispari} \Longrightarrow A^n=\pm A$$

Precisamente:

$$A^2=-I$$
$$A^4=+I$$
$$A^8=+I$$
$$A^{10}=-I$$

da ciò segue:

$$A^n = +I, \text{ se } n = 4p \ \ \forall p \in \mathbb{N}$$
$$A^n = -I, \text{ se } n = 4p+2 \ \ \forall p \in \mathbb{N}$$

In maniera simile si dimostra che:

$$A^n = +A, \text{ se } n = 4p+1 \ \ \forall p \in \mathbb{N}$$
$$A^n = -A, \text{ se } n = 4p+3 \ \ \forall p \in \mathbb{N}$$

***

Assegnate le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix},$$

verificare che A e B commutano e che $AC = A$, $CA = C$.
Soluzione

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 2-3+5 & -6-9-15 & 10+15-25 \\ 1+4-5 & -3-12+15 & -5-20+25 \\ -1-3+4 & 3+9-12 & 5+15-20 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ BA &= \begin{pmatrix} 2-3+5 & -6-9-15 & 10+15-25 \\ 1+4-5 & -3-12+15 & -5-20+25 \\ -1-3+4 & 3+9-12 & 5+15-20 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Cioè $AB = BA = 0$.

$$AC = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} = A$$
$$CA = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = C$$

***

Assegnate le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}, \quad \text{con } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

verificare che A e B commutano.
Soluzione

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ac + bd & ad + bc \\ bc + ad & bd + ac \end{pmatrix} \\ BA &= \begin{pmatrix} ca + db & cb + da \\ da + cb & db + ca \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde:

$$\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad AB = BA$$

***

Verificare che la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

è idempotente.
Soluzione

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^2 = A \end{aligned}$$

***

Verificare l'idempotenza delle matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Per la matrice A:

$$
\begin{aligned}
A^2 &= \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} = A
\end{aligned}
$$

Per la matrice B

$$
\begin{aligned}
B^2 &= \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} = B
\end{aligned}
$$

***

Dimostrare la seguente proposizione:

$$AB = A, \;\; BA = B) \Longrightarrow (A,\, B \text{ sono idempotenti}$$

Soluzione

$$AB = A \Longrightarrow A\,(BA) = A$$

Per la proprietà distributiva rispetto alla moltiplicazione tra matrici:

$$(AB)\,A = A$$

Ma $AB = A$, donde:

$$A^2 = A$$

da cui l'idempotenza di A. Passiamo alla matrice B:

$$BA = B \Longrightarrow B\,(AB) = B$$

Per la proprità distributiva:

$$(BA)\,B = B$$

Ma $BA = B$, donde:

$$B^2 = B,$$

da cui l'idempotenza di B.

***

Verificare la nilpotenza di ordine 3 della matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Soluzione

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \\ A^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde l'asserto.

***

Assegnata la matrice quadrata:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

verificare che è soluzione dell'equazione matriciale:

$$X^2 - 4X - 5I_3 = 0$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Quindi:

$$
\begin{aligned}
&A^2 - 4A - 5I_3 \\
&= \begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \\ 8 & 8 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Cioè:

$$A^2 - 4A - 5I_3 = 0$$

***

Assegnata la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

verificare che è soluzione dell'equazione matriciale:

$$X^3 - 2X^2 - 9X = 0$$

Abbiamo:

$$
\begin{aligned}
A^2 &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 8 & 7 & 11 \\ 3 & 6 & 3 \\ 5 & 1 & 8 \end{pmatrix} \\
A^3 &= \begin{pmatrix} 8 & 7 & 11 \\ 3 & 6 & 3 \\ 5 & 1 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 34 & 23 & 49 \\ 15 & 3 & 24 \\ 19 & 20 & 25 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Quindi:

$$A^3 - 2A^2 - 9A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

***

Verificare che la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

è nilpotente di ordine 2.
Soluzione

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

***

Verificare che le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -6 \\ 3 & 2 & 9 \\ -1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

commutano, e che il loro prodotto è la matrice identità.
Soluzione
Abbiamo:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 & -6 \\ 3 & 2 & 9 \\ -1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ BA &= \begin{pmatrix} -2 & -1 & -6 \\ 3 & 2 & 9 \\ -1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

***

Verificare che le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & -1/3 \\ -3/5 & 2/5 & 1/5 \\ 7/15 & -1/5 & 1/15 \end{pmatrix}$$

commutano, e che il loro prodotto è la matrice identità.
Soluzione
Abbiamo:

$$\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & -1/3 \\ -3/5 & 2/5 & 1/5 \\ 7/15 & -1/5 & 1/15 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
BA &= \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & -1/3 \\ -3/5 & 2/5 & 1/5 \\ 7/15 & -1/5 & 1/15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

***

Verificare che le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

anticommutano. Inoltre si dimostri che:

$$\forall A, B : A \text{ e } B \text{ anticommutano}, \; (A+B)^2 = A^2 + B^2$$

Soluzione

$$\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \\
BA &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = -BA
\end{aligned}$$

Se A, B sono due qualunque matrici che anticommutano:

$$\begin{aligned}
(A+B)^2 &= (A+B) \cdot (A+B) \\
&= A^2 + AB + BA + B^2 \\
&\underset{BA=-AB}{=} A^2 + B^2
\end{aligned}$$

***

Assegnate le matrici:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \; A_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

verificare che ciascuna anticommuta con le altre. Più precisamente:

$$A_i A_j = \begin{cases} -A_j A_i & \text{se } i \neq j \\ I & \text{se } i = j \end{cases}$$

Soluzione
Abbiamo:

$$\begin{aligned}
A_1 A_2 &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \\
A_2 A_1 &= \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = -A_1 A_2 \\
A_1 A_3 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\
A_3 A_1 &= \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = -A_1 A_3 \\
A_2 A_3 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\
A_3 A_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -A_2 A_3 \\
A_1^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
A_2^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
A_3^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

***

Determinare le matrici che commutano con $D = diag\,(1, 2, 3)$.
Soluzione
Sia

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Quindi:

$$AD = \begin{pmatrix} a_{11} & 2a_{12} & 3a_{13} \\ a_{21} & 2a_{22} & 3a_{23} \\ a_{31} & 2a_{32} & 3a_{33} \end{pmatrix}$$
$$DA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ 3a_{31} & 3a_{32} & 3a_{33} \end{pmatrix}$$

A e D commutano se:

$$AD = DA \Longleftrightarrow \begin{cases} a_{12} = 2a_{12} \\ a_{13} = 3a_{13} \\ a_{21} = 2a_{12} \\ a_{31} = 3a_{31} \\ 3a_{32} = 2a_{32} \end{cases}$$

Cioè

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 2a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 3a_{33} \end{pmatrix}, \forall a_{11}, a_{22}, a_{33}$$

Ridefinendo (in forza della loro arbitarietà) a_{11}, a_{22}, a_{33}:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

Il risultato precedente si generalizza al caso di una matrice diagonale di ordine n. Precisamente, la più generale matrice quadrata di ordine n che commuta con $D_n = diag\,(d_{11}, d_{22}, ..., d_{nn})$.

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

***

Determinare l'inversa della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ applicando la definizione.

Soluzione

Imponiamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cioè:

$$\begin{cases} a + 2c = 1 \\ 3a + 4c = 1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} b + 2d = 0 \\ 3b + 4d = 1 \end{cases}$$

Risolvendo entrambi i sistemi lineari:

$$(a, c) = \left(-2, \frac{3}{2}\right), \ (b, d) = \left(1, -\frac{1}{2}\right),$$

donde:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

***

Assegnata la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

verificare che è involutoria.
Soluzione
Abbiamo:

$$\begin{aligned} A^2 &= A \cdot A \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

***

Assegnate le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 2+3i \\ 1-i & 2 & -i \\ 2-3i & i & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} i & 1+i & 2-3i \\ -1+i & 2i & 1 \\ -2-3i & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

verificare che A è hermitiana, e B antihermitiana.
Soluzione
Abbiamo:

$$\begin{aligned} A^* &= \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 2-3i \\ 1+i & 2 & i \\ 2+3i & -i & 0 \end{pmatrix} \\ (A^*)^T &= \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 2+3i \\ 1-i & 2 & -i \\ 2-3i & i & 0 \end{pmatrix} = A \\ (B^*)^T &= \begin{pmatrix} i & 1+i & 2-3i \\ -1+i & 2i & 1 \\ -2-3i & -1 & 0 \end{pmatrix} = -B \end{aligned}$$

1.10.2 Minori e complementi algebrici

Assegnata la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 12 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{pmatrix}$$

Determinare il minore complementare e il complemento algebrico del minore del terzo ordine $a_{145,135}$.

Soluzione

Abbiamo:

$$a_{145,135} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 16 & 18 & 20 \\ 21 & 23 & 25 \end{vmatrix} \tag{1.54}$$

Il minore complementare di (1.54) è il minore del second'ordine:

$$a_{23,24} = \begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 12 & 4 \end{vmatrix} = -10$$

Il complemento algebrico:

$$a'_{145,135} = (-1)^{1+4+5+1+3+5} a_{23,24} = -a_{23,24}$$

***

Assegnate le matrici:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} -1/3 & -2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}; \; B = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

verificare che i complementi algebrici degli elementi di A, B soddisfano rispettivamente le proprietà seguenti:

$$a'_{ij} = a_{ij}, \; b'_{ij} = b_{ji}$$

Soluzione

Per la matrice A:

$$\begin{aligned} a'_{11} &= -\frac{1}{3} = a_{11}, \; a'_{12} = -\frac{2}{3} = a_{12}, \; a'_{13} = -\frac{2}{3} = a'_{13} \\ a'_{21} &= \frac{2}{3} = a_{21}, \; a'_{22} = \frac{1}{3} = a_{22}, \; a'_{23} = -\frac{2}{3} = a'_{23} \\ a'_{31} &= \frac{2}{3} = a_{31}, \; a'_{22} = -\frac{2}{3} = a_{22}, \; a'_{33} = -\frac{2}{3} = a'_{33} \end{aligned}$$

In maniera analoga per la matrice B.

***

Assegnata la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Determinare i cofattori dei singoli elementi, nonché la matrice inversa.
Soluzione
Abbiamo:

$$a'_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \quad a'_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \quad a'_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$
$$a'_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \quad a'_{22} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \quad a'_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$
$$a'_{31} = +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5 \quad a'_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 \quad a'_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

La matrice aggiunta è:

$$A^{(a)} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -5 \\ -2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

L'inversa:

$$A^{-1} = \frac{A^{(a)}}{\det A}$$

Calcolo del determinante:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = +1$$

Quindi:

$$A^{-1} = A^{(a)}$$

***

Assegnato il determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} bc & a^2 & a^2 \\ b^2 & ca & b^2 \\ c^2 & c^2 & ab \end{vmatrix},$$

si moltiplichino le sue colonne per a, b, c. Quindi, raccogliendo il fattore comune di ciascuna riga, si dimostri che:

$$\Delta = \begin{vmatrix} bc & ab & ac \\ ab & ac & cb \\ ac & bc & ab \end{vmatrix}$$

Soluzione
Abbiamo:

$$a\Delta = a \begin{vmatrix} bc & a^2 & a^2 \\ b^2 & ca & b^2 \\ c^2 & c^2 & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} abc & a^2 & a^2 \\ ab^2 & ca & b^2 \\ ac^2 & c^2 & ab \end{vmatrix}$$

$$ab\Delta = b \begin{vmatrix} abc & a^2 & a^2 \\ ab^2 & ca & b^2 \\ ac^2 & c^2 & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} abc & a^2b & a^2 \\ ab^2 & bca & b^2 \\ ac^2 & bc^2 & ab \end{vmatrix}$$

$$abc\Delta = c \begin{vmatrix} abc & a^2b & a^2 \\ ab^2 & bca & b^2 \\ ac^2 & bc^2 & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} abc & a^2b & a^2c \\ ab^2 & bca & cb^2 \\ ac^2 & bc^2 & abc \end{vmatrix}$$

Raccogliendo i fattori comuni per singola riga:

$$abc\Delta = abc \begin{vmatrix} bc & ab & ac \\ ab & ac & cb \\ ac & bc & ab \end{vmatrix} \Longrightarrow \Delta = \begin{vmatrix} bc & ab & ac \\ ab & ac & cb \\ ac & bc & ab \end{vmatrix}$$

***

1.10.3 Calcolo di determinanti del secondo ordine

(Soluzioni in A.1)

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a & c+id \\ c-id & b \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} \alpha+i\beta & \gamma+i\delta \\ \gamma-i\delta & \alpha-i\beta \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} \tan\alpha & -1 \\ 1 & \tan\alpha \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & \lg_b a \\ \lg_a b & 1 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} a+b & b+d \\ a+c & c+d \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a-b \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^3 & x^2+x+1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} \omega & \omega \\ -1 & \omega \end{vmatrix};$$

1.10.4 Calcolo di determinanti del terzo ordine

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4} \\ \cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3} & 1 & \cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3} \\ \cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{2\pi}{3} & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{vmatrix};$$

1.10.5 Calcolo di determinanti di ordine qualsiasi

Determinare i valori di $x \in \mathbb{R}$ per i quali è nullo il determinante:

$$f(x) = \begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -x \end{vmatrix}$$

Calcolare il determinante della matrice di ordine n:

$$A_{diag} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 2 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 3 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & n \end{pmatrix}$$

***

Calcolare il determinante di ordine n:

$$\Delta(n) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad n = 2, 3, 4, ..., +\infty \tag{1.55}$$

***

Calcolare il determinante di ordine n:

$$D(n) = \begin{vmatrix} 1 & a & a & ... & a \\ 0 & 2 & a & ... & a \\ 0 & 0 & 3 & ... & a \\ 0 & 0 & 0 & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & n \end{vmatrix}, \quad n = 2, 3, 4, ..., +\infty \tag{1.56}$$

***

Assegnata la funzione:

$$f_n(x) = \prod_{k=0}^{n-1} (x - k), \quad \text{con } n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}, \tag{1.57}$$

calcolare i seguenti determinanti di ordine $n + 1$:

a) $F(n) = \begin{vmatrix} f_n(0) & f_n(1) & f_n(2) & ... & f_n(n) \\ f_n(1) & f_n(2) & f_n(3) & ... & f_n(n+1) \\ ... & ... & ... & .. & ... \\ f_n(n) & f_n(n+1) & f_n(n+2) & ... & f_n(2n) \end{vmatrix}$

b) $G(x,n) = \begin{vmatrix} f_n(x) & f'_n(x) & f''_n(x) & ... & f_n^{(n)}(x) \\ f'_n(x) & f''_n(x) & f'''_n(x) & ... & f_n^{(n+1)}(x) \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ f''_n(x) & f'''_n(x) & ... & ... & f_n^{(2n)}(x) \end{vmatrix}$

***

Assegnati $a_k \in \mathbb{R}$ con $a_{k'} \neq a_{k''}$ $(k', k'' = 1, 2, ...n)$, risolvere l'equazione algebrica di grado $n-1$:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & ... & x^{n-1} \\ 1 & a_1 & a_1^2 & ... & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & ... & a_2^{n-1} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & ... & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} = 0 \tag{1.58}$$

***

Risolvere l'equazione algebrica di grado $n-2$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & ... & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & ... & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & 1 & 1 & ... & (n-1)-x \end{vmatrix} \tag{1.59}$$

Assegnati $a_k \in \mathbb{R}$ con $a_{k'} \neq a_{k''}$ $(k', k'' = 1, 2, ...n)$, risolvere l'equazione algebrica di grado $n-1$:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & ... & a_n \\ a_1 & a_1+a_2-x & a_3 & ... & a_n \\ a_1 & a_2 & a_2+a_3-x & ... & a_n \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_1 & a_2 & a_3 & ... & a_{n-1}+a_n-x \end{vmatrix} = 0 \tag{1.60}$$

***

Dimostrare che

$$\begin{vmatrix} \alpha^2 & (\alpha+1)^2 & (\alpha+2)^2 & (\alpha+3)^2 \\ \beta^2 & (\beta+1)^2 & (\beta+2)^2 & (\beta+3)^2 \\ \gamma^2 & (\gamma+1)^2 & (\gamma+2)^2 & (\gamma+3)^2 \\ \delta^2 & (\delta+1)^2 & (\delta+2)^2 & (\delta+3)^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{1.61}$$

***

Assegnata la matrice diagonale di ordine n:

$$A_{diag} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & a_n \end{pmatrix}, \tag{1.62}$$

determinare la somma dei complementi algebrici degli elementi di matrice.

***

Assegnata la matrice di ordine n:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & ... & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_n & 0 & ... & ... & 0 \end{pmatrix} \tag{1.63}$$

determinare la somma dei complementi algebrici degli elementi di matrice.

***

Calcolare il seguente determinante, sviluppando secondo gli elementi delle terza riga:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ a & b & c & d \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \tag{1.64}$$

Calcolare il seguente determinante, sviluppando secondo gli elementi delle quarta colonna:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & 1 & y \\ 1 & 1 & 2 & z \\ 1 & 1 & 1 & t \end{vmatrix} \tag{1.65}$$

***

Calcolare il seguente determinante, sviluppando secondo gli elementi delle prima colonna:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 \\ d & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \tag{1.66}$$

***

Calcolare:

1. $\begin{vmatrix} 13547 & 13647 \\ 28423 & 28523 \end{vmatrix} = -1487\,600$

2. $\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix} = -29\,400\,000$

3. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 48$

4. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} = 1$

5. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 160$

6. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix} = 12$

7. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 900$

8. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 394$

9. $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0$

10. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & b \\ 1 & a & 0 & c \\ 1 & b & c & 0 \end{vmatrix} = c^2 - 2ac - 2bc + b^2 - 2ba + a^2$

11. $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} = -2x^3 - 2y^3$

12. $\begin{vmatrix} x & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & x & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x-1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & x & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} = x^5 - x^4 + x^2 - x + 1 + x^3$

13. $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix} = z^2x^2$

14. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix} = -12 - 3x^4 + 15x^2$$

15. $$\begin{vmatrix} \cos(a-b) & \cos(b-c) & \cos(c-a) \\ \cos(a+b) & \cos(b+c) & \cos(c+a) \\ \sin(a+b) & \sin(b+c) & \sin(c+a) \end{vmatrix} = 2\sin(a-b)\sin(a-c)\sin(b-c)$$

16. $$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix} = [-eb + af + 2c\sin(a-b)\sin(a-c)\sin(b-c)]^2$$

17. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ -1 & 0 & 3 & ... & n \\ -1 & -2 & 0 & ... & n \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ -1 & -2 & -3 & ... & 0 \end{vmatrix}$$

18. $$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & ... & a_n \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & ... & a_n \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & ... & a_n \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & a_1 & a_2 & ... & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

19. Esplicitare l'espressione analitica della funzione $f_n(x, x_1, x_2, ..., x_n)$ data dallo sviluppo del determinante di ordine n:

$$f_n(x; x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & ... & x_{n-1} & x_n \\ 1 & x & x_2 & ... & x_{n-1} & x_n \\ 1 & x_1 & x & ... & x_{n-1} & x_n \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & x_1 & x_2 & ... & x_{n-1} & x_n \\ 1 & x_1 & x_2 & ... & x_{n-1} & x \end{vmatrix}$$

20. Calcolare:

$$\Delta(n) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n-1 & n \\ 1 & 3 & 3 & ... & n-1 & n \\ 1 & 2 & 5 & ... & n-1 & n \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & 2 & 3 & ... & 2n-3 & n \\ 1 & 2 & 3 & ... & n-1 & 2n-1 \end{vmatrix} \tag{1.67}$$

21. Calcolare:

$$\Delta(n) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & ... & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & ... & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & ... & 2 & 2 \\ ... & ... & ... & ... & ... & 2 \\ 2 & 2 & 2 & ... & n-1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & ... & ... & n \end{vmatrix} \tag{1.68}$$

22. Calcolare:

$$\phi\left(b_1, b_2, ..., b_n\right) = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ -1 & 1-b_1 & b_2 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_2 & b_2 & .. & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1-b_{n-1} & b_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & -1 & 1-b_n \end{vmatrix}, \text{ con } n \in \mathbb{N} - \{0\} \tag{1.69}$$

23. Calcolare:

$$\Delta\left(n\right) = \begin{vmatrix} a & a+h & a+2h & ... & a+(n-1)h \\ -a & a & 0 & ... & 0 \\ 0 & -a & a & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & a \end{vmatrix} \tag{1.70}$$

24. Calcolare:

$$\Delta\left(n\right) = \begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & ... & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n-1} & 0 & 0 & ... & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & ... & 0 & x \end{vmatrix} \tag{1.71}$$

25. Calcolare:

$$\Delta\left(n\right) = \begin{vmatrix} n & n-1 & n-2 & ... & 3 & 2 & 1 \\ -1 & x & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

26. Se $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ e se $f_k\left(x\right)$ con $k = 1, 2, ..., n$, sono polinomi su $\mathbb{R}$ di grado $r_k \leq n-2$, dimostrare:

$$\forall a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}, \quad \begin{vmatrix} f_1\left(a_1\right) & f_1\left(a_2\right) & ... & f_1\left(a_n\right) \\ f_2\left(a_1\right) & f_2\left(a_2\right) & ... & f_2\left(a_n\right) \\ ... & ... & ... & ... \\ f_n\left(a_1\right) & f_n\left(a_2\right) & ... & f_n\left(a_n\right) \end{vmatrix} = 0 \tag{1.72}$$

27. Calcolare ($n \in \mathbb{N} - \{0\}$):

$$f\left(x_1, x_2, ...x_n; y_1, y_2, ..., y_n\right) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & ... & a_{n-1} & a_n \\ -y_1 & x_1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & -y_2 & x_2 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & -y_n & x_n \end{vmatrix} \tag{1.73}$$

28. Calcolare ($n \in \mathbb{N} - \{0\}$):

$$f_n(x) = \begin{vmatrix} n!a_0 & (n-1)\,a_1 & (n-2)\,a_2 & a_n \\ -n & x & 0 & 0 \\ 0 & -(n-1) & x & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & \end{vmatrix} \tag{1.74}$$

29. Calcolare per ogni $n \in \mathbb{N} - \{0\}$

$$D(n) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 2 \end{vmatrix} \tag{1.75}$$

30. Costruire il diagramma cartesiano della funzione reale di variabile reale nell'intervallo $[-2, 2]$:

$$f_n(x) = \begin{vmatrix} 2\cos x & 1 & 0 & ... & 0 \\ 1 & 2\cos x & 1 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos x & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 2\cos x \end{vmatrix}, \tag{1.76}$$

per $n = 1, ..., 7$.

31. Costruire il diagramma cartesiano della funzione reale di variabile reale nell'intervallo $[-1, 1]$:

$$f_n(x) = \begin{vmatrix} \cos x & 1 & 0 & ... & 0 \\ 1 & 2\cos x & 1 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos x & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 2\cos x \end{vmatrix} \tag{1.77}$$

per $n = 1, ..., 7$.

Capitolo 2

Sistemi di equazioni lineari

2.1 Generalità

Sia Σ un sistema di m equazioni lineari in n incognite:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2.1}$$

Qui $a_{ij} \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) sono i *coefficienti*, mentre b_i sono i *termini noti*. Poniamo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

La matrice $A\,(m \times n)$ così definita, è la *matrice dei coefficienti*[1].
Risulta inoltre definita la seguente matrice $m \times n + 1$:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

denominata *matrice dei coefficienti e dei termini noti*[2].
Il sistema (2.1) può essere scritto come:

$$AX = B, \tag{2.4}$$

essendo:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

[1] Tale matrice è spesso denominata *matrice incompleta.*
[2] Tale matrice è spesso denominata *matrice completa.*

il vettore colonna di dimensioni $n \times 1$, mentre:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

è il vettore colonna costituito dai termini noti.
Una *soluzione* di (2.4) [o di (2.1)] è ogni *n-pla* $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n$(o $\mathbb{C}^n$) tale che:

$$A\Xi = B,$$

dove:

$$\Xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ ... \\ \xi_n \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

Chiamiamo Ξ *vettore soluzione* di (2.4).
Definizione 2. Il sistema (2.4) [o (2.1)] si dice *compatibile* se ammette almeno una soluzione. Di contro, è *incompatibile* se è privo di soluzioni. Risolvere il sistema (2.4) equivale a verificare la sua compatibilità e in caso affermativo ricercare le soluzioni.
Definizione 3
Un sistema compatibile si dice *determinato* se ammette una ed una sola soluzione. Se un sistema compatibile ammette più di una soluzione, ne ammette infinite. In tal caso il sistema si dice *indeterminato.*

2.2 Ricerca delle soluzioni

Sia p il rango della matrice dei coefficienti. Chiamiamo p *rango* del sistema (2.1). Come è noto, deve essere $p \leq \min\{m, n\}$.
Inoltre, per definizione di rango di una matrice, esiste almeno un minore di A non nullo di ordine p. Preso ad arbitrio un minore non nullo di ordine p, chiameremo tale minore *determinante fondamentale.*
Senza perdita di generalità[3] supponiamo che tale minore sia il determinante della matrice quadrata di ordine p:

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2p} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{p1} & a_{p2} & ... & a_{pp} \end{pmatrix}, \ \det C \neq 0 \tag{2.8}$$

I casi possibili sono:

1. $p = m$. In tal caso il sistema Σ è un *sistema normale.*

2. $p < m$. In tal caso il sistema Σ è un *sistema non normale.*

[3]Basta comunque effettuare opportuni scambi di righe e colonne.

2.3 Sistemi normali: teorema di Cramer

Per quanto detto deve essere $p = m$. Abbiamo i due sottocasi:

a $p = n$;

b $p < n$.

Nel caso **a** il sistema è di p equazioni in p incognite con la matrice dei coefficienti pari a C [eq .(2.8)] Quindi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2p}x_p = b_2 \\ \qquad ... \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + ... + a_{pp}x_p = b_p, \end{cases} \tag{2.9}$$

che può essere scritto come:

$$CX = B \tag{2.10}$$

Abbiamo il
Teorema 1
Il sistema (2.9) ammette una ed una sola soluzione:

$$X = C^{-1}B \tag{2.11}$$

Dimostrazione. La matrice C è tale che $\det C \neq 0$, donde è dotata di inversa C^{-1}. Moltiplichiamo per C^{-1} primo e secondo membro (da sinistra) della (2.10):

$$C^{-1}(CX) = C^{-1}B \Longleftrightarrow \left(CC^{-1}\right)X = C^{-1}B \underset{CC^{-1}=\overline{1}}{\Longleftrightarrow} X = C^{-1}B \tag{2.12}$$

Viceversa, il vettore colonna $C^{-1}B$ verifica la (2.10):

$$C\left(C^{-1}B\right) = \left(CC^{-1}\right)B = \overline{1}B = B \tag{2.13}$$

(Nelle (2.12) - (2.13), $\overline{1}$ è la matrice identità di ordine p). □

Dalla (2.11) segue il
Teorema 2 (Teorema di Cramer)
Il sistema (2.9) è compatibile e determinato. La soluzione è data da:

$$x_1 = \frac{\det C_1}{\det C}, x_2 = \frac{\det C_2}{\det C}, ..., x_p = \frac{\det C_p}{\det C} \tag{2.14}$$

Nella (2.14) C_j ($j = 1, 2, ..., p$) è la matrice di ordine p, ottenuta da C sostituendo alla colonna $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ ... \\ a_{pj} \end{pmatrix}$, *dei coefficienti dell'incognita x_j, la colonna* $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_p \end{pmatrix}$ *dei termini noti. Cioè:*

$$C_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & ... & a_{1p} \\ b_2 & a_{22} & ... & a_{2p} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_p & a_{p2} & ... & a_{pp} \end{pmatrix}, \; C_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & ... & a_{1p} \\ a_{21} & b_2 & ... & a_{2p} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{p1} & b_p & ... & a_{pp} \end{pmatrix}, \tag{2.15}$$

.....

$$C_p = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & ... & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & b_2 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{p1} & a_{p2} & ... & b_p \end{pmatrix}$$

Dimostrazione. Dall'algebra delle matrici:

$$\begin{aligned} C^{-1} &= \frac{1}{\det C} \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & ... & a'_{1p} \\ a'_{21} & a'_{22} & ... & a'_{2p} \\ ... & ... & ... & ... \\ a'_{p1} & a'_{p2} & ... & a'_{pp} \end{pmatrix}^T \\ &= \frac{1}{\det C} \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{21} & ... & a'_{p1} \\ a'_{12} & a'_{22} & ... & a'_{p2} \\ ... & ... & ... & ... \\ a'_{1p} & a'_{2p} & ... & a'_{pp} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.16}$$

Qui a'_{ij} è il complemento algebrico di a_{ij}. Per la (2.11):

$$X = \frac{1}{\det C} \begin{pmatrix} a'_{11}b_1 + a'_{21}b_2 + ... + a'_{p1}b_p \\ a'_{12}b_1 + a'_{22}b_2 + ... + a'_{p2}b_p \\ ... \\ a'_{1p}b_1 + a'_{2p}b_2 + ... + a'_{pp}b_p \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

È facile rendersi conto che $a'_{1j}b_1 + a'_{2j}b_2 + ... + a'_{pj}b_p$ è lo sviluppo del determinante della matrice C_j, per cui:

$$X = \frac{1}{\det C} \begin{pmatrix} \det C_1 \\ \det C_2 \\ ... \\ \det C_p \end{pmatrix},$$

donde l'asserto (2.14). □

***

Passiamo ora ai sistemi di tipo **b**. Ora il numero delle incognite è $n > p$, quindi il sistema si scrive:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1p}x_p + a_{1,p+1}x_{p+1} + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2p}x_p + a_{2,p+1}x_{p+1} + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad ..... \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + ... + a_{pp}x_p + a_{p,p+1}x_{p+1} + ... + a_{pn}x_n = b_p \end{cases} \tag{2.18}$$

Abbiamo il seguente:

Teorema 3
Il sistema (2.18) *ammette* ∞^{n-p} *soluzioni, che si ottengono assumendo come parametri le incognite* x_j, *con* $j = p+1, p+2, ..., n$ *e applicando il teorema di Cramer.*
Infatti, il sistema (2.18) può essere scritto come:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1p}x_p = b_1 - (a_{1,p+1}x_{p+1} + ... + a_{1n}x_n) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2p}x_p = b_2 - (a_{2,p+1}x_{p+1} + ... + a_{2n}x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + ... + a_{pp}x_p = b_p - (a_{p,p+1}x_{p+1} + ... + a_{nn}x_n) \end{cases} \tag{2.19}$$

Poniamo:

$$\lambda_1 = x_{p+1},\ \lambda_2 = x_{p+2}, ...\ \lambda_{n-p} = x_n$$

Siccome le λ_k sono arbitrarie, segue che il numero di soluzioni è ∞^{n-p}.
Si conclude che i sistemi normali ($p = m$) sono sempre compatibili. Più specificatamente, sono determinati se $n = m$, indeterminati se $n > m$.

Osservazione. Il numero di equazioni di un sistema normale è $m \leq n$. Infatti, se $m > n$, è $p < m$, giacché $p \leq \min\{m, n\}$. Ad esempio, il sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 = b_3 \end{cases}$$

è composto da $m = 3$ equazioni in $n = 2$ incognite. Quindi è $p \leq 2$, perciò il sistema è non normale ($p < m$).

2.4 Sistemi non normali: Teoremi di Rouchè e di Capelli

In un sistema non normale è $p < m$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1p}x_p + a_{1,p+1}x_{p+1} + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2p}x_p + a_{2,p+1}x_{p+1} + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + ... + a_{pp}x_p + a_{p,p+1}x_{p+1} + ... + a_{pn}x_n = b_p \\ a_{p+1,1}x_1 + a_{p+1,2}x_2 + ... + a_{p+1,p}x_p + a_{p+1,p+1}x_{p+1} + ... + a_{p+1,n}x_n = b_{p+1} \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mp}x_p + a_{m,p+1}x_{p+1} + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2.20}$$

deve essere:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2p} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{p1} & a_{p2} & ... & a_{pp} \end{vmatrix} \neq 0,$$

avendo indicato con Δ il determinante fondamentale del sistema (eq. (2.8))
Dimostriamo il seguente
Lemma

Assegnato $r \in \{p+1, p+2, ..., m\}$, risulta

$$\forall (x_1, x_2, ..., x_n), \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1p} & b_1 - \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2p} & b_2 - \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{p1} & a_{p2} & ... & a_{pp} & b_p - \sum_{j=1}^{n} a_{pj}x_j \\ a_{r1} & a_{r2} & ... & a_{rp} & b_r - \sum_{j=1}^{n} a_{rj}x_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1p} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2p} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{p1} & a_{p2} & ... & a_{pp} & b_p \\ a_{r1} & a_{r2} & ... & a_{rp} & b_r \end{vmatrix} \tag{2.21}$$

Dimostrazione. L'asserto è dimostrabile attraverso una nota proprietà dei determinanti. Precisamente (senza perdita di generalità), un determinante una cui colonna (o riga) è costituito da elementi binomi (in generale polinomi), ammette uno sviluppo del tipo:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & c_{1j} + d_{1j} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & c_{2j} + d_{2j} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & c_{nj} + d_{nj} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & c_{1j} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & c_{2j} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & c_{nj} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & d_{1j} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & d_{2j} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & d_{nj} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Indichiamo con D_1 il determinante a primo membro della (2.21). Abbiamo:

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1p} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2p} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{p1} & a_{p2} & ... & a_{pp} & b_p \\ a_{r1} & a_{r2} & ... & a_{rp} & b_r \end{vmatrix} - \underbrace{\sum_{j=1}^{n} x_j \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1p} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2p} & a_{2j} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{p1} & a_{p2} & ... & a_{pp} & a_{pj} \\ a_{r1} & a_{r2} & ... & a_{rp} & a_{rj} \end{vmatrix}}_{\stackrel{def}{=} D_2} \tag{2.22}$$

Esplicitiamo il determinante D_2:

$$
\begin{aligned}
D_2 = x_1 & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1p} & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2p} & a_{21} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{p1} & a_{p2} & ... & a_{pp} & a_{p1} \\ a_{r1} & a_{r2} & ... & a_{rp} & a_{r1} \end{vmatrix} + ...+ \\
+ x_2 & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1p} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2p} & a_{22} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{p1} & a_{p2} & ... & a_{pp} & a_{p2} \\ a_{r1} & a_{r2} & ... & a_{rp} & a_{r2} \end{vmatrix} + ... \\
+ x_p & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1p} & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2p} & a_{2p} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{p1} & a_{p2} & ... & a_{pp} & a_{pp} \\ a_{r1} & a_{r2} & ... & a_{rp} & a_{rp} \end{vmatrix} + \\
+ x_{p+1} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1p} & a_{1,p+1} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2p} & a_{2,p+1} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{p1} & a_{p2} & ... & a_{pp} & a_{p,p+1} \\ a_{r1} & a_{r2} & ... & a_{rp} & a_{r,p+1} \end{vmatrix} + ... \\
+ x_n & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1p} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2p} & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{p1} & a_{p2} & ... & a_{pp} & a_{pn} \\ a_{r1} & a_{r2} & ... & a_{rp} & a_{rn} \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

I determinanti a secondo membro sono tutti nulli: per $j = 1, ..., p$, hanno due colonne identiche; per $j = p+1, ..., n$, sono minori di ordine $p+1$ e come tali nulli, giacché il rango della matrice dei coefficienti è p. □

Definizione. Si definiscono *determinanti associati* al determinante fondamentale Δ, i determinanti:

$$
\Delta_r = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1p} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2p} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{p1} & a_{p2} & ... & a_{pp} & b_p \\ a_{r1} & a_{r2} & ... & a_{rp} & b_r \end{vmatrix}, \text{ con } r = p+1, p+2, ..., m \tag{2.23}
$$

Ora siamo in grado di enunciare il:

Teorema (di Rouche') 21.

$$
\text{il sistema è compatibile } \iff \Delta_r = 0, \text{ con } r = p+1, p+2, ..., m
$$

Dimostrazione. **Implicazione diretta** Per ipotesi il sistema è compatibile. Se $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ è una soluzione, per il lemma 2.4:

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1p} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2p} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{p1} & a_{p2} & ... & a_{pp} & b_p \\ a_{r1} & a_{r2} & ... & a_{rp} & b_r \end{vmatrix}$$

$$\underset{x_j=\xi_j}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1p} & b_1 - \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\xi_j \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2p} & b_2 - \sum_{j=1}^{n} a_{2j}\xi_j \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{p1} & a_{p2} & ... & a_{pp} & b_p - \sum_{j=1}^{n} a_{pj}\xi_j \\ a_{r1} & a_{r2} & ... & a_{rp} & b_r - \sum_{j=1}^{n} a_{rj}\xi_j \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1p} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2p} & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{p1} & a_{p2} & ... & a_{pp} & 0 \\ a_{r1} & a_{r2} & ... & a_{rp} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Implicazione inversa. L'ipotesi è:

$$\Delta_r = 0, \text{ con } r = p+1, p+2, ..., m$$

La (2.21) diventa:

$$\forall (x_1, x_2, ..., x_n), \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1p} & b_1 - \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2p} & b_2 - \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{p1} & a_{p2} & ... & a_{pp} & b_p - \sum_{j=1}^{n} a_{pj}x_j \\ a_{r1} & a_{r2} & ... & a_{rp} & b_r - \sum_{j=1}^{n} a_{rj}x_j \end{vmatrix} = 0 \tag{2.24}$$

Si consideri ora il sistema ottenuto dalla (2.20) conservando solo le prime p equazioni:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1p}x_p + a_{1,p+1}x_{p+1} + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2p}x_p + a_{2,p+1}x_{p+1} + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + ... + a_{pp}x_p + a_{p,p+1}x_{p+1} + ... + a_{pn}x_n = b_p \end{cases} \tag{2.25}$$

Tale sistema è compatibile, poiché il rango p è pari al numero di equazioni, ed è indeterminato (∞^{n-p} soluzioni). Se $(\xi_1, \xi_2, ...\xi_n)$ è una soluzione, abbiamo che ponendola in (2.24):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1p} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2p} & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{p1} & a_{p2} & ... & a_{pp} & 0 \\ a_{r1} & a_{r2} & ... & a_{rp} & b_r - \sum_{j=1}^{n} a_{rj}\xi_j \end{vmatrix} = 0$$

Cioè:

$$\left(b_r - \sum_{j=1}^{n} a_{rj}\xi_j\right)\Delta = 0 \underset{\Delta \neq 0}{\Longrightarrow} b_r - \sum_{j=1}^{n} a_{rj}\xi_j = 0 \tag{2.26}$$

Quindi le ξ_j soddisfano le rimanenti $m - p$ equazioni. □

Un enunciato equivalente è dato da:

Teorema (di Capelli) 22.

$$\text{il sistema è compatibile} \Longleftrightarrow R(A) = R(M)$$

Dimostrazione. **Implicazione inversa**

$$R(A) = R(M) = p \Longrightarrow \forall r \in \{p+1, p+2, ..., m\}, \Delta_r = 0$$

Per il teorema di Rouché il sistema è compatibile.
Implicazione diretta. L'ipotesi è la compatibilità del sistema. La tesi da dimostrare è $R(M) = p$. Prendiamo ad arbitrio un minore di ordine $p+1$ di M. Se è formato da colonne di soli elementi a_{ij} allora esso è nullo, in quanto minore di ordine $p+1$ di A. Viceversa è del tipo:

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & ... & a_{i_1 j_p} & b_{i_1} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & ... & a_{i_2 j_p} & b_{i_2} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{i_{p+1} j_1} & a_{i_{p+1} j_2} & ... & a_{i_{p+1} j_p} & b_{i_{p+1}} \end{vmatrix}$$

Considerando i complementi algebrici degli elementi dell'ultima colonna si ha che essi o sono tutti nulli ($\Longrightarrow \delta = 0$) o ne esiste almeno uno non nullo, ma in questo caso è un minore di ordine p della matrice A, che può essere assunto come determinante fondamentale del sistema. Quindi δ risulta essere un determinante associato e come tale è nullo per il teorema di Rouchè. Da ciò segue che tutti i minori di ordine $p+1$ sono nulli, donde l'asserto. □

2.5 Sistemi omogenei

Un sistema di equazioni lineari si dice omogeneo quando i suoi termini noti sono tutti nulli. Continuando a considerare un sistema di m equazioni in n incognite:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{2.27}$$

Osserviamo innanzitutto che un sistema omogeneo è sempre compatibile, poiché ammette la soluzione.

$$(x_1, x_2, ..., x_n) = (0, 0, ..., 0) \tag{2.28}$$

Si badi che ciò è in accordo con il teorema di Rouchè (se $p < m$). Infatti, supponendo senza ledere la generalità, che il determinante fondamentale del sistema sia:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2p} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{p1} & a_{p2} & ... & a_{pp} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{2.29}$$

con $p < m$. Segue che i determinanti associati a Δ sono tutti nulli:

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1p} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2p} & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{p1} & a_{p2} & ... & a_{pp} & 0 \\ a_{r1} & a_{r2} & ... & a_{rp} & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad r = p+1, p+2, ..., m$$

Quindi per il teorema di Rouchè il sistema è compatibile.
Ciò premesso, osserviamo che da un punto di vista applicativo non è molto interessante la soluzione (2.28), denominata *soluzione banale*, bensì le soluzioni non tutte nulle. Quest'ultime sono le *autosoluzioni* o *soluzioni proprie* del sistema.
Sussite il seguente

Teorema 23. Il sistema (2.27) ammette autosoluzioni se e solo se $p < n$

Dimostrazione. Per ipotesi il determinante fondamentale è (2.29). Quindi le soluzioni del sistema sono tutte e sole quelle del sistema equivalente ottenuto conservando le prime p equazioni:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1p}x_p + a_{1,p+1}x_{p+1} + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2p}x_p + a_{2,p+1}x_{p+1} + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad ... \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + ... + a_{pp}x_p + a_{p,p+1}x_{p+1} + ... + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \tag{2.30}$$

Risulta:

$$p = n \Longrightarrow \exists! \, (x_1, x_2, ..., x_n) = (0, 0, ..., 0)$$

Ciò implica che affinché esistano autosoluzioni deve necessariamente essere $p < n$. Si osservi che tale condizione è anche sufficiente. Infatti, posto:

$$x_{p+k} = \lambda_k, \quad \text{con } k = 1, 2, ..., n-p$$

con

$$(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{n-p}) \neq (0, 0, ..., 0)$$

il sistema (2.30) diventa:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1p}x_p = -\sum_{k=1}^{n-p} a_{1,p+k}\lambda_k \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2p}x_p = -\sum_{k=1}^{n-p} a_{2,p+k}\lambda_k \\ \qquad ... \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + ... + a_{pp}x_p = -\sum_{k=1}^{n-p} a_{p,p+k}\lambda_k \end{cases}, \tag{2.31}$$

ed ammette ∞^{n-p} soluzioni non tutte nulle. □

Consideriamo ora il caso particolare $m = n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \tag{2.32}$$

La matrice dei coefficienti è

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

È evidente che $p < n \Longleftrightarrow \det A = 0$. Da ciò segue:

$$\exists\,(x_1, x_2, ..., x_n) \neq (0, 0, ..., 0) \Longleftrightarrow \det A = 0$$

Cioè, un sistema omogeneo di n equazioni in n incognite ammette autosoluzioni se e solo se è nullo il determinante della matrice dei coefficienti.

2.6 Esempi numerici

Consideriamo il sistema:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ 2x_1 - x_2 &= 1 \end{aligned} \tag{2.33}$$

La matrice dei coefficienti è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Risulta: $r\,(A) = 2 = m$ (numero di equazioni di 2.33), donde il sistema è di Cramer. Le matrici (2.15) sono:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \; C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

L'unica soluzione (x_1, x_2) è:

$$x_1 = \frac{\det C_1}{\det C} = \frac{-3}{-3} = 1, \; x_2 = \frac{\det C_2}{\det C} = \frac{-3}{-3},$$

cioè:

$$\Xi = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$***$$

Risolviamo il sistema:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 0 + 3x_3 &= 1 \\ 0 + x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned} \tag{2.34}$$

La matrice dei coefficienti è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Il suo determinante è:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 - 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 - 2(-1-1) = -3 + 4 = 1 \Longrightarrow r(A) = 3,$$

quindi (2.34) è un sistema di Cramer.

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \; \det C_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -4$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \; \det C_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \; \det C_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

La soluzione è:

$$x_1 = -4, x_2 = -1, x_3 = 3$$

***

Risolviamo il sistema:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 + 0 + 2x_4 &= 0 \\ 0 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 3 \\ 9x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 0 &= 0 \end{aligned} \tag{2.35}$$

Il determinante della matrice dei coefficienti è:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 9 & 3 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 31 \Longrightarrow p = 4 = m \Longrightarrow \text{ il sistema è di Cramer}$$

Abbiamo:

$$\det C_1 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ .3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 31$$

$$\det C_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ .0 & 3 & 3 & 1 \\ 9 & 0 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 62$$

$$\det C_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ .0 & -2 & 3 & 1 \\ 9 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 93$$

$$\det C_4 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ .0 & -2 & 3 & 3 \\ 9 & 3 & -5 & 0 \end{vmatrix} = -61$$

da qui l'unica soluzione del sistema: $(1, 2, -2, 3)$.

***

Risolvere il sistema:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 7 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 6 \end{aligned}$$

Risulta:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \equiv \det C$$

$$\det C_1 = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\det C_2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\det C_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\det C_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 5$$

Capitolo 3

Spazi vettoriali

3.1 Definizione assiomatica

Sia E un insieme non vuoto e K un campo (ad esempio, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). L'insieme E è uno **spazio vettoriale** (e i suoi elementi si dicono **vettori**) su K se sono definite una legge di composizione interna χ e una legge di composizione esterna η:

$$\begin{aligned} \chi &: E \times E \longmapsto E \\ \eta &: K \times E \longmapsto E \end{aligned} \tag{3.1}$$

La prima delle (3.1) si chiama **addizione di vettori** e si indica con $+$. Quindi:

$$+ : (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in E \times E \longmapsto (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \in E \tag{3.2}$$

L'operazione (3.2) verifica le seguenti proprietà:

1. **Proprietà commutativa.**
   $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E, \;\; \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
2. **Proprietà associativa.**
   $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in E, \;\; \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$
3. **Esistenza dell'elemento neutro.**
   $\exists \mathbf{0} \in E \mid \forall \mathbf{u} \in E, \;\; \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$
4. **Esistenza dell'opposto**
   $\forall \mathbf{u} \in E, \exists\, (-\mathbf{u}) \in E \mid -\mathbf{u} + \mathbf{u} = \mathbf{0}$

La seconda delle (3.1) si chiama **moltiplicazione di uno scalare per un vettore**:

$$\eta : (\lambda, \mathbf{v}) \in K \times E \longmapsto (\lambda \mathbf{v}) \in E \tag{3.3}$$

L'operazione (3.3) verifica le seguenti proprietà:

I Proprietà distributiva rispetto alla somma vettoriale.
$\forall \lambda \in K, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E, \; \lambda\, (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda \mathbf{u} + \lambda \mathbf{v}$

II Proprietà distributiva rispetto alla somma in K

$\forall \lambda, \mu \in K$, $\forall \mathbf{v} \in E$, $(\lambda + \mu)\,\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{v}$

III Proprietà associativa

$\forall \lambda, \mu \in K$, $\forall \mathbf{v} \in E$, $\lambda\,(\mu\mathbf{v}) = (\lambda\mu)\,\mathbf{v}$

IV Esistenza dell'elemento neutro

$\exists 1 \in K \mid \forall \mathbf{v} \in E$, $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$

Per quanto detto, se le operazioni (3.1) verificano le proprietà 1, 2, 3, 4 e I, II, III, IV, l'insieme E assume la struttura di spazio vettoriale su K. Gli elementi di K si dicono **scalari.**

Esempio 24. Consideriamo l'insieme $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}}_{n}$ delle n-ple ordinate di numeri reali:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, ..., n\}$$

Definiamo l'operazione di addizione:

$$+ : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longmapsto (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n$$

essendo:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, ...x_n)\,,\ \mathbf{y} = (y_1, y_2, ...y_n)$$

Per definizione:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$

Abbiamo

1. $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $x_i + y_i = y_i + x_i$ $(i = 1, 2, ..., n) \Longrightarrow \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$
2. $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, $x_i + (y_i + z_i) = (x_i + y_i) + z_i$, $(i = 1, 2, ..., n) \Longrightarrow \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$
3. $\exists \mathbf{0} = (0, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n \mid \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$
4. $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\exists - \mathbf{x} = (-x_1, -x_2, ..., -x_n) \in \mathbb{R}^n \mid -\mathbf{x} + \mathbf{x} = \mathbf{0}$

   L'operazione di moltiplicazione di uno scalare per un vettore è così definita:

$$a\mathbf{x} = (ax_1, ax_2, ..., ax_n)\,, \quad a \in \mathbb{R}$$

   e verifica le proprietà:

I $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $a\,(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = a\mathbf{x} + a\mathbf{y}$

II $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $(a + b)\,\mathbf{x} = a\mathbf{x} + b\mathbf{x}$

III $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $a\,(b\mathbf{x}) = (ab)\,\mathbf{x}$

IV $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$

Da ciò segue che con le operazioni sopra definite, l'insieme $\mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale sul campo reale $\mathbb{R}$.

Esempio 25. Consideriamo l'insieme $\mathbb{C}^n$ delle n-ple ordinate di numeri complessi:

$$\mathbb{C}^n = \{(z_1, z_2, ..., z_n) : z_i \in \mathbb{C},\ i = 1, 2, ..., n\}$$

Definiamo l'operazione di addizione:

$$+ : (\mathbf{z}, \mathbf{w}) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longmapsto \mathbb{C}^n$$

essendo:

$$\mathbf{z} = (z_1, z_2, ...z_n)\,,\ \mathbf{w} = (w_1, w_2, ...w_n)$$

Per definizione:

$$\mathbf{z} + \mathbf{w} = (z_1 + w_1, z_2 + w_2, ..., z_n + w_n)$$

È evidente che:

1. $\forall \mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{z} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{z}$
1. $\forall \mathbf{z}, \mathbf{w}, \mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{z} + (\mathbf{w} + \mathbf{u}) = (\mathbf{z} + \mathbf{w}) + \mathbf{u}$
2. $\exists \mathbf{0} = (0, 0, ...0) \in \mathbb{C}^n : \mathbf{z} + \mathbf{0} = \mathbf{z}$
3. $\forall \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$, $\exists - \mathbf{z} = (-z_1, -z_2, ..., -z_n) \in \mathbb{C}^n : -\mathbf{z} + \mathbf{z} = \mathbf{0}$

   L'operazione di moltiplicazione di uno scalare per un vettore è così definita:

$$a\mathbf{z} = (az_1, az_2, ..., az_n)\,, \quad a \in \mathbb{C}$$

   e verifica le proprietà:

I $\forall a \in \mathbb{C}$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$, $a(\mathbf{z} + \mathbf{w}) = a\mathbf{z} + a\mathbf{w}$

II $\forall a, b \in \mathbb{C}$, $\forall \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$, $(a + b)\mathbf{z} = a\mathbf{z} + b\mathbf{z}$

III $\forall a, b \in \mathbb{C}$, $\forall \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$, $a(b\mathbf{z}) = (ab)\mathbf{z}$

IV $\forall \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$, $1\mathbf{z} = \mathbf{z}$

Da ciò segue che con le operazioni sopra definite, l'insieme $\mathbb{C}^n$ è uno spazio vettoriale sul campo complesso $\mathbb{C}$.

Esempio 26. Sia $M_{\mathbb{R}}(m, n)$ l'insieme delle matrici $m \times n$ su $\mathbb{R}$. Introduciamo in $M_{\mathbb{R}}(m, n)$ l'operazione di addizione:

$$+ : (A, B) \in M_{\mathbb{R}}(m, n) \times M_{\mathbb{R}}(m, n) \longmapsto (A + B) \in M_{\mathbb{R}}(m, n)$$

Più precisamente:

$$(A = (a_{ij})\,,\ \ B = (b_{ij})) \Longrightarrow A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

L'operazione di addizione verifica le seguenti proprietà:

1. $\forall A, B \in M_{\mathbb{R}}(m, n)$, $A + B = B + A$
2. $\forall A, B, C \in M_{\mathbb{R}}(m, n)$, $A + (B + C) = (A + B) + C$

3. $\exists 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix} \in M_{\mathbb{R}}(m,n) \mid \forall A \in M_{\mathbb{R}}(m,n),\ A+0=A$

4. $\forall A = (a_{ij}) \in M_{\mathbb{R}}(m,n),\ \exists -A = (-a_{ij}) \in M_{\mathbb{R}}(m,n) : -A + A = 0$

Definiamo l'operazione moltiplicazione di uno scalare per una matrice:

$$\eta : (\lambda, A) \in \mathbb{R} \times M_{\mathbb{R}}(m,n) \longmapsto (\lambda A) \in M_{\mathbb{R}}(m,n)$$

Più precisamente:

$$(\lambda \in \mathbb{R},\ A = (a_{ij})) \Longrightarrow \lambda A = (\lambda a_{ij})$$

Tale operazione verifica le seguenti proprietà:

I $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall A, B \in M_{\mathbb{R}}(m,n),\ \lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$

II $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall A \in M_{\mathbb{R}}(m,n),\ (\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$

III $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall A \in M_{\mathbb{R}}(m,n),\ \lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$

IV $\forall A \in M_{\mathbb{R}}(m,n),\ 1A = A$

Si conclude che $M_{\mathbb{R}}(m,n)$ con le operazioni sopra introdotte assume la struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

Esempio 27. Sia $\mathcal{P}_n[x]$ l'insieme dei polinomi su $\mathbb{R}$ di grado minore o uguale di $n \in \mathbb{N}$. Prendiamo ad arbitrio due elementi di tale insieme:

$$\begin{aligned} p_m(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_m x^m \\ q_r(x) &= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_r x^r, \end{aligned}$$

essendo $m, r \leq n$. Definiamo l'addizione tra polinomi:

$$+ : (p_m(x), q_r(x)) \in \mathcal{P}_n[x] \times \mathcal{P}_n[x] \longmapsto (p_m(x) + q_r(x)) \in \mathcal{P}_n[x]$$

Senza ledere la generalità, supponiamo che $m < r$:

$$\begin{aligned} &p_m(x) + q_r(x) \\ &= (a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + (a_2+b_2)x^2 + ... + (a_m+b_m)x^m + b_{m+1}x^{m+1} + ... + b_r x^r \end{aligned}$$

L'operazione di addizione verifica le seguenti proprietà:

1. $\forall p_m(x), q_r(x) \in \mathcal{P}_n[x],\ p_m(x) + q_r(x) = q_r(x) + p_m(x)$

2. $\forall p_m(x), q_r(x), l_k(x) \in \mathcal{P}_n[x],\ \ p_m(x) + (q_r(x) + l_k(x)) = (p_m(x) + q_r(x)) + l_k(x)$

3. $\exists 0 = 0 + 0x + 0x^2 + ... + 0x^n \mid \ \forall p_m(x) \in \mathcal{P}_n[x],\ p_m(x) + 0 = p_m(x)$

4. $\forall p_m(x) = \left(\sum_{k=1}^m a_k x^k\right) \in \mathcal{P}_n[x],\ \exists -p_m(x) = \left(\sum_{k=1}^m (-a_k) x^k\right) \in \mathcal{P}_n[x] \mid -p_m(x) + p_m(x) = 0$

Definiamo l'operazione moltiplicazione di uno scalare per un polinomio

$$\eta : (\lambda, p_m(x)) \in \mathbb{R} \times \mathcal{P}_n[x] \longmapsto (\lambda p_m(x)) \in \mathcal{P}_n[x]$$

Più specificatamente:

$$p_m(x) = \sum_{k=1}^{m} a_j x^j \Longrightarrow \lambda p_m(x) = \sum_{k=1}^{m} (\lambda a_j) x^j$$

Esempio 28. Tale operazione verifica le seguenti proprietà:

I $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall p_m(x), q_r(x) \in \mathcal{P}_n[x]$, $\lambda(p_m(x) + q_r(x)) = \lambda p_m(x) + \lambda q_r(x)$

II $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall p_m(x) \in \mathcal{P}_n[x]$, $(\lambda + \mu) p_m(x) = \lambda p_m(x) + \mu p_m(x)$

III $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall p_m(x) \in \mathcal{P}_n[x]$, $\lambda(\mu p_m(x)) = (\lambda\mu) p_m(x)$

IV $\forall p_m(x) \in \mathcal{P}_n[x]$, $1 p_m(x) = p_m(x)$

Da ciò segue che l'insieme $\mathcal{P}_n[x]$ con l'operazioni sopra introdotte assume la struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

Esempio 29. Sia $\mathcal{F}(a,b)$ l'insieme delle funzioni reali di variabile reale definite in $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$:

$$f \in \mathcal{F}(a,b) \Longleftrightarrow f : [a,b] \longmapsto \mathbb{R}$$

Definiamo l'addizione:

$$+ : (f,g) \in \mathcal{F}(a,b) \times \mathcal{F}(a,b) \longmapsto (f+g) \in \mathcal{F}(a,b) \tag{3.4}$$

Più specificatamente:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

La (3.4) verifica le seguenti proprietà:

1. $\forall f, g \in \mathcal{F}(a,b)$, $f + g = g + f$
2. $\forall f, g, h \in \mathcal{F}(a,b)$, $f + (g + h) = (f + g) + h$
3. $\exists \mathbf{0} \equiv 0$ (funzione identicamente nulla): $\forall f \in \mathcal{F}(a,b)$, $f + \mathbf{0} = f$
4. $\forall f \in \mathcal{F}(a,b)$, $\exists -f : -f + f = \mathbf{0}$

Definiamo l'operazione moltiplicazione di uno scalare per un elemento di $\mathcal{F}(a,b)$:

$$\eta : (\lambda, f) \in \mathbb{R} \times \mathcal{F}(a,b) \longmapsto (\lambda f) \in \mathcal{F}(a,b)$$

Precisamente:

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x),$$

e verifica le seguenti proprietà:

I $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall f, g \in \mathcal{F}(a,b)$, $\lambda(f+g) = \lambda f + \lambda g$

II $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall f \in \mathcal{F}(a,b)$, $(\lambda + \mu) f(x) = \lambda f(x) + \mu g(x)$

III $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall f \in \mathcal{F}(a,b)$, $\lambda(\mu f) = (\lambda\mu) f(x)$

IV $\forall f \in \mathcal{F}(a,b)$, $1f = f$

Con le operazioni sopra introdotte, $\mathcal{F}(a,b)$ assume la struttura di spazio vettoriale sul campo reale.

***

Sia E uno spazio vettoriale su K.

Proposizione. $\forall \lambda \in K, \quad \lambda \mathbf{0} = \mathbf{0}$

Dimostrazione. $\lambda \mathbf{0} = \lambda(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = \lambda \mathbf{0} + \lambda \mathbf{0} \Longrightarrow \lambda \mathbf{0} = \mathbf{0}$ □

Proposizione. $\forall \mathbf{v} \in E, \ 0\mathbf{v} = \mathbf{0}$

Dimostrazione. $0\mathbf{v} = (0+0)\mathbf{v} = 0\mathbf{v} + 0\mathbf{v} \Longrightarrow 0\mathbf{v} = \mathbf{0}$ □

3.2 Dipendenza ed indipendenza lineare di vettori

Sia E uno spazio vettoriale su K. Consideriamo il **sistema di vettori**:

$$\Sigma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r\}, \ \text{con } r \in \mathbb{N} - \{0\}$$

dove l'intero naturale r è l'**ordine** del sistema.
Presi ad arbitrio r scalari $\lambda_i \in K$ $(i = 1, 2, ..., r)$, il vettore:

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + ... + \lambda_r \mathbf{v}_r,$$

si chiama **combinazione lineare** dei vettori di Σ. Equivalentemente si dice che $\mathbf{v}$ dipende linearmente dai vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r$ (o dal sistema Σ).
Ciò premesso, abbiamo la seguente:

Definizione. Σ è ***linearmente indipendente*** se:

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + ... + \lambda_r \mathbf{v}_r = \mathbf{0} \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_r = 0 \tag{3.5}$$

Nel caso contrario diremo che Σ è ***linearmente dipendente.*** Cioè:

$$\exists (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r) \neq (0, 0, ..., 0) \mid \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + ... + \lambda_r \mathbf{v}_r = \mathbf{0} \tag{3.6}$$

Esempio 30. Assegnato lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ (cfr esempio 24 per $n = 3$), mostrare che il sistema di vettori $\Sigma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ con

$$\mathbf{v}_1 = (2, 1, 2), \ \mathbf{v}_2 = \left(7, -\frac{3}{2}, 3\right), \ \mathbf{v}_3 = (-3, 1, -1) \ , \tag{3.7}$$

è linearmente dipendente.

Soluzione 31. Consideriamo l'equazione vettoriale:

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}, \tag{3.8}$$

equivalente a:

$$\lambda_1 (2, 1, 2) + \lambda_2 \left(7, -\frac{3}{2}, 3\right) + \lambda_3 (-3, 1, -1) = (0, 0, 0),$$

le cui componenti formano il sistema lineare omogeneo:

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 + 7\lambda_2 - 3\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 - \frac{3}{2}\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 &= 0 \end{aligned} \tag{3.9}$$

La matrice dei coefficienti del sistema (3.9) è:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -3 \\ 1 & -3/2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

La caratteristica del sistema 3.9 è $p = r(A) = 2$, per cui tale sistema ammette ∞^1 soluzioni proprie. In altri termini $\exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0, 0, 0) : \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$, per cui $\Sigma = \{\mathbf{v}_i\}$ è linearmente dipendente.

Esempio 32. Assegnato lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, mostrare che il sistema di vettori $\Sigma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ con

$$\mathbf{v}_1 = (2, 1, 2), \ \mathbf{v}_2 = \left(7, -\frac{1}{2}, 3\right), \ \mathbf{v}_3 = (-3, 1, -1) \ , \tag{3.10}$$

è linearmente indipendente. Esprimere altresì il vettore $\mathbf{v}_4 = (1, 1, -1)$ come combinazione lineare di Σ.

Soluzione 33. Procedendo come nell'esercizio precedente, abbiamo il sistema lineare omogeneo:

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 + 7\lambda_2 - 3\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 - \frac{1}{2}\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 &= 0, \end{aligned} \tag{3.11}$$

la cui matrice dei coefficienti è:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -3 \\ 1 & -1/2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Qui è $\det A = 4$, perciò $p = 3 = n$ (numero di incognite). Pertanto il sistema 3.11 ammette solo la soluzione impropria $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0)$; da ciò segue che Σ è linearmente indipendente. Per la seconda domanda, poniamo:

$$\mathbf{v}_4 = \mu_1 \mathbf{v}_1 + \mu_2 \mathbf{v}_2 + \mu_3 \mathbf{v}_3$$

Tale equazione vettoriale può essere scritta come:

$$\mu_1 (2,1,2) + \mu_2 \left(7, -\frac{1}{2}, 3\right) + \mu_3 (-3,1,-1) = (1,1,-1),$$

le cui componenti formano il sistema lineare non omogeneo:

$$\begin{aligned} 2\mu_1 + 7\mu_2 - 3\mu_3 &= 1 \\ \mu_1 - \frac{1}{2}\mu_2 + \mu_3 &= 1 \\ 2\mu_1 + 3\mu_2 - \mu_3 &= -1, \end{aligned} \tag{3.12}$$

Il sistema 3.12 è manifestamente di Cramer, ammettendo l'unica soluzione:

$$(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = \left(-\frac{5}{2}, 3, 5\right),$$

donde:

$$\mathbf{v}_4 = -\frac{5}{2}\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 + 5\mathbf{v}_3$$

Proposizione. $(\mathbf{0} \in \Sigma) \Longrightarrow (\Sigma$ è linearmente dipendente$)$

Dimostrazione. $\exists h \in \{1, 2, ..., r\} \mid \mathbf{v}_h = \mathbf{0}$. Quindi:

$$\forall \lambda_h \in K - \{0\}, \quad 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + ... + 0\mathbf{v}_{h-1} + \lambda_h \mathbf{0} + 0\mathbf{v}_{h+1} + ... + 0\mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

Abbiamo così trovato una *r-pla* di scalari $(0, 0, ...0, \lambda_h, 0, ..., 0)$ non tutti nulli tali che $\sum_{k=1}^{r} \lambda_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$, donde l'asserto. □

Proposizione. $(\exists \mathbf{v}_h, \mathbf{v}_k \in \Sigma \mid \mathbf{v}_h = \mu \mathbf{v}_k,\ \mu \in K - \{0\}) \Longrightarrow (\Sigma$ è linearmente dipendente$)$

Dimostrazione. Senza perdita di generalità, supponiamo che $h < k$. Eseguiamo la combinazione lineare di vettori di Σ :

$$\begin{aligned} 0\mathbf{v}_1 + ... + (-1)\,\mathbf{v}_h + ... + \mu\mathbf{v}_k + ... + 0\mathbf{v}_r \\ = -\mu\mathbf{v}_k + \mu\mathbf{v}_k + \mathbf{0} \\ = (-\mu + \mu)\,\mathbf{v}_k \\ = 0\mathbf{v}_k \\ = \mathbf{0} \end{aligned}$$

In questi passaggi abbiamo applicato la proposizione 3.1 e la proprietà distributiva dell'operazione $\cdot$ rispetto all'addizione di scalari. Abbiamo quindi trovato una *r-pla* di scalari:

$$(\lambda_1, ..., \lambda_h, ..., \lambda_k, ..., \lambda_r) = (0, ..., -1, ..., \mu, ..., 0) \neq (0, ..., 0, ..., 0, ...0) \mid \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0},$$

donde l'asserto. □

Proposizione. $(\Sigma$ è linearmente dipendente$) \Longleftrightarrow (\exists \Sigma' \subseteq \Sigma \mid \Sigma'$ è linearmente dipendente$)$

Dimostrazione. **La condizione è necessaria**.
Hp: $\exists \Sigma' \subseteq \Sigma \mid \Sigma'$ è linearmente dipendente.
Th: Σ è linearmente dipendente Sia:

$$\Sigma' = \left\{ \mathbf{v}_{h_1}, \mathbf{v}_{h_2}, ..., \mathbf{v}_{h_p} \right\},$$

essendo:

$$h_i \in \{1, 2, ..., r\}, \quad i = 1, 2, ..., p \leq r$$

Per ipotesi $\exists \left(\lambda_{h_1}, \lambda_{h_2}, ..., \lambda_{h_p} \right) \neq (0, 0, ..., 0) \mid$

$$\sum_{k=h_1}^{h_p} \lambda_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

Posto $\mathcal{H} = \{h_1, h_2, ..., h_p\}$, si consideri la seguente combinazione lineare:

$$\sum_{k=1}^{r} \lambda_k \mathbf{v}_k = \sum_{k \in \mathcal{H}} \lambda_k \mathbf{v}_k + \sum_{k \notin \mathcal{H}} 0 \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

Abbiamo così trovato una *r-pla* di scalari non tutti nulli tali che $\sum_{k=1}^{r} \lambda_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$, donde la tesi.
La condizione è sufficiente
(Σ è linearmente dipendente) $\Longrightarrow$ ($\exists \Sigma' \subseteq \Sigma \mid \Sigma'$ è linearmente dipendente).
È banale, poiché $\Sigma \supseteq \Sigma$. Quindi, posto $\Sigma' = \Sigma$, segue la tesi. □

Proposizione. $\left(\exists h \in \{1, 2, ..., r\} \mid \mathbf{v}_h = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^{r} \mu_k \mathbf{v}_k \right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{c} \Sigma \text{ è linearmente} \\ \text{dipendente} \end{array} \right)$

Dimostrazione. Dimostriamo l'asserto per $\mathbf{v}_h \neq \mathbf{0}$; nel caso contrario si riduce alla proposizione 3.2. Esplicitando la sommatoria:

$$\mathbf{v}_h - \mu_1 \mathbf{v}_1 - \mu_2 \mathbf{v}_2 - ... - \mu_{h-1} \mathbf{v}_{h-1} - \mu_{h+1} \mathbf{v}_{h+1} - ... - \mu_r \mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

Riordinando i singoli termini:

$$-\mu_1 \mathbf{v}_1 - \mu_2 \mathbf{v}_2 - ... - \mu_{h-1} \mathbf{v}_{h-1} + \mathbf{v}_h - \mu_{h+1} \mathbf{v}_{h+1} - ... - \mu_r \mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

Cioè:

$$\exists \left(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{h-1}, \lambda_h, \lambda_{h+1}, ..., \lambda_r \right) = \left(-\mu_1, -\mu_2, ..., -\mu_{h-1}, 1, \mu_{h+1}, ..., \mu_r \right) \mid \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

La *r-pla* di scalari $(-\mu_1, -\mu_2, ..., -\mu_{h-1}, 1, \mu_{h+1}, ..., \mu_r)$ è non nulla. □

3.3 Sottospazio vettoriale generato da un numero finito di vettori

Sia E uno spazio vettoriale su K. Consideriamo un insieme $H \neq \emptyset$ e tale che $H \subseteq E$. Diremo che H è un **sottospazio vettoriale** di E se:

1. $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in H$, $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \in H$
2. $\forall \mathbf{v} \in H$, $\forall \lambda \in K$, $(\lambda \mathbf{v}) \in H$

I punti 1 e 2 si esprimono dicendo che l'insieme H è **chiuso** rispetto alle operazioni di addizione tra vettori e di moltiplicazione di uno scalare per un vettore.

Proposizione. Il vettore nullo appartiene ad ogni sottospazio vettoriale di E.

Dimostrazione. Sia H un qualunque sottospazio di E. Ciò implica:

$$\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in H, (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \in H$$

Prendiamo $\mathbf{w} = -\mathbf{v}$, per cui $\mathbf{0} \in H$, per ogni H sottospazio di E. □

Corollario 34. L'insieme $H_0 = \{\mathbf{0}\}$ è un sottospazio di ogni spazio vettoriale E.

Dimostrazione. Sia E uno spazio vettoriale su K. Risulta: $\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$; per la proposizione 3.1 è $\lambda \mathbf{0} = \mathbf{0}$, $\forall \lambda \in K$, quindi sono verificate le proprietà 1 e 2, da cui l'asserto. □

Definizione. $\{\mathbf{0}\}$ è denominato **sottospazio improprio** di E.

Esempio 35. Asegnato lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, dire quali tra i suoi seguenti sottoinsiemi è uno sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$:
$H_1 = \{(a, b, 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$; $H_2 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid \ a + b + c = 0\}$, $H_3 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid \ a \geq 0\}$;
$H_4 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid \ a^2 + b^2 + c^2 \leq 1\}$

Soluzione 36. Prendiamo ad arbitrio due elementi di H_1:

$$\mathbf{v} = (a, b, 0)\,, \ \ \mathbf{w} = (c, d, 0)$$

Risulta:

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (a + b, c + d, 0) \Longrightarrow (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \in H_1$$

Preso ad arbitrio $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lambda \mathbf{v} = (\lambda a, \lambda b, 0) \in H_1$$

Si conclude che H_1 è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.
Consideriamo H_2. Per ogni $\mathbf{v} = (a, b, c) \in H_2$, $\mathbf{w} = (d, e, f) \in H_2$, la somma è:

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (a', b', c')\,,$$

essendo:

$$a' = a + d, \ b' = b + e, \ c' = c + f$$

Risulta:

$$a' + b' + c' = (a + b + c) + (d + e + f) = 0$$

Quindi:

$$\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in H_2, \quad (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \in H_2 \tag{3.13}$$

Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e per ogni $\mathbf{v} \in H_2$:

$$\lambda \mathbf{v} = (\lambda a, \lambda b, \lambda c)\,,$$

ed è tale che:

$$\lambda a + \lambda b + \lambda c = \lambda (a + b + c) = 0,$$

per cui:

$$\forall \mathbf{v} \in H_2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ (\lambda \mathbf{v}) \in H_2 \tag{3.14}$$

Le (3.13)-(3.14) implicano che H_2 è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.
L'insieme H_3 è:

$$H_3 = \left\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid \ a \geq 0\right\}$$

Quindi:

$$\forall \lambda \in (-\infty, 0), \forall \mathbf{v} = (a > 0, b, c) \in H_3, \ \lambda \mathbf{v} = (\lambda a, \lambda b, \lambda c) \ \text{ con } \lambda a < 0 \Longrightarrow (\lambda \mathbf{v}) \notin H_3$$

Si conclude che H_3 **non** è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.
L'insieme H_4 è:

$$H_4 = \left\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid \ a^2 + b^2 + c^2 \leq 1\right\}$$

Abbiamo:

$$\forall \mathbf{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \forall \mathbf{w} = (d, e, f) \in \mathbb{R}^3, \ \mathbf{v} + \mathbf{w} = (a', b', c'),$$

essendo:

$$a' = a + d, \ b' = b + e, \ c' = c + f$$

Da ciò segue:

$$\begin{aligned} a'^2 + b'^2 + c'^2 &= (a + d)^2 + (b + e)^2 + (c + f)^2 \\ &= g(a, b, c) + g(d, e, f) + 2(ad + eb + cf) \end{aligned} \tag{3.15}$$

Nella (3.15) è:

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

Deve essere:

$$\forall (a, b, c), (d, e, f,) \in H_4, \ g(a, b, c), g(d, e, f) \leq 1,$$

per cui:

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 \leq 2(1 + ad + eb + cf) \Longrightarrow \left(\exists (a, b, c), (d, e, f,) \in H_4 \mid a'^2 + b'^2 + c'^2 > 1\right) \tag{3.16}$$

La (3.16) implica che H_4 **non** è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

Esempio 37. Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n, n)$ (es. 26). Dire quale tra i seguenti suoi sottoinsiemi sono sottospazi vettoriali:

$$\begin{aligned} H_{\mathbb{R}}(n, n) &= \{A \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n, n) \mid \ A \text{ è simmetrica}\} \\ H'_{\mathbb{R}}(n, n) &= \{A \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n, n) \mid \ AX = XA\}, \text{ con } X \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n, n) \\ J_{\mathbb{R}}(n, n) &= \{A \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n, n) \mid \ \det A = 0 \ \} \\ J'_{\mathbb{R}}(n, n) &= \left\{A \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n, n) \mid \ A^2 = A \ \right\} \end{aligned}$$

Soluzione 38. $\forall A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in H_{\mathbb{R}}(n,n)$, $A+B = (c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}) =$ (A,B simmetriche) $= (c_{ji} = a_{ji} + b_{ji})$, quindi:

$$\forall A, B \in H_{\mathbb{R}}(n,n), \quad (A+B) \in H_{\mathbb{R}}(n,n) \tag{3.17}$$

Inoltre: $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall A = (a_{ij}) \in H_{\mathbb{R}}(n,n)$, $(\lambda A) = (\lambda a_{ij}) = (\lambda a_{ji})$, perciò:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall A \in H_{\mathbb{R}}(n,n), \quad (\lambda A) \in H_{\mathbb{R}}(n,n) \tag{3.18}$$

Le (3.17)-(3.18) implicano che $H_{\mathbb{R}}(n,n)$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n \times n)$.
L'insieme $H'_{\mathbb{R}}(n \times n)$ è l'insieme delle matrici di $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ che commutano con un'assegnata matrice $X \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n \times n)$.
Risulta: $\forall A, B \in H'_{\mathbb{R}}(n,n)$, $(A+B)X = AX + BX = XA + XB = X(A+B)$, donde:

$$\forall A, B \in H'_{\mathbb{R}}(n,n), (A+B)X = X(A+B) \Longrightarrow (A+B) \in H'_{\mathbb{R}}(n,n) \tag{3.19}$$

Inoltre: $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall A \in H'_{\mathbb{R}}(n \times n)$, $(\lambda A)X = \lambda(AX) = \lambda(XA) = (\lambda X)A = X(\lambda A)$, donde:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall A \in H'_{\mathbb{R}}(n,n), \quad (\lambda A)X = X(\lambda A) \Longrightarrow (\lambda A) \in H'_{\mathbb{R}}(n,n) \tag{3.20}$$

Le (3.19)-(3.19) implicano che $H'_{\mathbb{R}}(n,n)$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n \times n)$.
L'insieme $J_{\mathbb{R}}(n,n)$ è l'insieme delle matrici di $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ a determinante nullo. Risulta:

$$(\exists A, B \in J_{\mathbb{R}}(n,n): \ \det(A+B) \neq \det A + \det B = 0) \Longrightarrow (A+B) \notin J_{\mathbb{R}}(n \times n),$$

donde $J_{\mathbb{R}}(n \times n)$ **non** è un sottospazio di $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n \times n)$.
L'insieme $J'_{\mathbb{R}}(n,n)$ è l'insieme delle matici di $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ idempotenti. Risulta:

$$\forall A, B \in J'_{\mathbb{R}}(n,n), \quad (A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$

Evidentemente:

$$\begin{aligned} &\exists A, B \in J'_{\mathbb{R}}(n,n), \quad (A+B)^2 = A^2 + B^2 + AB + BA = A + B + AB + BA \\ &\quad \neq A + B \Longrightarrow (A+B) \notin J'_{\mathbb{R}}(n,n), \end{aligned}$$

donde $J'_{\mathbb{R}}(n,n)$ **non** è un sottospazio di $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n \times n)$.

***

Proposizione. Sia E uno spazio vettoriale su K. Se $H_1, H_2, ..., H_n$ sono sottospazi di E, allora $\cap_{i=1}^{n} H_i$ è un sottospazio vettoriale di E.

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che:

$$(\forall i \in (1,2,...,n), \ H_i \subseteq E) \Longrightarrow \bigcap_{i=1}^{n} H_i \subseteq E$$

$$(\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in H_i \quad (i = 1,2,...,n)) \Longrightarrow \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \bigcap_{i=1}^{n} H_i$$

Inoltre H_i è un sottospazio di E, quindi:

$$(\mathbf{v} + \mathbf{w} \in H_i \quad (i = 1,2,...,n)) \Longrightarrow (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \in \bigcap_{i=1}^{n} H_i$$

$$(\forall \lambda \in K, \quad (\lambda \mathbf{v}) \in H_i \quad (i = 1,2,...n)) \Longrightarrow (\lambda \mathbf{v}) \in \bigcap_{i=1}^{n} H_i,$$

donde l'asserto. □

Teorema 39. Sia $\Sigma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r\}$ un sistema di vettori di E. Sia A l'insieme delle combinazioni lineari dei vettori di Σ:

$$A \overset{def}{=} \left\{ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{v}_i \mid \lambda_i \in K,\ \mathbf{v}_i \in \Sigma, \quad (i = 1, 2, ...r) \right\} \tag{3.21}$$

L'insieme (3.21) è un sottospazio vettoriale di E.

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che risulta $\emptyset \neq A \subseteq E$. Presi ad arbitrio due elementi di A:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{v}_i, \quad \mathbf{w} = \sum_{i=1}^{r} \mu_i \mathbf{v}_i,$$

risulta:

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \sum_{i=1}^{r} (\lambda_i + \mu_i)\, \mathbf{v}_i \Longrightarrow (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \in A$$

$$\forall \lambda \in K,\ \lambda \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{r} \tilde{\lambda}_i \mathbf{v}_i \Longrightarrow (\lambda \mathbf{v}) \in A, \quad \text{essendo } \tilde{\lambda}_i \overset{def}{=} \lambda \lambda_i$$

donde l'asserto. □

Definizione. L'insieme (3.21) si chiama ***sottospazio generato da*** Σ e si indica con $A[\Sigma]$ o con $Span(\Sigma)$. L'insieme Σ si chiama **sistema di generatori** di A. Quest'ultimo si dice che è **finitamente generabile.**

Esercizio 40. Assegnato il sistema $\Sigma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ di $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbf{v}_1 = (1, -2, 0, 3)\,,\ \mathbf{v}_2 = (2, 3, 0, -1)\,,\ \mathbf{v}_3 = (2, -1, 2, 1)$$

provare che $\mathbf{v} \in A[\Sigma]$, essendo $\mathbf{v} = (3, 9, -4, -2)$.

Soluzione 41. Risulta:

$$\mathbf{v} \in A[\Sigma] \Longleftrightarrow \left(\exists\, (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \mid \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \mathbf{v}_i \right) \tag{3.22}$$

La (3.22) si scrive:

$$\lambda_1 (1, -2, 0, 3) + \lambda_2 (2, 3, 0, -1) + \lambda_3 (2, -1, 2, 1) = (0, 0, 0, 0)$$

cioè:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 3 \\ -2\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 &= 9 \\ 0 + 0 + 2\lambda_3 &= -4 \\ 3\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 &= -2 \end{aligned} \tag{3.23}$$

La matrice incompleta di tale sistema è:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

mentre la matrice completa è:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Risulta:

$$\det B = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Cioè $r(M) = r(B)$, da cui la compatibilità del sistema. Per quanto detto, il rango del sistema è $p = 3$, per cui esso è equivalente a:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 3 \\ -2\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 &= 9 \\ 0 + 0 + 2\lambda_3 &= -4, \end{aligned}$$

che ammette l'unica soluzione $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (1, 3, -2)$. Si conclude che $\mathbf{v} \in A[\Sigma]$, poichè $\mathbf{v}$ si esprime come combinazione lineare dei vettori di Σ:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_3$$

***

Sia $\Sigma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r\}$ un sistema di vettori di E. Abbiamo la seguente:

Proposizione. $\left(\begin{array}{c} \Sigma \text{ è linearmente} \\ \text{indipendente} \end{array} \right) \Longleftrightarrow \left(\mathbf{v} \in A[\Sigma] \Longrightarrow \exists! (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r) \mid \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{v}_i \right)$

Dimostrazione. **Implicazione diretta**
Hp Σ è lin. indip.
Per definizione di spazio vettoriale generato da Σ, deve essere:

$$\mathbf{v} \in A[\Sigma] \Longrightarrow \exists (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r) \mid \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{v}_i$$

Se esiste una seconda *r-pla* di scalari $(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_r) \mid \mathbf{v} = \sum_i \mu_i \mathbf{v}_i$, abbiamo il sistema di equazioni:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{v}_i &= \mathbf{v} \\ \sum_{i=1}^{r} \mu_i \mathbf{v}_i &= \mathbf{v} \end{aligned}$$

Sottraendo la seconda dalla prima:

$$(\lambda_1 - \mu_1)\mathbf{v}_1 + (\lambda_2 - \mu_2)\mathbf{v}_2 + ... + (\lambda_r - \mu_r)\mathbf{v}_r = \mathbf{0} \tag{3.24}$$

Ma Σ è linearmente indipendente, per cui la (3.24) implica:

$$\lambda_1 - \mu_1 = \lambda_2 - \mu_2 = ... = \lambda_r - \mu_r = 0,$$

cioè:

$$\lambda_i = \mu_i, \text{ per } i = 1, 2, ..., r,$$

da cui esistenza ed unicità della *r-pla* di scalari $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r)$.
Implicazione inversa. L'ipotesi è

$$\mathbf{v} \in A[\Sigma] \Longrightarrow \exists! (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r) \mid \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{v}_i \tag{3.25}$$

Per la proposizione 3.3 è $\mathbf{0} \in A[\Sigma]$, quindi la (3.25) per $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ si scrive:

$$\exists! (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r) \mid \mathbf{0} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + ... + \lambda_r \mathbf{v}_r \tag{3.26}$$

L'unica *r-pla* $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r)$ che verifica la (3.26) è $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r) = (0, 0, ..., 0)$, da cui Σ è linearmente indipendente. □

La proposizione (3.3) ci dice che se Σ è un sistema di vettori linearmente indipendente, ogni vettore appartenente al sottospazio generato da Σ, si esprime in uno e un sol modo come combinazione lineare dei vettori di Σ.

Lemma 42. Siano $\Sigma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r\}$, $\Sigma' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_p\}$ due sistemi di vettori di E. Se Σ' è linearmente indipendente e ogni suo vettore dipende linearmente dai vettori di Σ, allora è $p \leq r$.

Dimostrazione. Procediamo per assurdo supponendo che sia: $p = r + 1$. Per ipotesi:

$$\mathbf{u}_j = \sum_{i=1}^{r} \lambda_{ji} \mathbf{v}_i, \quad \text{per } j = 1, 2, ..., r, r+1 \tag{3.27}$$

Scriviamo la (3.27) per $j = j_1 \in \{1, 2, ..., r+1\}$:

$$\mathbf{u}_{j_1} = \lambda_{j_1 1} \mathbf{v}_1 + \lambda_{j_1 2} \mathbf{v}_2 + ... + \lambda_{j_1 r} \mathbf{v}_r \tag{3.28}$$

Gli scalari $(\lambda_{j_1 1}, \lambda_{j_1 2}, ..., \lambda_{j_1 r})$ sono non tutti nulli. Nel caso contrario è $\mathbf{u}_{j_1} = \mathbf{0}$ e per la proposizione 3.2 Σ' è linearmente dipendente. Senza perdita di generalità supponiamo che $\lambda_{j_1 1} \neq 0$. Dalla (3.28):

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \frac{1}{\lambda_{j_1 1}} \mathbf{u}_{j_1} - \frac{\lambda_{j_1 2}}{\lambda_{j_1 1}} \mathbf{v}_2 - ... - \frac{\lambda_{j_1 r}}{\lambda_{j_1 1}} \mathbf{v}_r \\ &= \frac{1}{\lambda_{j_1 1}} \mathbf{u}_{j_1} - \lambda'_{j_1 2} \mathbf{v}_2 - ... - \lambda'_{j_1 r} \mathbf{v}_r, \end{aligned} \tag{3.29}$$

essendo:

$$\lambda'_{j_1 i} \stackrel{def}{=} \frac{\lambda_{j_1 i}}{\lambda_{j_1 1}}, \quad i = 2, 3, ..., r$$

In tal modo la (3.27) diventa:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_j &= \lambda_{j1}\mathbf{v}_1 + \sum_{i=2}^{r}\lambda_{ji}\mathbf{v}_i \\
&= \frac{\lambda_{j1}}{\lambda_{j_1 1}}\mathbf{u}_{j_1} - \lambda_{j1}\lambda'_{j_1 2}\mathbf{v}_2 - ... - \lambda_{j1}\lambda'_{j_1 r}\mathbf{v}_r + \sum_{i=2}^{r}\lambda_{ji}\mathbf{v}_i \\
&= \frac{\lambda_{j1}}{\lambda_{j_1 1}}\mathbf{u}_{j_1} + \left(\lambda_{j2} - \lambda_{j1}\lambda'_{j_1 2}\right)\mathbf{v}_2 + ... + \left(\lambda_{jr} - \lambda_{j1}\lambda'_{j_1 r}\right)\mathbf{v}_r
\end{aligned}$$

cioè:

$$\mathbf{u}_j = \tilde{\lambda}_{j1}\mathbf{u}_{j_1} + \sum_{i=2}^{r}\tilde{\lambda}_{ji}\mathbf{v}_i \quad \text{per } j \in \{1, 2, ..., r+1\} - \{j_1\} \tag{3.30}$$

essendo:

$$\tilde{\lambda}_{ji} = \lambda_{ji} - \lambda_{ji}\lambda'_{j_1 i} \text{ per } i = 2, ..., r$$

$$\tilde{\lambda}_{j1} = \frac{\lambda_{j1}}{\lambda_{j_1 1}}$$

Esplicitiamo la sommatoria a secondo membro della (3.30):

$$\mathbf{u}_j = \tilde{\lambda}_{j1}\mathbf{u}_{j_1} + \tilde{\lambda}_{j2}\mathbf{v}_2 + \tilde{\lambda}_{j3}\mathbf{v}_3 + ... + \tilde{\lambda}_{jr}\mathbf{v}_r, \quad \text{per } j \in \{1, 2, ..., r+1\} - \{j_1\} \tag{3.31}$$

Scriviamo la (3.31) per $j = j_2 \in \{1, 2, ..., r+1\} - \{j_1\}$:

$$\mathbf{u}_{j_2} = \tilde{\lambda}_{j_2 1}\mathbf{u}_{j_1} + \tilde{\lambda}_{j_2 2}\mathbf{v}_2 + \tilde{\lambda}_{j_2 3}\mathbf{v}_3 + ... + \tilde{\lambda}_{j_2 r}\mathbf{v}_r \tag{3.32}$$

Gli scalari $\left(\tilde{\lambda}_{j_2 2}, \tilde{\lambda}_{j_2 3}, ..., \tilde{\lambda}_{j_2 r}\right)$ sono non tutti nulli. Nel caso contrario è $\mathbf{u}_{j_2} = \tilde{\lambda}_{j_2 1}\mathbf{u}_{j_1}$ e per la proposizione 3.2 Σ' è linearmente dipendente. Senza perdita di generalità supponiamo che $\lambda_{j_2 2} \neq 0$. Dalla (3.32):

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\tilde{\lambda}_{j_2 2}}\mathbf{u}_{j_2} - \frac{\tilde{\lambda}_{j_2 1}}{\tilde{\lambda}_{j_2 2}}\mathbf{u}_{j_1} - \frac{\tilde{\lambda}_{j_2 3}}{\tilde{\lambda}_{j_2 2}}\mathbf{v}_3 - ... - \frac{\tilde{\lambda}_{j_2 r}}{\tilde{\lambda}_{j_2 2}}\mathbf{v}_r$$

In tal modo la (3.31) diventa:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_j &= \tilde{\lambda}_{j1}\mathbf{u}_{j_1} + \tilde{\lambda}_{j2}\left(\frac{1}{\tilde{\lambda}_{j_2 2}}\mathbf{u}_{j_2} - \frac{\tilde{\lambda}_{j_2 1}}{\tilde{\lambda}_{j_2 2}}\mathbf{u}_{j_1} - \frac{\tilde{\lambda}_{j_2 3}}{\tilde{\lambda}_{j_2 2}}\mathbf{v}_3 - ... - \frac{\tilde{\lambda}_{j_2 r}}{\tilde{\lambda}_{j_2 2}}\mathbf{v}_r\right) + \tilde{\lambda}_{j3}\mathbf{v}_3 + ... + \tilde{\lambda}_{jr}\mathbf{v}_r \\
&= \left(\tilde{\lambda}_{j1} - \frac{\tilde{\lambda}_{j2}\tilde{\lambda}_{j_2 1}}{\tilde{\lambda}_{j_2 2}}\right)\mathbf{u}_{j_1} + \frac{\tilde{\lambda}_{j2}}{\tilde{\lambda}_{j_2 2}}\mathbf{u}_{j_2} + \left(\tilde{\lambda}_{j3} - \tilde{\lambda}_{j2}\frac{\tilde{\lambda}_{j_2 3}}{\tilde{\lambda}_{j_2 2}}\right)\mathbf{v}_3 + ... + \left(\tilde{\lambda}_{jr} - \tilde{\lambda}_{j2}\frac{\tilde{\lambda}_{j_2 r}}{\tilde{\lambda}_{j_2 2}}\right)\mathbf{v}_r
\end{aligned}$$

cioè:

$$\mathbf{u}_j = \tilde{\lambda}'_{j_1}\mathbf{u}_{j_1} + \tilde{\lambda}'_{j_2}\mathbf{u}_{j_2} + \sum_{i=3}^{r}\tilde{\lambda}'_{ji}\mathbf{v}_i, \text{ per } j \in \{1, 2, ..., r+1\} - \{j_1, j_2\} \tag{3.33}$$

essendo:

$$\tilde{\lambda}'_{ji} = \tilde{\lambda}_{ji} - \tilde{\lambda}_{j2}\frac{\tilde{\lambda}_{j_2 i}}{\tilde{\lambda}_{j_2 2}}, \quad i \in \{1, ..., r\} - \{2\}$$

$$\tilde{\lambda}'_{j2} = \frac{\tilde{\lambda}_{j2}}{\tilde{\lambda}_{j_2 2}}$$

Il procedimento può essere iterato r volte, ottenendo:

$$\mathbf{u}_{j_{r+1}} = \mu_{j_1}\mathbf{u}_{j_1} + \mu_{j_2}\mathbf{u}_{j_2} + ... + \mu_{j_r}\mathbf{u}_{j_r}$$

Abbiamo quindi trovato un vettore di Σ' che dipende linearmente dai rimanenti vettori di Σ', quindi per la proposizione 3.2 Σ' è linearmente dipendente. Ma ciò contraddice l'ipotesi secondo cui Σ' è linearmente indipendente, da qui la tesi. □

3.4 Sistemi massimi di vettori linearmente indipendenti di un insieme di vettori

Sia E uno spazio vettoriale sul campo K. Assegnato un insieme di vettori $\mathcal{I} \subseteq E$, un sistema $\Sigma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r\} \subseteq \mathcal{I}$ si dice **sistema massimo di vettori linearmente indipendenti di** $\mathcal{I}$, se:

1. Σ è linearmente indipendente.
2. Ogni sistema Σ' contenuto in $\mathcal{I}$ e contenente propriamente Σ è linearmente dipendente.

Abbiamo la seguente:

Proposizione. Siano $\mathcal{I} \subseteq E$ e $\Sigma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r\} \subseteq \mathcal{I}$ con Σ linearmente indipendente:

$$\left.\begin{array}{c} \forall \Sigma' \subseteq \mathcal{I} \mid \Sigma' \supset \Sigma \\ \Sigma' \text{ è linearmente dipendente} \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{c} \forall \mathbf{v} \in \mathcal{I},\ \mathbf{v} \text{ dipende} \\ \text{linearmente da } \Sigma \end{array}\right. \tag{3.34}$$

Dimostrazione. **Implicazione diretta**
Per ipotesi:

$$\forall \mathbf{v} \in \mathcal{I} - \Sigma,\ \mathcal{I} \supseteq\ \Sigma' = \Sigma \cup \{\mathbf{v}\} \supset \Sigma\ ,\ \ \Sigma' \text{ è linearmente dipendente} \tag{3.35}$$

La (3.35) implica:

$$\exists\, (\lambda, \lambda_1, ..., \lambda_r) \neq (0, 0, ..., 0) \mid \lambda\mathbf{v} + \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + ... + \lambda_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0} \tag{3.36}$$

Se $\lambda = 0$ si ha:

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + ... + \lambda_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0} \underset{\Sigma \text{ è lin. indip.}}{\Longrightarrow} \lambda_1 = \lambda_2 = ...\lambda_r = 0,$$

ma ciò è impossibile, giacché è $\exists\, (\lambda, \lambda_1, ..., \lambda_r) \neq (0, 0, ..., 0)$. Quindi necessariamente $\lambda \neq 0$. Dividendo la (3.36) per λ:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{r} \tilde{\lambda}_i \mathbf{v}_i, \tag{3.37}$$

essendo:

$$\tilde{\lambda}_i = -\frac{\lambda_i}{\lambda},\ \ i = 1, 2, ..., r,$$

da cui la tesi.
Implicazione inversa. Per ipotesi: $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{I}$, $\mathbf{v}$ dipende linearmente da $\Sigma \subseteq \mathcal{I}$. Per la proposizione 3.2 il sistema $\Sigma' = \Sigma \cup \{\mathbf{v}\}$ è linearmente dipendente. In forza dell'arbitrarietà di $\mathbf{v} \in E - \mathcal{I}$, ogni $\Sigma' \subseteq \mathcal{I}$ e tale che $\Sigma' \supset \Sigma$ è linearmente dipendente, cioè la tesi. □

Osservazione. Da tale proposizione segue che assegnati $\mathcal{I} \subseteq E$ e un sistema $\Sigma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r\} \subseteq \mathcal{I}$, dire che Σ è un sistema massimo di vettori linearmente indipendenti di $\mathcal{I}$, equivale a dire che Σ verifica le seguenti proprietà:

1. Σ è linearmente indipendente.
2. Ogni vettore di $\mathcal{I}$ dipende linearmente da Σ.

Da qui in avanti consideriamo un sottoinsieme non vuoto $\mathcal{I}$ di uno spazio vettoriale E comunque assegnato.

Proposizione.

$$\left.\begin{array}{c}\Sigma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r\} \text{ è un sistema massimo} \\ \text{di vettori linearmente indipendenti di } \mathcal{I}\end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{c}\forall p > r,\ \Sigma' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_p\} \subseteq \mathcal{I} \\ \text{è linearmente dipendente}\end{array}\right. \tag{3.38}$$

Dimostrazione. Per la proposizione precedente:

$$(\forall \mathbf{u}_i \in \Sigma',\ \ \mathbf{u}_i \in \mathcal{I}) \Longrightarrow (\mathbf{u}_i \text{ dipende linearmente da } \Sigma) \tag{3.39}$$

Per il lemma 42, se Σ' è linearmente indipendente, la (3.39) implica $p \leq r$. Viceversa, se $p > r$, Σ' è linearmente dipendente. □

Proposizione.

$$\left.\begin{array}{c}\Sigma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r\}\,,\ \Sigma' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_p\} \\ \text{sistemi massimi di vettori linearmente indipendenti di } \mathcal{I}\end{array}\right) \Longrightarrow p = r$$

Dimostrazione. Per la proposizione 3.4 e per il lemma 42:

$$\begin{array}{c}\forall \mathbf{u}_i \in \Sigma',\ \mathbf{u}_i \text{ dipende linearmente da } \Sigma \Longrightarrow p \leq r \\ \forall \mathbf{v}_i \in \Sigma,\ \mathbf{v}_i \text{ dipende linearmente da } \Sigma' \Longrightarrow r \leq p\end{array}$$

cioè:

$$p \leq r,\ r \leq p) \Longleftrightarrow p = r$$

□

Proposizione. Sia $\Sigma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r\}$ un sistema massimo di vettori linearmente indipendenti di $\mathcal{I}$.

$$\left.\begin{array}{c}\Sigma' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_r\} \subseteq \mathcal{I} \\ \text{è linearmente indipendente}\end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{c}\Sigma' \text{ è un sistema massimo} \\ \text{di vettori linearmente indipendenti di } \mathcal{I}\end{array}\right.$$

Dimostrazione. $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{I} - \Sigma'$, $\Sigma' \cup \{\mathbf{v}\} \subseteq \mathcal{I}$ è linearmente dipendente (per la (3.38)), quindi per la proposizione (3.34), $\mathbf{v}$ dipende linearmente da Σ'. In forza dell'arbitrarietà di $\mathbf{v} \in \mathcal{I} - \Sigma'$, segue che Σ' è un sistema massimo di vettori linearmente indipendenti di $\mathcal{I}$. □

Proposizione.

$$\left.\begin{array}{c}\emptyset \text{ è un sistema massimo di vettori} \\ \text{linearmente indipendenti di } \mathcal{I} \neq \emptyset\end{array}\right) \Longleftrightarrow (\mathcal{I} = \{\mathbf{0}\}$$

Dimostrazione. $\mathcal{I} = \{\mathbf{0}\} \Longrightarrow \nexists \Sigma \neq \emptyset \mid \Sigma =$sistema massimo di vettori linearmente indipendenti di $\mathcal{I}$, da cui necessariamente l'unico sistema massimo è l'insieme vuoto. □

Proposizione.

$$\forall \mathbf{v} \in E, \ \exists! \Sigma = \text{ sistema massimo di vettori linearmente indipendenti di } \{\mathbf{v}\}$$

Dimostrazione. $\mathbf{v} \neq \mathbf{0} \Longrightarrow \Sigma = \{\mathbf{v}\}$, mentre per la proposizione precedente:

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} \Longrightarrow \Sigma = \emptyset$$

□

Esempio 43. Sia $\mathcal{I} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in E \mid \mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2$.

$$\mathcal{I} \text{ è lineramente indipendente} \Longrightarrow \Sigma = \mathcal{I}$$

Se invece $\mathcal{I}$ è linearmente dipendente, si verifica uno dei seguenti casi: 1) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ proporzionali; 2) $\exists i \in \{1, 2\} \mid \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$.
Nel caso 1 $\{\mathbf{v}_1\}$, $\{\mathbf{v}_2\}$ sono sistemi massimi di vettori lineramente indipendenti di $\mathcal{I}$. Nel caso 2 l'insieme $\mathcal{I}$ ammette un solo sistema massimo di vettori lineramente indipendenti. Ad esempio, se $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$, $\{\mathbf{v}_2\}$ è l'unico sistema massimo di vettori linearmente indipendenti di $\mathcal{I}$.

3.5 Basi e dimensioni di uno spazio vettoriale

Sia E uno spazio vettoriale sul campo K. Supponiamo che E sia finitamente generabile. In tale ipotesi, l'insieme dei vettori di E ammette dei sistemi massimi di vettori linearmente indipendenti, che prendono il nome di *basi di* E.
Le basi di E hanno tutte lo stesso ordine n che si chiama la ***dimensione*** di E, e si indica con $\dim E$.

Definizione. Uno spazio vettoriale E su K si dice di dimensione **non finita** o con improprietà di linguaggio **infinita**, se in esso esistono sistemi di vettori linearmente indipendenti di ordine comunque elevato.

Tipicamente una base di E è indicata con:

$$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\} \equiv \{\mathbf{e}_i\} \tag{3.40}$$

Per ogni $\mathbf{v} \in E$:

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + ... + \lambda_n \mathbf{e}_n \tag{3.41}$$

Gli scalari $(\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n)$ sono le **componenti** del vettore $\mathbf{v}$ nella base $\{\mathbf{e}_i\}$, e si indicano con $(v_1, v_2, ..., v_n)$, per cui:

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + ... + v_n \mathbf{e}_n \tag{3.42}$$

Una scrittura equivalente è:

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$$

Esempio 44. Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ sul campo reale $\mathbb{R}$. I ***vettori unitari*** di $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, ..., 0)\,,\ \mathbf{e}_2 = (0, 1, ..., 0)\,,...,\ \mathbf{e}_n = (0, 0, ..., 1)\,,$$

costituiscono una base di $\mathbb{R}^n$. Quindi $\dim \mathbb{R}^n = n$.
Infatti preso ad arbitrio un vettore $\mathbf{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= (v_1, 0, ..., 0) + (0, v_2, ..., 0) + ... (0, 0, ..., v_n)\\ &= \sum_{i=1}^{n} v_i \mathbf{e}_i\end{aligned}$$

3.6 Il metodo delle trasformazioni elementari

Questo metodo è utile per la ricerca di un sistema massimo di vettori linearmente indipendenti di un insieme finito di vettori. Per fissare le idee, consideriamo un sistema finito $\Sigma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ...\mathbf{v}_r\}$ di uno spazio vettoriale E comunque assegnato.

Definizione. Si dice **trasformazione elementare** di Σ operante sul vettore $\mathbf{v}_j$ tramite il vettore $\mathbf{v}_i$ e lo scalare λ, e si indica con $[j, i, \lambda]$, l'operazione che al sistema Σ sostituisce il sistema Σ' ottenuto da Σ sostituendo al vettore $\mathbf{v}_j$ il vettore $\mathbf{v}_j + \lambda \mathbf{v}_i$. Quindi:

$$\Sigma = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_j, ..., \mathbf{v}_r\} \longrightarrow \Sigma' = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_j + \lambda \mathbf{v}_i, ..., \mathbf{v}_r\}$$

Esempio 45. Consideriamo il sistema di vettori di $\mathbb{R}^3$

$$\Sigma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}\,,$$

essendo

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 &= \left(2, 0, -\sqrt{2}\right)\\ \mathbf{v}_2 &= (1, -1, \pi)\\ \mathbf{v}_3 &= \left(\sqrt{3}, 0, 0\right)\\ \mathbf{v}_4 &= (1, 0, e)\end{aligned}$$

Il risultato della trasformazione elementare $[3, 1, 4]$ è il sistema di vettori $\Sigma' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 + 4\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4\}$, cioè il sistema i cui vettori sono:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 &= \left(2, 0, -\sqrt{2}\right)\\ \mathbf{v}_2 &= (1, -1, \pi)\\ \mathbf{v}_3 + 4\mathbf{v}_1 &= \left(\sqrt{3} + 8, 0, -\sqrt{2}\right)\\ \mathbf{v}_4 &= (1, 0, e)\end{aligned}$$

Proposizione. Se Σ' è il sistema di vettori ottenuto da $\Sigma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r\}$ mediante una qualunque trasformazione elementare, risulta:

$$\left.\begin{array}{c}\Sigma \text{ è linearmente}\\ \text{indipendente}\end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{c}\Sigma' \text{ è linearmente}\\ \text{indipendente}\end{array}\right.$$

Dimostrazione. Senza perdita di generalità, supponiamo che Σ' sia il risultato della trasformazione lineare $[1, 2, \lambda]$, cosicchè $\Sigma' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r\}$, essendo:

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 + \lambda \mathbf{v}_2$$

Ciò premesso, dimostriamo l'**implicazione diretta.** Consideriamo la relazione vettoriale:

$$\lambda_1 \mathbf{w}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + ... + \lambda_r \mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

Cioè:

$$\begin{aligned} \lambda_1 (\mathbf{v}_1 + \lambda \mathbf{v}_2) + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + ... + \lambda_r \mathbf{v}_r &= \mathbf{0} \\ \lambda_1 \mathbf{v}_1 + (\lambda_2 + \lambda\lambda_1) \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3 ... + \lambda_r \mathbf{v}_r &= \mathbf{0} \\ \underset{S \text{ è lin. indip.}}{\Longrightarrow} \lambda_1 = \lambda_2 + \lambda\lambda_1 = \lambda_3 = ... = \lambda_r &= 0 \\ \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_r &= 0, \end{aligned}$$

quindi Σ' è linearmente indipendente.
Implicazione inversa. Consideriamo la relazione vettoriale:

$$\begin{aligned} &\lambda_1 \mathbf{w}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + ... + \lambda_r \mathbf{v}_r \\ &= \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + ... + \lambda_r \mathbf{v}_r + (\lambda_1 \lambda) \mathbf{v}_2 \end{aligned}$$

Abbiamo:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_1 \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \Longrightarrow \lambda_1 \mathbf{w}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + ... + \lambda_r \mathbf{v}_r = \mathbf{0} + (\lambda_1 \lambda) \mathbf{v}_2$$

cioè:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \mathbf{w}_1 + (\lambda_2 - \lambda_1 \lambda) \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3 + ... + \lambda_r \mathbf{v}_r &= \mathbf{0} \\ \underset{S' \text{ è lin. indip.}}{\Longrightarrow} \lambda_1 = \lambda_2 - \lambda_1 \lambda = \lambda_3 = ... = \lambda_r &= 0 \\ \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_r &= 0, \end{aligned}$$

quindi Σ è linearmente indipendente. □

Definizione. Il sistema $\Sigma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r\}$ è **ridotto rispetto al vettore $\mathbf{v}_i$ ed alla componente j-esima**, se la componente j-esima di $\mathbf{v}_i$ è diversa da zero e ogni altro vettore di Σ ha la componente j-esima nulla.
Quindi, se $n = \dim E$:

$$\begin{aligned} &\mathbf{v}_i = (v_{i1}, ..., v_{ij} \neq 0, ..., v_{in}) \\ &\forall k \neq i,\ \mathbf{v}_k = (v_{k1}, ..., v_{kj} = 0, ..., v_{kn}) \end{aligned}$$

Esempio 46. Assegnato lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, consideriamo il sistema di vettori $\Sigma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= (-3, 0, 2, 5) \\ \mathbf{v}_2 &= (0, 0, 1, 4) \\ \mathbf{v}_3 &= (0, 2, 0, 0) \end{aligned}$$

Σ è ridotto rispetto al vettore $\mathbf{v}_1$ e alla prima componente. Inoltre è ridotto rispetto a $\mathbf{v}_3$ e alla seconda componente.

Proposizione. Un sistema ridotto rispetto a tutti i suoi vettori non nulli è linearmente indipendente.

Dimostrazione. Senza perdita di generalità $\Sigma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ...\mathbf{v}_r\}$ è ridotto rispetto a v_i e alla *i-esima* componente, per $i = 1, 2, ..., r$. Quindi:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= (v_{11}, 0, ..., 0, v_{1,r+1}, ..., v_{1n}) \\
\mathbf{v}_2 &= (0, v_{21}, ..., 0, v_{2,r+1}, ..., v_{2n}) \\
&... \\
\mathbf{v}_r &= (0, 0, ..., v_{rr}, v_{n,r+1}, ..., v_{nn})
\end{aligned}$$

Consideriamo la relazione vettoriale:

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + ... + \lambda_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0},$$

equivalente a:

$$\begin{aligned}
&(\lambda_1 v_{11}, 0, ...0, \lambda_1 v_{1,r+1}, ..., \lambda_1 v_{1n}) + \\
&+ (0, \lambda_2 v_{21}, ..., 0, \lambda_2 v_{2,r+1}, ..., \lambda_2 v_{2n}) + \\
&+ ... + (0, 0, ..., \lambda_r v_{rr}, \lambda_r v_{r,r+1}, ..., \lambda_r v_{rn}) = \mathbf{0} \\
&\Longleftrightarrow (\lambda_1 v_{11}, \lambda_2 v_{22}, ..., \lambda_r v_{rr}, \lambda_1 v_{1,r+1} + \lambda_2 v_{2,r+1} + ... + \lambda_r v_{r,r+1}, ..., \lambda_1 v_{1n} + \lambda_2 v_{2n} + ... + \lambda_r v_{rn}) \\
&= (0, 0, ..., 0, 0, ..., 0)
\end{aligned}$$

cioè il sistema:

$$\begin{cases}
\lambda_1 v_{11} = 0 \\
\lambda_2 v_{22} = 0 \\
... \\
\lambda_r v_{rr} = 0 \\
\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_{i,r+1} = 0 \quad \underset{v_{ii}\neq 0}{\Longleftrightarrow} \lambda_i = 0, \quad i = 1, 2, ..., r \\
... \\
\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_{i,n} = 0
\end{cases}$$

donde Σ è linearmente indipendente. □

La proposizione precedente è utilissima per la ricerca di un sistema massimo di vettori linearamente indipendenti di un insieme assegnato di vettori. Supponiamo di voler ricercare un sistema massimo di vettori linearamente indipendenti di $\Sigma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r\}$. Applicando ripetutamente opportune trasformazioni elementari, otteniamo il sistema $\Sigma' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_r\}$ da cui scartando eventuali vettori nulli, otteniamo il sistema Σ'_0 ridotto rispetto a tutti i suoi vettori. Senza perdita di generalità: $\Sigma'_0 = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_p\}$, con $p \leq r$ e tale che $\mathbf{w}_i = \mathbf{0}$ con $i = p + 1, ..., r$.
Per la proposizione precedente, il sistema Σ'_0 è linearmente indipendente, mentre $\Sigma'_0 \cup \{\mathbf{w}_i\}$ è lineramente dipendente ($i = p + 1, ..., r$), per cui Σ'_0 è un sistema massimo di vettori lineramente indipendenti di Σ'.
Inoltre:

$$\Sigma'_0 \text{ linearmente indipendente }) \Longrightarrow (\Sigma_0 \text{ è linearmente indipendente },$$

essendo Σ_0 il sistema corrispondente a S'_0.

$$\left.\begin{array}{c}\forall i \in \{p+1, ..., r\}\,,\ \Sigma'_0 \cup \{\mathbf{w}_i\} \\ \text{è linearmente dipendente}\end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{c}\forall i \in \{p+1, ..., r\}\,,\ \Sigma_0 \cup \{\mathbf{v}_i\} \\ \text{è linearmente dipendente}\end{array}\right.$$

Si conclude che Σ_0 è un sistema massimo di vettori lineramente indipendenti di Σ.

Esempio 47. Determiniamo un sistema massimo di vettori lineramente indipendenti del seguente insieme di vettori dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$:

$$\Sigma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}\,,$$

essendo:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 &= (0, 1, 2)\\ \mathbf{v}_2 &= (0, 1, 0)\\ \mathbf{v}_3 &= (1, -1, 0)\\ \mathbf{v}_4 &= (0, 0, 1)\end{aligned}$$

Eseguendo le opportune trasformazioni elementari, otteniamo il sistema

$$\Sigma' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}\,,$$

essendo:

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_1 &= (0, 0, 0)\\ \mathbf{w}_2 &= (0, 1, 0)\\ \mathbf{w}_3 &= (1, 0, 0)\\ \mathbf{w}_4 &= (0, 0, 1)\end{aligned}$$

Quindi:

$$\Sigma'_0 = \{\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$$

Si conclude che un sistema massimo di vettori lineramente indipendenti di Σ è $\Sigma_0 = \{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$

3.7 Cambiamento di base

Abbiamo visto che assegnata una base (3.40) dello spazio vettoriale E, un vettore $\mathbf{v} \in E$ ha componenti $(v_1, v_2, ..., v_n)$ in tale base. È conveniente utilizzare la **convenzione di Einstein**, secondo cui si somma sugli indici ripetuti (in basso e in alto). Quindi l'espressione (3.42)

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i,$$

avendo ridefinito le componenti di $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{v} = \left(v^1, v^2, ..., v^n\right)$$

Ciò premesso, siano $\{\mathbf{e}_i\}$, $\{\mathbf{e}'_i\}$ due basi distinte del medesimo spazio vettoriale E su K. Evidentemente:

$$\mathbf{e}'_k = \alpha^i_k \mathbf{e}_i \tag{3.43}$$

Qui α_k^i compongono una matrice $P\,(n \times n)$ sul campo K, essendo l'indice in alto l'indice di riga, e quello in basso l'indice di colonna. A loro volta i vettori $\mathbf{e}_i$ si esprimono come combinazione lineare dei vettori di $\{\mathbf{e}'_i\}$:

$$\mathbf{e}_k = \beta_k^i \mathbf{e}'_i \tag{3.44}$$

In maniera analoga, i coefficienti β_k^i della combinazione lineare sono gli elementi di matrice di $P'\,(n \times n)$ sul campo K.
Sostituendo la (3.43) nella (3.44):

$$\mathbf{e}_k = \beta_k^i \alpha_i^j \mathbf{e}_j \tag{3.45}$$

Il vettore $\mathbf{e}_k$ si scrive:

$$\mathbf{e}_k = \delta_k^j \mathbf{e}_j,$$

essendo δ_k^i il *simbolo di Kronecher*:

$$\delta_k^i = \begin{cases} 1, \text{ se } i = k \\ 0, \text{ se } i \neq k \end{cases}$$

La (3.45) diventa:

$$\beta_k^i \alpha_i^j \mathbf{e}_j - \delta_k^j \mathbf{e}_j = \mathbf{0}$$

Cioè:

$$\left(\beta_k^i \alpha_i^j - \delta_k^j\right) \mathbf{e}_j = \mathbf{0} \tag{3.46}$$

Per definizione di base, il sistema di vettori $\{\mathbf{e}_i\}$ è linearmente indipendente, donde la (3.46) è verificata se e solo se:

$$\beta_k^i \alpha_i^j = \delta_k^j \quad \text{per } k, j = 1, 2, ..., n$$

che è manifestamente equivalente alla relazione seguente:

$$P'P = \overline{1},$$

essendo $\overline{1}$ la matrice identità di ordine n.
Allo stesso modo si dimostra che $PP' = \overline{1}$. Si conclude che:

$$P' = P^{-1}$$

Si consideri ora un vettore $\mathbf{v} \in E$ che ha componenti $(v^1, v^2, ..., v^n)$ in $\{\mathbf{e}_i\}$:

$$\mathbf{v} = v^k \mathbf{e}_k \tag{3.47}$$

Il medesimo vettore ha componenti $(v'^1, v'^2, ..., v'^n)$ in $\{\mathbf{e}'_i\}$:

$$\mathbf{v} = v'^i \mathbf{e}'_i \tag{3.48}$$

Confrontando le (3.47)-(3.48):

$$v'^i \mathbf{e}'_i = v^k \mathbf{e}_k$$

e tenendo conto della (3.44):

$$v'^i \mathbf{e}'_i = v^k \beta^j_k \mathbf{e}'_j$$

Eseguendo negli indici muti la sostituzione $(k, j) \to (j, i)$:

$$v'^i \mathbf{e}'_i = v^j \beta^i_j \mathbf{e}'_i$$

cioè:

$$\left(v'^i - v^j \beta^i_j\right) \mathbf{e}'_i = \mathbf{0}$$

Il sistema di vettori $\{\mathbf{e}'_i\}$ è linearmente indipendente, per cui:

$$v'^i - v^j \beta^i_j = 0 \Longleftrightarrow v'^i = \beta^i_j v^j, \quad i = 1, 2, ..., n \tag{3.49}$$

Indichiamo con V la matrice $(n \times 1)$ i cui elementi sono le componenti di $\mathbf{v}$ in $\{\mathbf{e}_i\}$:

$$V \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ ... \\ v^n \end{pmatrix}, \tag{3.50}$$

Quindi:

$$V' = \begin{pmatrix} v'^1 \\ v'^2 \\ ... \\ v'^2 \end{pmatrix} \tag{3.51}$$

Con le posizioni (3.50)-(3.51), la (3.49) si scrive:

$$V' = P^{-1} V, \tag{3.52}$$

che può essere invertita:

$$V = P V' \tag{3.53}$$

Le (3.52)-(3.53) sono le formule del cambiamento di base $\{\mathbf{e}_i\} \to \{\mathbf{e}'_i\}$, mentre la matrice P è la **matrice di passaggio** dalla base $\{\mathbf{e}_i\}$ alla base $\{\mathbf{e}'_i\}$.

Esempio 48. Assegnato il vettore $\mathbf{v} = (1, 2)$ nella base $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$, si determinino le componenti di $\mathbf{v}$ rispetto alla base $\mathbf{e}'_1 = (1, 1)$, $\mathbf{e}'_2 = (1, -1)$.

Soluzione 49. La matrice R è:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \det R = -1 - 1 = -2$$

la cui aggiunta è:

$$aggR = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi l'inversa [eq. (1.51)]:

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

Per la (3.52):

$$V' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

quindi:

$$v_1' = \frac{3}{2}, v_2' = -\frac{1}{2}$$

Esempio 50. Assegnato il vettore $\mathbf{v} = (3, 2, 2)$ nella base $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, si determinino le componenti di $\mathbf{v}$ rispetto alla base $\mathbf{e}_1' = (1, 0, 1)$, $\mathbf{e}_2' = (2, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3' = (0, 1, 1)$.

Soluzione 51. La matrice R è:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'inversa è:

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Quindi il vettore colonna nella nuova base:

$$V' = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si conclude che le componenti di $\mathbf{v}$ nella nuova base sono:

$$v_1' = 1,\ v_2' = 1,\ \ v_3' = 1$$

3.8 Dimensione di un sottospazio vettoriale

Sia $\Sigma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r\}$ un sistema di vettori di uno spazio vettoriale E comunque assegnato sul campo K. Se Σ è linearmente indipendente, risulta $\dim A[\Sigma] = r$, essendo $A[\Sigma]$ il sottospazio vettoriale di E generato da Σ. Infatti:

1. Σ è linearmente indipendente
2. $\forall \mathbf{v} \in A[\Sigma]$, $\mathbf{v}$ dipende linearmente da Σ,

quindi Σ è una base di $A[\Sigma]$ e ciò implica $\dim A[\Sigma] = r$.

Osservazione. $A[\Sigma]$ è il più piccolo sottospazio contentente Σ e si indica anche con la notazione $[\Sigma]$. Una denominazione alternativa è **inviluppo lineare** di Σ, e si indica con $\mathcal{L}(\Sigma)$.

Proposizione (Teorema del completamento della base) 52. Sia E uno spazio vettoriale *n-dimensionale*. Se $\Sigma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r\}$ è un sistema di vettori linearmente indipendenti di E, allora $\exists \mathbf{v}_{r+1}, ..., \mathbf{v}_n \in E \mid \Sigma' = \Sigma \cup \{\mathbf{v}_{r+1}, ..., \mathbf{v}_n\}$ è una base di E.

Dimostrazione.

$$r < n \Longrightarrow \exists \mathbf{v}_{r+1} \in E - \{\mathbf{0}\} \mid \mathbf{v}_{r+1} \notin [\Sigma]\,,$$

giacché Σ non è una base di E. Assegnato il sistema $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r, \mathbf{v}_{r+1}\}$, consideriamo la relazione vettoriale:

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + ... + \lambda_r \mathbf{v}_r + \lambda_{r+1} \mathbf{v}_{r+1} = \mathbf{0} \tag{3.54}$$

Se $\lambda_{r+1} \neq 0$:

$$\mathbf{v}_{r+1} = \sum_{i=1}^{r} \tilde{\lambda}_i \mathbf{v}_i, \quad \text{con } \tilde{\lambda}_i = -\frac{\lambda_i}{\lambda_{r+1}}$$

Ma ciò è impossibile, giacché $\mathbf{v}_{r+1} \notin [\Sigma]$. Quindi deve essere $\lambda_{r+1} = 0$. Perciò la (3.54) diventa:

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + ... + \lambda_r \mathbf{v}_r = \mathbf{0} \underset{\Sigma \text{ è lin. indip.}}{\Longrightarrow} \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_r = 0$$

Ciò implica che $\Sigma \cup \{\mathbf{v}_{r+1}\}$ è linearmente indipendente, poichè la (3.54) implica $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_r = \lambda_{r+1} = 0$. Se risulta $r + 1 < n$, allora $\exists \mathbf{v}_{r+2} \in E - \{\mathbf{0}\} \mid \mathbf{v}_{r+2} \notin [\Sigma]$, giacché Σ non è una base di E. Possiamo allora ripetere il ragionamento precedente sul sistema $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r, \mathbf{v}_{r+1}, \mathbf{v}_{r+2}\}$, giungendo alla conclusione che $\Sigma \cup \{\mathbf{v}_{r+1}, \mathbf{v}_{r+2}\}$ è linearmente indipendente. Iterando il procedimento per un numero finito di volte, giungiamo ad un sistema $\Sigma' = \Sigma \cup \{\mathbf{v}_{r+1}, ..., \mathbf{v}_n\}$ linearmente indipendente e tale che ogni vettore di E dipende linearmente da Σ', da cui l'asserto. □

Da ciò segue immediatamente:

Corollario 53. Sia E uno spazio vettoriale di dimensione finita, e sia V un suo sottospazio. Allora V ha dimensione finita, $\dim V \leq \dim E$, risultando

$$\dim V = \dim E \Longleftrightarrow V = E$$

Inoltre

$$\Sigma' \text{ è una base di } V \Longrightarrow \exists \Sigma \text{ base di } E \mid \Sigma' \subseteq \Sigma$$

3.9 Somma di due spazi vettoriali

Dati due sottospazi V e W di uno spazio vettoriale vettoriale E, si definisce il sottospazio somma:

$$V + W = \{\mathbf{v} + \mathbf{w} \mid \mathbf{v} \in V,\, \mathbf{w} \in W\}\,, \tag{3.55}$$

e il sottospazio intersezione $V \cap W$.
Proviamo che (3.55) è un sottospazio vettoriale di E:

$$\begin{aligned} &\forall\, (\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_1)\,, (\mathbf{v}_2 + \mathbf{w}_2) \in V + W, \\ &(\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_1) + (\mathbf{v}_2 + \mathbf{w}_2) = \underbrace{(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)}_{\in V} + \underbrace{(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2)}_{\in W} \\ &\qquad\qquad \Longrightarrow [(\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_1) + (\mathbf{v}_2 + \mathbf{w}_2)] \in V + W \end{aligned} \tag{3.56}$$

$$\forall \lambda \in K,\ \forall (\mathbf{v}+\mathbf{w}) \in V+W, \tag{3.57}$$
$$\lambda(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \underbrace{\lambda\mathbf{v}}_{\in V} + \underbrace{\lambda\mathbf{v}}_{\in W} \Longrightarrow \lambda(\mathbf{v}+\mathbf{w}) \in V+W$$

Le (3.56)-(3.57) implicano che $V+W$ è un sottospazio vettoriale di E.

Teorema 54. Le dimensione di $V, W, V+W, V\cap W$, sono legate dalla **formula di Grassmann**:

$$\dim V + \dim W = \dim(V+W) + \dim(V\cap W) \tag{3.58}$$

Dimostrazione. Poniamo:

$$\dim(V\cap W) = m$$

Sia $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_m\}$ una base di $V\cap W$. Per il teorema di completamento della base:

$$V\cap W \subseteq V \Longrightarrow \exists\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_m, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_{m'}\} \text{ base di } V$$
$$V\cap W \subseteq W \Longrightarrow \exists\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_m, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_{m''}\} \text{ base di } W,$$

essendo $m+m' = \dim V$, $m+m'' = \dim W$.
Posto $\Sigma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_m, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_{m'}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_{m''}\}$, è manifestamente $V+W = \mathcal{L}(\Sigma)$.
Dimostriamo che Σ è una base di $V+W$. A tale scopo consideriamo la relazione vettoriale:

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^{m'}\mu_i\mathbf{u}_i + \sum_{i=1}^{m''}\nu_i\mathbf{w}_i = \mathbf{0} \tag{3.59}$$

Da cui:

$$\sum_{i=1}^{m'}\mu_i\mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^{m}(-\lambda_i)\,\mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^{m''}(-\nu_i)\,\mathbf{w}_i$$

È chiaro che $\sum_{i=1}^{m'}\mu_i\mathbf{u}_i \in V\cap W$, per cui $\exists\beta_i \in K \mid \sum_{i=1}^{m'}\mu_i\mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^{m}\beta_i\mathbf{v}_i$ Quindi:

$$\sum_{i=1}^{m}\beta_i\mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^{m'}(-\mu_i)\,\mathbf{u}_i = \mathbf{0}$$

Ma $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_m, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_{m'}\}$ è linearmente indipendente, quindi:

$$\sum_{i=1}^{m}\beta_i\mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^{m'}(-\mu_i)\,\mathbf{u}_i = \mathbf{0} \Longrightarrow \beta_1 = ... = \beta_m = -\mu_1 = ... = -\mu_{m'} = 0$$
$$\Longrightarrow \mu_1 = ... = \mu_{m'} = 0$$

La (3.59) diventa:

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^{m''}\nu_i\mathbf{w}_i = \mathbf{0}$$

Ma $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_m, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_{m'}\}$ è linearmente indipendente, quindi:

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^{m''}\nu_i\mathbf{w}_i = \mathbf{0} \Longrightarrow \lambda_1 = ... = \lambda_m = \nu_1 = ... = \nu_{m''} = 0$$

Ne concludiamo che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_m, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_{m'}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_{m''}\}$ è linearmente indipendente. Abbiamo così dimostrato che Σ è una base di $V + W$. Siamo ora in grado calcolare la dimensione di $V + W$:

$$\dim(V + W) = m + m' + m'' = \underbrace{(m + m')}_{=\dim V} + \underbrace{(m + m'')}_{=\dim W} - \underbrace{m}_{=\dim(V \cap W)},$$

donde l'asserto. □

Se $V \cap W = \{\mathbf{0}\}$, allora il sottospazio $V + W$ si indica con $V \oplus W$, e si chiama **somma diretta** di V e W. In tal caso la formula di Grassman diventa:

$$\dim V + \dim W = \dim(V \oplus W)$$

Teorema 55.

$$\mathbf{u} \in E \Longrightarrow \exists! \mathbf{v} \in V, \exists! \mathbf{w} \in W \mid \mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}) \Longleftrightarrow E = V \oplus W$$

Dimostrazione. **Implicazione inversa**
$\mathbf{u} \in V \oplus W \Longrightarrow \exists \mathbf{v} \in V, \exists \mathbf{w} \in W \mid \mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$ Supponiamo che

$$\exists \mathbf{v}' \in V, \ \exists \mathbf{w}' \in W \mid \mathbf{u} = \mathbf{v}' + \mathbf{w}'$$

da cui:

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{v}' + \mathbf{w}' \Longrightarrow \mathbf{v} - \mathbf{v}' = \mathbf{w} - \mathbf{w}'$$

Cioè:

$$\begin{aligned} &(\mathbf{v} - \mathbf{v}') \in V, \quad (\mathbf{w} - \mathbf{w}') \in W, \ V \cap W = \{\mathbf{0}\} \\ &\Longrightarrow \mathbf{v} - \mathbf{v}' = \mathbf{w} - \mathbf{w}' = \mathbf{0} \Longrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{v}', \ \mathbf{w} = \mathbf{w}' \end{aligned}$$

Dimostriamo l'implicazione diretta. Per ipotesi:

$$\mathbf{u} \in E \Longrightarrow \exists! \mathbf{v} \in V, \exists! \mathbf{w} \in W \mid \mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$$

Abbiamo:

$$\mathbf{u} \in V \cap W, \quad \begin{array}{c} \mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{0}, \ \mathbf{u} \in V, \ \mathbf{0} \in W \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} + \mathbf{u}, \ \mathbf{0} \in V, \ \mathbf{u} \in W \end{array}$$

Per l'unicità della decomposizione di $\mathbf{u}$ deve essere: $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Quindi:

$$\forall \mathbf{u} \in V \cap W, \ u = \mathbf{0} \Longrightarrow V \cap W = \{\mathbf{0}\}$$

Ne concludiamo che $E = V \oplus W$. □

Osservazione. La relazione $E = V \oplus W$ si interpreta dicendo che lo spazio vettoriale E si decompone nella somma diretta di V e W. Se invece $E = V + W$ e $V + W$ non è una somma diretta, ogni vettore di E si decompone in $\infty^{\dim(V \cap W)}$ modi diversi, nella somma di un vettore di V e di un vettore di W.

Teorema 56. Assegnato un sottospazio vettoriale V di E, esiste almeno un sottospazio vettoriale W tale che $E = V \oplus W$.
W si chiama **spazio supplementare** di V in E.

Dimostrazione. Omessa □

Osservazione. Uno spazio supplementare non è univocamente determinato.

Nel caso di uno spazio vettoriale E finito-dimensionale, la determinazione di una base di uno spazio supplementare di V è facilitata dal teorema di completamento della base, per cui assegnata comunque una base $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ di E, se $\dim V = n_1$, è possibile scegliere $n - n_1$ vettori tra $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$ tali che essi siano una base di un supplementare di V in E.

3.10 Esercizi

1. Assegnati i seguenti vettori di $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{v}_1 = (2,4)\,,\ \mathbf{v}_2 = (1,2)\,,\ \mathbf{v}_3 = (-1,1)\,,\ \mathbf{v}_4 = (3,6)\,,\ \mathbf{v}_5 = (4,5)\,,\ \mathbf{v}_6 = (3,9)\,,$$

provare che: 1) $\mathbf{v}_2$,$\mathbf{v}_4$ sono proporzionali a $\mathbf{v}_1$; 2) $\mathbf{v}_5$ dipende linearmente da $\Sigma_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$; 3) $\mathbf{v}_4$ dipende linearmente da $\Sigma_2 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$; 4) $\mathbf{v}_6$ dipende linearmente da $\Sigma_3 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_5\}$; 5) $\mathbf{v}_3$ non dipende linearmente da Σ_2.

2. Assegnati i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v}_1 = (1,2,1)\,,\ \mathbf{v}_2 = (1,1,0)\,,\ \mathbf{v}_3 = (0,1,1)\,,\ \mathbf{v}_4 = (1,1,1)\,,\ \mathbf{v}_5 = (2,1,-2)\,,\ \mathbf{v}_6 = (1,5,4)\,,$$

provare che: 1) $\mathbf{v}_4$,$\mathbf{v}_5$ non dipendono linearmente $\Sigma_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$; 2) $\mathbf{v}_3$ e $\mathbf{v}_6$ dipendono linearmente da Σ_1; 3) $\mathbf{v}_5$ dipende linearmente da $\Sigma_2 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4\}$; 4) $\mathbf{v}_6$ dipende linearmente da $\Sigma_3 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

3. Provare che il seguente sistema di vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$\Sigma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}\,,$$

essendo: $\mathbf{v}_1 = (1,1,1)$, $\mathbf{v}_2 = (1,2,3)$, $\mathbf{v}_3 = (2,-1,1)$, è linearmente indipendente. Esprimere quindi il vettore $\mathbf{v} = (1,-2,5)$ come combinazione lineare dei vettori di Σ.

4. Assegnato il sistema i vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$\Sigma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}\,,$$

essendo: $\mathbf{v}_1 = (1,-3,2)$, $\mathbf{v}_2 = (2,-4,-1)$, $\mathbf{v}_3 = (1,-5,7)$, scrivere il vettore $\mathbf{v} = (2,-5,3)$ come combinazione lineare dei vettori di Σ.

5. Provare che il seguente sistema di vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$\Sigma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}\,,$$

essendo: $\mathbf{v}_1 = (3,0,-2)$, $\mathbf{v}_2 = (2,-1,-5)$, è linearmente indipendente. Determinare poi per quali valori del parametro reale k il vettore $\mathbf{v} = (1,-2,k)$ si esprime come combinazione lineare dei vettori di Σ.

6. Sia $\Sigma = \{u(x), v(x), w(x)\}$ un sistema di vettori di $\mathcal{P}_2[x]$ (spazio vettoriale i cui vettori sono i polinomi su $\mathbb{R}$ di grado ≤ 2).

$$u(x) = x^2 - 2x + 5,\ v(x) = 2x^2 - 3x,\ \ w(x) = x + 3$$

Dimostrare che Σ è linearmente indipendente ed esprimere il vettore $p(x) = x^2 + 4x - 3$ come combinazione lineare dei vettori di Σ.

7. Assegnati i vettori di $\mathcal{P}_2[x]$:

$$\begin{array}{lll} a(x) = x^2 - x + 1 & b(x) = x^2 + x - 1 & c(x) = x^2 \\ d(x) = -x + 1 & e(x) = 2x^2 - x + 2 & f(x) = x^2 + x - 2 \end{array},$$

mostare che: 1) $b(x)$ non è proporzionale a $a(x)$; 2) $c(x)$ dipende linearmente da $\Sigma_1 = \{a(x), b(x)\}$; 3) $e(x)$ non dipende linearmente da Σ_1; 4) $e(x)$ dipende linearmente da $\Sigma_2 = \{a(x), b(x), c(x)\}$; 5) $d(x)$ dipende linearmente da Σ_2; 6) $f(x)$ dipende linearmente da $\Sigma_3 = \{a(x), b(x), e(x)\}$.

8. Provare che il sistema $\Sigma = \left\{e_1(x) = 1, e_2(x) = x - 1, e_3(x) = (x-1)^2\right\}$ è una base di $\mathcal{P}_2[x]$, e trovare le componenti di $p(x) = 4x^2 - x + 1$ in Σ.

9. Mostrare che $\dim \mathcal{P}_n[x] = n + 1$.

10. Sia $\mathcal{P}_\infty[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi su $\mathbb{R}$ di grado comunque elevato. Mostrare che tale spazio ha dimensione infinita.

11. Determinare la matrice del cambiamento di base dello spazio vettoriale $\mathcal{P}_2[x]$ quando si passa dalla base

$$e_0(x) = 1, \; e_2(x) = x, \;\; e_3(x) = x^2$$

alla base:

$$e_1'(x) = 1, \;\; e_2'(x) = x - x_0, \; e_3'(x) = (x - x_0)^2,$$

determinando poi le componenti di $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ nella nuova base.

12. Mostrare che $\dim \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(m \times n) = mn$.

13. Assegnato lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, si considerino le basi:

$$\begin{array}{l} \mathbf{e}_1 = (1,0,0), \; \mathbf{e}_2 = (0,1,0), \; \mathbf{e}_3 = (0,0,1) \\ \mathbf{e}_1' = (1,1,1), \; \mathbf{e}_2' = (1,1,0), \; \mathbf{e}_3' = (1,0,0) \end{array}$$

Determinare le componenti dei vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ nella base $\{\mathbf{e}_i'\}$, essendo note le loro componenti nella base $\{\mathbf{e}_i\}$: $\mathbf{v} = (4, -3, 2)$, $\mathbf{w} = (a, b, c)$.

14. Assegnato lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ si consideri l'insieme:

$$H = \left\{\left(x^1, x^2, ..., x^n\right) \in \mathbb{R}^n \mid x^1 = x^2 = ... = x^\alpha = 0\right\} \subset \mathbb{R}^n,$$

essendo $\alpha \in \{1, ...n-1\}$.

Dimostrare che H è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ determinandone la dimensione.

15. Assegnato lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ si consideri l'insieme:

$$H = \left\{(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 : 2v_1 + v_2 - v_3 = 0\right\} \subset \mathbb{R}^3$$

Dimostrare che H è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$, determinandone una base.

3.10.1 Soluzioni

1. Il quesito 1 si risolve banalmente:

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{v}_1, \quad \mathbf{v}_4 = \frac{3}{2}\mathbf{v}_1$$

Quesito 2:

$$\mathbf{v}_5 = \lambda\mathbf{v}_1 + \mu\mathbf{v}_3$$

cioè:

$$\lambda(2,4) + \mu(-1,1) = (4,5) \Longleftrightarrow \begin{cases} 2\lambda - \mu = 4 \\ 4\lambda + \mu = 5 \end{cases},$$

che ammette l'unica soluzione $(\lambda, \mu) = (3/2, -1)$, quindi:

$$\mathbf{v}_5 = \frac{3}{2}\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3$$

Quesito 3:

$$\mathbf{v}_4 = \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2,$$

cioè:

$$\alpha(2,4) + \beta(1,2) = (3,6) \Longleftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = 3 \\ 4\alpha + 2\beta = 6 \end{cases},$$

che ammette ∞^1soluzioni $(\alpha, \beta) = (\alpha, 3 - 2\alpha)$, $\forall\alpha \in \mathbb{R}$, quindi:

$$\mathbf{v}_4 = 3\mathbf{v}_2 - \alpha\mathbf{v}_1, \quad \forall\alpha \in \mathbb{R}$$

Quesito 4:

$$\mathbf{v}_6 = \lambda\mathbf{v}_1 + \mu\mathbf{v}_3 + \nu\mathbf{v}_4,$$

cioè:

$$\lambda(2,4) + \mu(-1,1) + \nu(4,5) = (3,9) \Longleftrightarrow \begin{cases} 2\lambda - \mu + 4\nu = 3 \\ 4\lambda + \mu + 5\nu = 9 \end{cases},$$

che ammette ∞^1soluzioni $(\lambda, \mu, \nu) = \left(2 - \frac{3}{2}\nu, 1 + \nu, \nu\right)$, $\forall\nu \in \mathbb{R}$, quindi:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_6 &= \left(2 - \frac{3}{2}\nu\right)\mathbf{v}_1 + (1+\nu)\mathbf{v}_3 + \nu\mathbf{v}_5 \\ &= 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 + \nu\left(\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_5 - \frac{3}{2}\mathbf{v}_1\right), \quad \forall\nu \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Quesito 5:

$$\mathbf{v}_3 = \gamma\mathbf{v}_1 + \delta\mathbf{v}_2$$

cioè:

$$\gamma(2,4) + \delta(1,2) = (-1,1) \Longleftrightarrow \begin{cases} 2\gamma + \delta = -1 \\ 4\gamma + 2\delta = 1 \end{cases}$$

Tale sistema è incompatibile $\Longrightarrow \nexists(\gamma, \delta) : \mathbf{v}_3 = \gamma\mathbf{v}_1 + \delta\mathbf{v}_2$.

2. Quesito 1:

$$\mathbf{v}_4 = \lambda \mathbf{v}_1 + \mu \mathbf{v}_2$$

cioè:

$$\lambda (1,2,1) + \mu (1,1,0) = (1,1,1) \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ 2\lambda + \mu = 1 \\ \lambda + 0 = 1 \end{cases}$$

Tale sistema lineare è incompatibile, quindi $\nexists (\lambda, \mu) : \mathbf{v}_4 = \lambda \mathbf{v}_1 + \mu \mathbf{v}_2$.

$$\mathbf{v}_5 = \lambda \mathbf{v}_1 + \mu \mathbf{v}_2$$

cioè:

$$\lambda (1,2,1) + \mu (1,1,0) = (2,1,-2) \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 2 \\ 2\lambda + \mu = 1 \\ \lambda + 0 = -2 \end{cases}$$

Tale sistema lineare è incompatibile, quindi $\nexists (\lambda, \mu) : \mathbf{v}_5 = \lambda \mathbf{v}_1 + \mu \mathbf{v}_2$.

Quesito 2:

$$\mathbf{v}_3 = \lambda \mathbf{v}_1 + \mu \mathbf{v}_2$$

cioè:

$$\lambda (1,2,1) + \mu (1,1,0) = (0,1,1) \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ 2\lambda + \mu = 1 \\ \lambda + 0 = 1 \end{cases}$$

La terza equazione di tale sistema è combinazione lineare delle prime due, per cui:

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ 2\lambda + \mu = 1 \end{cases} \Longrightarrow (\lambda, \mu) = (1, -1)$$

Quindi:

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$$

Imponiamo che:

$$\mathbf{v}_6 = \alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2$$

cioè:

$$\alpha (1,2,1) + \beta (1,1,0) = (1,5,4) \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ 2\alpha + \beta = 5 \\ \alpha + 0 = 4 \end{cases}$$

La terza equazione di tale sistema è combinazione lineare delle prime due, per cui:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ 2\alpha + \beta = 5 \end{cases} \Longrightarrow (\alpha, \beta) = (4, -3),$$

quindi:

$$\mathbf{v}_6 = 4\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2$$

Quesito 3:

$$\mathbf{v}_5 = \lambda \mathbf{v}_1 + \mu \mathbf{v}_2 + \nu \mathbf{v}_4,$$

cioè:

$$\lambda(1,2,1)+\mu(1,1,0)+\nu(1,1,1)=(2,1,-2) \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda+\mu+\nu=2 \\ 2\lambda+\mu+\nu=1 \\ \lambda+0+\nu=-2 \end{cases}$$

Tale sistema è compatibile e determinato: $\exists!\,(\lambda,\mu,\nu)=(-1,4-1)$, donde:

$$\mathbf{v}_5=-\mathbf{v}_1+4\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_4$$

Quesito 4:

$$\mathbf{v}_6=\lambda\mathbf{v}_1+\mu\mathbf{v}_2+\nu\mathbf{v}_3,$$

cioè:

$$\lambda(1,2,1)+\mu(1,1,0)+\nu(0,1,1)=(1,5,4) \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda+\mu+0=1 \\ 2\lambda+\mu+\nu=5 \\ \lambda+0+\nu=4 \end{cases}$$

La terza equazione di tale sistema è combinazione lineare delle prime due, per cui:

$$\begin{cases} \lambda+\mu+0=1 \\ 2\lambda+\mu+\nu=5 \end{cases}$$

Tale sistema è compatibile e indeterminato. Precisamente: $p=2$, $n=3 \Longrightarrow \exists\infty^1$soluzioni:

$$(\lambda,\mu,\nu)=(4-\nu,\nu-3,\nu)\,,\ \forall\nu\in\mathbb{R}$$

Quindi il vettore $\mathbf{v}_6$ si esprime in ∞^1 modi distinti come combinazione lineare dei vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$:

$$\mathbf{v}_6=(4-\nu)\,\mathbf{v}_1+(\nu-3)\,\mathbf{v}_2+\nu\mathbf{v}_3$$

Osservazione. Esistono ∞^1 combinazioni lineari, poiché il sistema $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$ è linearmente dipendente. Infatti il sistema omogeneo:

$$\begin{cases} \alpha+\beta+0=0 \\ 2\alpha+\beta+\gamma=0 \\ \alpha+0+\gamma=0 \end{cases},$$

ha caratteristica $p=2$, per cui ammette ∞^1 autosoluzioni $\Longrightarrow \exists\,(\alpha,\beta,\nu)\neq(0,0,0)\mid \alpha\mathbf{v}_1+\beta\mathbf{v}_2+\gamma\mathbf{v}_3=\mathbf{0}$.

3. Abbiamo l'equazione vettoriale:

$$\lambda_1(1,1,1)+\lambda_2(1,2,3)+\lambda_3(2,-1,1)=(0,0,0)$$

che scritta componente per componente conduce al sistema omogeneo:

$$\begin{aligned} \lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3&=0 \\ \lambda_1+2\lambda_2-\lambda_3&=0 \\ \lambda_1+3\lambda_2+\lambda_3&=0 \end{aligned} \tag{3.60}$$

La matrice dei coefficienti è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Abbiamo: $\det A = 5 \Longrightarrow$ il sistema (3.60) ammette unicamente la soluzione banale $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0)$, per cui il sistema Σ è linearmente indipendente.

Scriviamo la combinazione lineare:

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3$$

equivalente a:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 &= 1 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 &= -2 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 &= 5 \end{aligned} \tag{3.61}$$

Tale sistema è compatibile e determinato. La soluzione è $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-6, 3, 2)$. Perciò: $\mathbf{v} = -6\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3$.

4. Il sistema $\Sigma = \{(1, -3, 2), (2, -4, -1), (1, -5, 7)\}$ è linearmente dipendente se il sistema lineare omogeneo:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ -3\lambda_1 - 4\lambda_2 - 5\lambda_3 &= 0 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 + 7\lambda_3 &= 0, \end{aligned} \tag{3.62}$$

è banale. La matrice dei coefficienti è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & -4 & -5 \\ 2 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

Risulta: $\det A = 0 \Longrightarrow p < n$, essendo p la caratteristica del sistema e $n = 3$ il numero di incognite. Quindi il sistema (3.62) ammette ∞^{n-p} soluzioni non nulle, perciò $\exists\, (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq 0$, da ciò segue che Σ è linearmente dipendente e che non è possibile esprimere il vettore $\mathbf{v}$ come combinazione lineare dei vettori di Σ.

5. $\nexists \lambda \in \mathbb{R} : \mathbf{v}_1 = \lambda \mathbf{v}_2$, quindi per la proposizione 3.2 il sistema Σ è linearmente indipendente. Scriviamo:

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2,$$

ottenendo il sistema lineare:

$$\begin{aligned} 3\lambda_1 + 2\lambda_2 &= 1 \\ 0 - \lambda_2 &= -2 \\ -2\lambda_1 - 5\lambda_2 &= k \end{aligned} \tag{3.63}$$

La matrice dei coefficienti e la matrice dei coefficienti più termini noti:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}; M(k) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -2 & -5 & k \end{pmatrix};$$

Risulta: $p = r(A) = 2$. Affinchè il sistema sia compatibile, deve essere $r(A) = r(M)$. Poniamo:

$$F(k) \stackrel{def}{=} \det M(k) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -2 & -5 & k \end{vmatrix} = -3(k+8)$$

È facile convincersi che $r(A) = r(M) = 2 \Longleftrightarrow F(k) = 0 \Longleftrightarrow k = -8 \stackrel{def}{=} k_*$. Ed è questo il valore di k tale che:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{2} \lambda_i \mathbf{v}_i$$

Per $k = k_*$, il sistema (3.63) ammette l'unica soluzione $(\lambda_1, \lambda_2) = (-1, 2)$, per cui:

$$\mathbf{v} = -\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$$

6. Il sistema Σ è linearmente indipendente se:

$$\lambda u(x) + \mu v(x) + \nu w(x) = 0 \Longrightarrow \lambda = \mu = \nu = 0$$

Sostituendo le espressioni analitiche di $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$ e ordinando i vari termini:

$$(\lambda + 2\mu)x^2 + (-2\lambda - 3\mu + \nu)x + (5\lambda + 3\nu) = \mathbf{0}, \tag{3.64}$$

essendo $\mathbf{0}$ il polinomio nullo $0x^2 + 0x + 0$.

La (3.64) equivale al sistema:

$$\begin{aligned} \lambda + 2\mu + 0 &= 0 \\ -2\lambda - 3\mu + \nu &= 0 \\ 5\lambda + 0 + 3\nu &= 0, \end{aligned} \tag{3.65}$$

che è banale: $(\lambda, \mu, \nu) = (0, 0, 0)$, per cui Σ è linearmente indipendente.

Scriviamo:

$$p(x) = \lambda_1 u(x) + \lambda_2 v(x) + \lambda_3 w(x),$$

cioè:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 0 &= 1 \\ -2\lambda_1 - 3\lambda_2 + \lambda_3 &= 4 \\ 5\lambda_1 + 0 + 3\lambda_3 &= -3, \end{aligned} \tag{3.66}$$

Il sistema lineare (3.66) è compatibile e determinato. La soluzione è $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-3, 2, 4)$; pertanto:

$$p(x) = -3u(x) + 2v(x) + 4\nu(x)$$

7. 1) $b(x)$ e $a(x)$ sono proporzionali se:

$$(\exists\lambda \in \mathbb{R} : b(x) = \lambda a(x)) \Longleftrightarrow x^2 + x - 1 = \lambda\left(x^2 - x + 1\right)$$

equivalente a:

$$(\lambda - 1)x^2 + (-\lambda - 1)x + (\lambda + 1) = \mathbf{0}, \tag{3.67}$$

essendo $\mathbf{0}$ il polinomio nullo (vettore nullo). La (3.67) è vera se, e solo se:

$$\begin{aligned} \lambda - 1 &= 0 \\ \lambda + 1 &= 0 \\ \lambda + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Tale sistema è manifestamente incompatibile, donde $\nexists\lambda : b(x) = \lambda(x)$.

2). Scriviamo:

$$c(x) = \lambda a(x) + \mu b(x)$$

equivalente a:

$$(\lambda + \mu - 1)x^2 + (-\lambda + \mu)x + (\lambda - \mu) = \mathbf{0},$$

da cui il sistema lineare:

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda - \mu = 0 \\ \lambda - \mu = 0 \end{cases} \Longrightarrow (\lambda, \mu) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

quindi:

$$c(x) = \frac{1}{2}[a(x) + b(x)]$$

3). Scriviamo:

$$e(x) = \lambda a(x) + \mu b(x)$$

Sostituendo le espressioni di $a(x)$, $b(x)$, $e(x)$:

$$(\lambda + \mu - 2)x^2 + (-\lambda + \mu + 1)x + (\lambda - \mu - 2) = \mathbf{0},$$

da cui il sistema:

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 2 \\ \lambda - \mu = 0 \\ \lambda - \mu = 2 \end{cases} \Longrightarrow \nexists(\lambda, \mu),$$

per cui $e(x)$ non è combinazione lineare di Σ_1.

4). Scriviamo:

$$e(x) = \lambda a(x) + \mu b(x) + \nu c(x)$$

Sostituendo le espressioni di $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $e(x)$:

$$(\lambda + \mu + \nu - 2)x^2 + (-\lambda + \mu + 1)x + (\lambda - \mu - 2) = \mathbf{0},$$

da cui il sistema:

$$\begin{cases} \lambda+\mu+\nu=2 \\ \lambda-\mu+0=0 \\ \lambda-\mu+0=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda+\mu+\nu=2 \\ \lambda-\mu+0=0 \end{cases},$$

che ammette ∞^1 soluzioni:

$$(\lambda,\mu,\nu)=\left(1-\frac{\nu}{2},1-\frac{\nu}{2},\nu\right),\ \forall\nu\in\mathbb{R}$$

Quindi:

$$e(x)=\left(1-\frac{\nu}{2}\right)a(x)+\left(1-\frac{\nu}{2}\right)b(x)+\nu c(x)$$

Osservazione. Il vettore $e(x)$ si esprime in infiniti modi come combinazione lineare dei vettori $\Sigma_2=\{a(x),b(x),c(x)\}$, poiché tale sistema è linearmente dipendente. Infatti:

$$\alpha a(x)+\beta b(x)+\gamma c(x)=\mathbf{0}\Longleftrightarrow\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=0 \\ \alpha-\beta+0=0 \\ \alpha-\beta+0=0 \end{cases}$$

Tale sistema ammette ∞^1 soluzioni non banali, quindi $\exists\infty^1\ (\alpha,\beta,\gamma)\neq(0,0,0)$: $\alpha a(x)+\beta b(x)+\gamma c(x)=\mathbf{0}$

5). Scriviamo:

$$d(x)=\lambda a(x)+\mu b(x)+\nu c(x)$$

Sostituendo le espressioni di $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $d(x)$:

$$(\lambda+\mu+\nu)x^2+(-\lambda+\mu+1)x+(\lambda-\mu-1)=\mathbf{0},$$

da cui il sistema:

$$\begin{cases} \lambda+\mu+\nu=0 \\ \lambda-\mu+0=1 \\ \lambda-\mu+0=1 \end{cases},$$

che è compatibile e indeterminato con ∞^1 soluzioni:

$$(\lambda,\mu,\nu)=\left(\frac{1}{2}\left(1-\frac{\nu}{2}\right),-\frac{1}{2}\left(1+\frac{\nu}{2}\right),\nu\right),\ \forall\nu\in\mathbb{R}$$

Quindi:

$$d(x)=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{\nu}{2}\right)a(x)+\left(1+\frac{\nu}{2}\right)b(x)\right]+\nu c(x)$$

6). Esprimiamo il polinomio $f(x)$ come combinazione lineare di $\Sigma_2=\{a(x),b(x),e(x)\}$:

$$f(x)=\lambda a(x)+\mu b(x)+\nu e(x)$$

cioè:

$$(\lambda+\mu+2\nu-1)x^2+(-\lambda+\mu-\nu-1)x+(\lambda-\mu+2\nu+2)=\mathbf{0},$$

quindi:

$$\begin{cases} \lambda + \mu + 2\nu = 1 \\ -\lambda + \mu - \nu = 1 \\ \lambda - \mu + 2\nu = -2 \end{cases}$$

Tale sistema è compatibile e determinato:

$$(\lambda, \mu, \nu) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -1\right),$$

donde:

$$f(x) = \frac{3}{2}[a(x) + b(x)] - e(x)$$

8. Scriviamo:

$$\lambda_1 e_1(x) + \lambda_2 e_2(x) + \lambda_3 e_3(x) = 0$$

Sostituendo le espressioni analitiche di $e_i(x)$:

$$\lambda_1 + \lambda_2(x-1) + \lambda_3\left(x^2 - 2x + 1\right) = 0,$$

equivalente al sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} 0 + 0 + \lambda_3 = 0 \\ 0 + \lambda_2 - 2\lambda_3 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases},$$

che ammette l'unica soluzione $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0)$, donde Σ è una base.

Scriviamo $p(x)$:

$$p(x) = \mu_1 e_1(x) + \mu_2 e_2(x) + \mu_3 e_3(x)$$

Ottenendo:

$$\begin{cases} 0 + 0 + \mu_3 = 4 \\ 0 + \mu_2 - 2\mu_3 = -1 \\ \mu_1 - \mu_2 + \mu_3 = 1 \end{cases} \Longrightarrow (\mu_1, \mu_2, \mu_3) = (4, 7, 4)$$

Quindi:

$$p(x) = 4e_1(x) + 7e_2(x) + 4e_3(x)$$

Si conclude che la terna $(4, 7, 4)$ sono le componenti del vettore $p(x)$ nella base Σ.

9. Ricordiamo che $\mathcal{P}_n[x]$ è l'insieme dei polinomi su $\mathbb{R}$ di grado $\leq n$, ed è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Consideriamo ora il sistema di vettori di $\mathcal{P}_n[x]$:

$$\Sigma = \left\{1, x, x^2, ..., x^n\right\}$$

Abbiamo

$$\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + ... + \lambda_n x^n = 0,$$

cioè:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 0 + 0 + ... + 0 = 0 \\ 0 + \lambda_2 + 0 + ... + 0 = 0 \\ \quad ... \\ 0 + 0 + 0 + ... + \lambda_n = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \lambda_i = 0, \quad i = 0, 1, ..., n$$

Quindi Σ è linearmente indipendente. Inoltre, ogni vettore di $\mathcal{P}_n[x]$ dipende linearmente da Σ. Se ne conclude che Σ è una base di $\mathcal{P}_n[x]$, con dimensione $\dim \mathcal{P}_n[x] = n + 1$.

10. Consideriamo il sistema di infiniti vettori:

$$\Sigma_\infty = \left\{1, x, x^2, ..., x^n, ...\right\}$$

Per quanto visto nell'esercizio precedente, tale sistema è linearmente indipendente. Inoltre, ogni vettore di $\mathcal{P}_\infty[x]$ dipende linearmente da Σ_∞. Se ne conclude che Σ_∞ è una base di $\mathcal{P}_\infty[x]$, con dimensione $\dim \mathcal{P}_\infty[x] = +\infty$.

11. La matrice R è:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -x_0 & x_0^2 \\ 0 & 1 & -2x_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi l'inversa:

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 0 & 1 & 2x_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il polinomio $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ ha componenti (a_0, a_1, a_2) in $\{e_i(x)\}$, mentre nella nuova base $\{e_i'(x)\}$ le componenti sono (a_0', a_1', a_2') tali che:

$$\begin{pmatrix} a_0' \\ a_1' \\ a_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -x_0 & x_0^2 \\ 0 & 1 & -2x_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 \\ a_1 + 2a_2 x_0 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Cioè:

$$\begin{aligned} a_0' &= a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 \\ a_1' &= a_1 + 2a_2 x_0 \\ a_2' &= a_2 \end{aligned}$$

12. Ricordiamo che $M_\mathbb{R}(m, n)$ è lo spazio vettoriale i cui vettori sono le matrici $m \times n$ sul campo reale. Senza perdita di generalità, consideriamo $M_\mathbb{R}(2, 2)$, quindi consideriamo il sistema di vettori $\Sigma = \{E_{ik}\}$ con $i, k = \{1, 2, 3\}$, essendo:

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; E_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Σ è lineramente indipendente. Infatti:

$$\begin{aligned}\lambda_1 E_{11} + \lambda_2 E_{12} + \lambda_3 E_{21} + \lambda_4 E_{22} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \lambda_i = 0, \;\; i = 1, 2, 3, 4\end{aligned}$$

Inoltre ogni elemento di

$$\begin{aligned}&\forall A = (a_{ik}) \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(2 \times 2), \\ &A = a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} + a_{21}E_{21} + a_{22}E_{22}\end{aligned}$$

Ne concludiamo che Σ è una base di $M_{\mathbb{R}}(2,2)$, perciò $\dim M_{\mathbb{R}}(2,2) = 4$. Passando al caso generale: $\dim M_{\mathbb{R}}(n,n) = mn$.

13. Passando ai vettori colonna:

$$V' = R^{-1}V, \;\; W' = R^{-1}W,$$

R^{-1} è la matrice inversa di:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Abbiamo:

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi:

$$V' = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}, \; W' = \begin{pmatrix} c \\ b-c \\ a-b \end{pmatrix},$$

da cui le componenti di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ nella nuova base:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= (2, -5, 7) \\ \mathbf{w} &= (c, b-c, a-b)\end{aligned}$$

14. $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in H \Longrightarrow \mathbf{v} = (x^1 = 0, x^2 = 0, ..., x^\alpha = 0, x^{\alpha+1} ..., x^n)$,
$\mathbf{w} = (y^1 = 0, y^2 = 0, ..., y^\alpha = 0, y^{\alpha+1} ..., y^n)$
Quindi:

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \left(0, 0, ..., 0, x^{\alpha+1} + y^{\alpha+1}, ..., x^n + y^n\right),$$

cioè $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \in H$. Inoltre $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda \mathbf{v} = \left(0, 0, ..., 0, \lambda x^{\alpha+1}, ..., \lambda x^n\right) \Longrightarrow (\lambda \mathbf{v}) \in H$$

Ciò implica che H è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ Per determinarne la dimensione, dobbiamo prima trovare una base, poiché la dimensione altro non è che l'ordine di una qualunque base. Consideriamo i vettori di H:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= \left(\underbrace{0,0,...0}_{\alpha},1,0,...,0\right)\\
\mathbf{u}_2 &= \left(\underbrace{0,0,...0}_{\alpha},0,1,...,0\right)\\
&...\\
\mathbf{u}_{n-\alpha} &= \left(\underbrace{0,0,...0}_{\alpha},0,0,...,1\right)
\end{aligned}$$

Il sistema $\Sigma = \{\mathbf{u}_i\}$ è linearmente indipendente, in quanto è ridotto rispetto a tutti i suoi vettori. Inoltre, ogni vettore di H dipende linearmente da Σ; infatti:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v},\mathbf{w} \in H \Longrightarrow \mathbf{v} &= \left(x^1 = 0, x^2 = 0, ..., x^\alpha = 0, x^{\alpha+1}..., x^n\right)\\
&= x^i\mathbf{u}_i
\end{aligned}$$

Si concude che Σ è una base di H, e che quindi $\dim H = n - \alpha$.

15. $\forall \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3), \mathbf{v}' = (v_1', v_2', v_3') \in H$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} + \mathbf{v}' &= (v_1 + v_1', v_2 + v_2', v_3 + v_3')\\
&2(v_1 + v_1') + (v_2 + v_2') - (v_3 + v_3')\\
&= (2v_1 + v_2 - v_3) + (2v_1' + v_2' - v_3')\\
&= 0
\end{aligned}$$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in H$,

$$2(\lambda v_1) + (\lambda v_2) - (\lambda v_3) = \lambda(2v_1 + v_2 - v_3) = 0$$

da cui H è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$. Per ricercare una sua base risolviamo l'equazione lineare omogenea:

$$2v_1 + v_2 - v_3 = 0,$$

nelle incognite v_1, v_2, v_3. Essa ammette ∞^2 soluzioni non banali:

$$\begin{aligned}
(v_1, v_2, v_3) &= (v_1, v_2, 2v_1 + v_2)\\
&= (v_1, 0, 2v_1) + (0, v_2, v_2)\\
&= v_1(1,0,2) + v_2(0,1,1)
\end{aligned}$$

Quindi $\dim H = 2$, e una base di H è $\{(1,0,2),(0,1,1)\}$.

Parte II

Omomorfismi ed isomorfismi

Capitolo 4

Applicazioni lineari tra spazi vettoriali

4.1 Definizione di applicazione lineare

Siano E e F due spazi vettoriali sul medesimo campo $\mathbb{K}$. Consideriamo l'applicazione:

$$\Omega : E \longmapsto F \tag{4.1}$$

La (4.1) applica a $\mathbf{x} \in E$, un vettore $\mathbf{y} \in F$:

$$\mathbf{x} \in E \longmapsto \mathbf{y} \in F$$

Scriviamo:

$$\mathbf{y} = \Omega(\mathbf{x}) \tag{4.2}$$

Definizione. L'applicazione Ω è **lineare** se è additiva ed omogenea:

1. $\forall \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in E,\ \ \Omega(\mathbf{x} + \mathbf{x}') = \Omega(\mathbf{x}) + \Omega(\mathbf{x}')$ (additività)
2. $\forall \mathbf{x} \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \ \Omega(\lambda \mathbf{x}) = \lambda \Omega(\mathbf{x})$ (omogeneità)

È facile rendersi conto che additività e omogeneità sono contenute nell'unica condizione:

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in E,\ \forall \lambda, \lambda' \in \mathbb{K},\ \ \Omega(\lambda \mathbf{x} + \lambda' \mathbf{x}') = \lambda \Omega(\mathbf{x}) + \lambda' \Omega(\mathbf{x}') \tag{4.3}$$

Nel caso $E = F$ l'applicazione lineare (4.2) si chiama **operatore lineare** e viene spesso utilizzata la seguente notazione:

$$\Omega \mathbf{x} = \mathbf{y}, \tag{4.4}$$

che si legge: *il vettore* $\mathbf{y}$ *è il risultato dell'applicazione dell'operatore* Ω *sul vettore* $\mathbf{x}$. Equivalentemente: Ω *opera su* $\mathbf{x}$*, dando* $\mathbf{y}$ *come risultato.*
Due esempi immediati di operatori lineari sono dati rispettivamente dall'**operatore nullo** $\hat{0}$ e dall'**operatore identità** $\hat{1}$:

$$\hat{0}\mathbf{x} = \mathbf{0},\ \ \forall \mathbf{x} \in E$$
$$\hat{1}\mathbf{x} = \mathbf{x}, \forall \mathbf{x} \in E$$

L'operatore nullo associa ad ogni vettore di E, il vettore nullo, mentre l'operatore identità applicato ad un qualunque vettore di E, fornisce il vettore medesimo.
Ulteriori esempi:

Figura 4.1: Rettangoloide relativo alla funzione f e di base $[a, x]$.

1. Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathcal{P}_n[x]$ su $\mathbb{R}$ dei polinomi di grado $\leq n$. L'operatore di derivazione $\frac{d}{dx}$ è un operatore lineare. Per mostrare ciò, osserviamo innanzitutto che:
$$\frac{d}{dx} : p_m(x) \in \mathcal{P}_n[x] \longmapsto \frac{d}{dx} p_m(x) \in \mathcal{P}_n[x]$$
essendo $p_m(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_m x^m$, quindi $\frac{d}{dx} p_m(x) = a_1 + 2a_2 x + ... + m a_{m-1} x^{m-1}$, per cui $\frac{d}{dx} p_m(x) \in \mathcal{P}_n[x]$.

   La linearità segue immediatamente dalle regole di derivazione della somma di due funzioni e del prodotto di una costante per una funzione:
$$\forall p_m(x), q_r(x) \in \mathcal{P}_n[x], \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \ \frac{d}{dx}[\lambda p_m(x) + \mu q_r(x)] = \lambda \frac{d}{dx} p_m(x) + \mu \frac{d}{dx} q_r(x)$$

2. Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathcal{F}(a, b)$ i cui elementi sono le funzioni reali di variabile reale definite nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ (§ 29). Se $\mathcal{C}(a, b)$ è l'insieme delle funzioni continue in $[a, b]$, proviamo che a) $C(a, b)$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{F}(a, b)$, b) l'applicazione:
$$S : C(a, b) \longmapsto C(a, b)$$
tale che:
$$f \in C(a, b) \longmapsto \int_a^x f(\xi)\, d\xi, \quad x \in (a, b)$$
$C(a, b) \subset \mathcal{F}(a, b)$ è un sottospazio di $\mathcal{F}(a, b)$, poiché la somma di due funzioni continue è a sua volta una funzione continua, e il prodotto di uno numero reale per una funzione continua è una funzione continua. In simboli:
$$\forall f, g \in C(a, b), \ (f + g) \in C(a, b)$$
$$\forall f \in C(a, b), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ (\lambda f) \in C(a, b)$$
Da un punto di vista geometrico, l'applicazione S associa ad ogni funzione $f(x)$ continua in (a, b), l'area del rettangoloide $\mathcal{R}(x)$ relativo alla funzione f e di base $[a, x]$. Ad esempio, se $f(x) \geq 0$::
$$\mathcal{R}(x) = \left\{(\xi, y) \in \mathcal{R}^2 \mid a \leq \xi \leq x, \ 0 \leq y \leq f(\xi)\right\}$$
Per i dettagli vedere figura 4.1.

   La linearità dell'operatore S segue immediatamente dalle proprietà di addività e omogeneità dell'integrale definito. Scriviamo:
$$S(f) = \int_a^x f(\xi)\, d\xi$$

Quindi $\forall f, g \in C(a,b)$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} S(\lambda f + \mu g) &= \int_a^x (\lambda f(\xi) + \mu g(\xi))\, d\xi \\ &= \lambda \int_a^x f(\xi)\, d\xi + \mu \int_a^x g(\xi)\, d\xi \\ &= \lambda S(f) + \mu S(g) \end{aligned}$$

Di seguito sono riportati casi speciali di applicazioni tra spazi vettoriali.

Sia E uno spazio vettoriale su un campo K. Consideriamo una base di E:

$$\{\mathbf{e}_i\}, \quad i = 1, 2, ..., r \tag{4.5}$$

Quindi $\dim E = r$. Sia E' il sottospazio di E generato da $\{\mathbf{e}_i\}$ per $i = 1, 2, ..., p < r$.
Ciò premesso, si definisce **operatore di proiezione** di E su E', l'operatore lineare:

$$\begin{aligned} &\pi : E \longmapsto E' \\ &\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{r} v_i \mathbf{e}_i \longmapsto \mathbf{v}' = \sum_{i=1}^{p} v_i \mathbf{e}_i \end{aligned}$$

Proviamo la linearità di π.

$$\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in E, \ \forall \lambda, \mu \in K, \quad \mathbf{u} \overset{def}{=} \lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{w}$$

Se $\mathbf{u} = (u_1, u_2, ..., u_r)$ nella base (4.5), risulta:

$$\pi \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{p} u_i \mathbf{e}_i, \tag{4.6}$$

Evidentemente:

$$u_i = \lambda v_i + \mu w_i$$

Quindi la (4.6) diventa:

$$\begin{aligned} \pi \mathbf{u} &= \sum_{i=1}^{p} (\lambda v_i + \mu w_i)\, \mathbf{e}_i \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{p} v_i \mathbf{e}_i + \mu \sum_{i=1}^{p} w_i \mathbf{e}_i \\ &= \lambda \pi \mathbf{v} + \mu \pi \mathbf{u}, \end{aligned}$$

donde la linearità di π. Ad esempio, consideriamo lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$. Quindi fissiamo un riferimento cartesiano ortogonale $R(0xyz)$. L'operatore di proiezione π_x su $\mathbb{R}$ è:

$$\pi_x : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}$$

Più precisamente, π_x proietta ogni vettore $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ sull'asse x:

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y + v_z \mathbf{e}_z \longmapsto v_x \mathbf{e}_x$$

essendo $\mathbf{e}_i$ $(i = x, y, z)$ i versori degli assi coordinati.

***

L'**operatore traslazione** è così definito:

$$T\mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u},$$

essendo $\mathbf{u}$ un vettore assegnato di E. Si osservi che tale operatore non è lineare:

$$T(\lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w}) = \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w} + \mathbf{u}$$

D'altro canto:

$$\begin{aligned}\lambda T\mathbf{v} + \mu T\mathbf{w} &= \lambda(\mathbf{v} + \mathbf{u}) + \mu(\mathbf{w} + \mathbf{u}) \\ &= \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w} + (\lambda + \mu)\mathbf{u}\end{aligned}$$

Quindi:

$$T(\lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w}) = \lambda T\mathbf{v} + \mu T\mathbf{w} - (\lambda + \mu)\mathbf{w}$$

Cioè:

$$\forall\lambda, \mu \in K : \lambda + \mu \neq 0, \forall\mathbf{w} \in E - \{\mathbf{0}\}, T(\lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w}) \neq \lambda T\mathbf{v} + \mu T\mathbf{w}$$

Da un punto di vista geometrico se $E = \mathbb{R}^3$, l'operatore T trasla di una quantità $\mathbf{u}$ (nello spazio fisico), ogni vettore su cui esso agisce.

***

L'**operatore costante** è così definito:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{a},$$

essendo $\mathbf{x}, \mathbf{a} \in E$, con $\mathbf{a}$ vettore assegnato. Mostriamo che tale operatore è non lineare.

$$A(\lambda\mathbf{x} + \lambda'\mathbf{x}') = \mathbf{a}$$

D'altro canto:

$$\lambda A\mathbf{x} + \lambda' A\mathbf{x}' = (\lambda + \lambda')\mathbf{a},$$

donde:

$$A(\lambda\mathbf{x} + \lambda'\mathbf{x}') \neq \lambda A\mathbf{x} + \lambda' A\mathbf{x}',$$

da cui la non linearità di A.

***

Sia E uno spazio vettoriale tridimensionale sul campo K. Consideriamo l'operatore A tale che:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{y}, \text{ con } \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3), \ \mathbf{y} = (2x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1) \text{ in una base } \{e_i\}$$

Studiamo il comportamento di tale operatore.

$$\begin{aligned}A(\lambda\mathbf{x} + \lambda'\mathbf{x}') &= A(\lambda x_1 + \lambda' x_1', \lambda x_2 + \lambda' x_2', \lambda x_3 + \lambda' x_3') \\ &= (2\lambda x_1 + 2\lambda x_1' + \lambda x_2 + \lambda' x_2', \lambda x_2 + \lambda' x_2' + \lambda x_3 + \lambda' x_3', \\ &\lambda x_1 + \lambda' x_1') \\ &= (\lambda(2x_1 + x_2) + \lambda'(2x_1' + x_2'), \lambda(x_2 + x_3) + \lambda'(x_2' + x_3'), \lambda x_1 + \lambda' x_1') \\ &= \lambda(2x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1) + \lambda'(2x_1' + x_2', x_2' + x_3', x_1') \\ &= \lambda A\mathbf{x} + A\mathbf{x}',\end{aligned}$$

da cui la linearità di A.

4.2 Esercizi

1. Dimostrare la linearità delle seguenti applicazioni:

$$\begin{cases} A : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \longrightarrow (x + y, y) \end{cases} \tag{4.7}$$
$$\begin{cases} B : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R} \\ (x, y, z) \longrightarrow 2x - 3y + 4z \end{cases}$$

2. Dimostrare la non linearità delle seguenti applicazioni:

$$\begin{cases} A : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \longrightarrow xy \end{cases} \tag{4.8}$$
$$\begin{cases} A : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \longrightarrow (x + 1, 2y, x + y) \end{cases}$$
$$\begin{cases} A : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \longrightarrow (|x|, 0) \end{cases}$$

4.2.1 Soluzioni

1. Prendiamo ad arbitrio $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{x}' = (x', y') \in \mathbb{R}^2$. Quindi

$$\begin{aligned} \forall \lambda, \lambda' \in \mathbb{R}, \;\; & A(\lambda \mathbf{x} + \lambda' \mathbf{x}') = \\ & = A(\lambda x + \lambda' x', \lambda y + \lambda' y') \\ & = (\lambda x + \lambda' x' + \lambda y + \lambda' y', \lambda y + \lambda' y') \\ & = (\lambda (x + y) + \lambda' (x' + y'), \lambda y + \lambda' y') \\ & = (\lambda (x + y), \lambda y) + (\lambda' (x' + y'), \lambda' y') \\ & = \lambda (x + y, y) + \lambda' (x' + y', y') \\ & = \lambda A\mathbf{x} + \lambda' A\mathbf{x}' \end{aligned}$$

Da qui la linearità di A.

Prendiamo ad arbitrio $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{x}' = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$. Quindi:

$$\begin{aligned} \forall \lambda, \lambda' \in \mathbb{R}, \;\; & B(\lambda \mathbf{x} + \lambda' \mathbf{x}') = \\ & = B(\lambda x + \lambda' x', \lambda y + \lambda' y', \lambda z + \lambda' z') \\ & = 2(\lambda x + \lambda' x') - 3(\lambda y + \lambda' y') + 4(\lambda z + \lambda' z') \\ & = \lambda (2x - 3y + 4z) + \lambda' (2x' - 3y' + 4z') \\ & = \lambda B\mathbf{x} + \lambda' B\mathbf{x}' \end{aligned}$$

donde la linearità di B.

2. Prendiamo ad arbitrio $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{x}' = (x', y') \in \mathbb{R}^2$. Quindi:

$$\begin{aligned} \forall \lambda, \lambda' \in \mathbb{R}, \;\; & A(\lambda \mathbf{x} + \lambda' \mathbf{x}') = \\ & = A(\lambda x + \lambda' x', \lambda y + \lambda' y') \\ & = (\lambda x + \lambda' x')(\lambda y + \lambda' y') \\ & = \lambda^2 xy + \lambda\lambda' (xy' + x'y) + \lambda'^2 x'y' \\ & \neq \lambda A\mathbf{x} + \lambda' A\mathbf{x}' \\ & = \lambda xy + \lambda' x'y' \end{aligned}$$

da qui la non linearità di A.

Passiamo all'operatore dato dalla seconda delle (4.8). Prendiamo ad arbitrio $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{x}' = (x', y') \in \mathbb{R}^2$. Quindi:

$$\begin{aligned}
\forall \lambda, \lambda' \in \mathbb{R}, \quad & A(\lambda \mathbf{x} + \lambda' \mathbf{x}') = \\
& = A(\lambda x + \lambda' x', \lambda y + \lambda' y') \\
& = (\lambda x + \lambda' x' + 1, 2\lambda y + 2\lambda' y', \lambda x + \lambda' x' + \lambda y + \lambda' y) \\
& = (\lambda x + 1, 2\lambda y, \lambda(x + y)) + \lambda'(x' + 2y' + x' + y') \\
& \neq \lambda A\mathbf{x} + \lambda' A\mathbf{x}' \\
& = \lambda(x + 1, 2y, x + y) + \lambda'(x' + 1, 2y', x' + y')
\end{aligned}$$

da cui la non linearità di A.

Passiamo all'operatore dato dalla terza delle (4.8). Prendiamo ad arbitrio $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{x}' = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$. Quindi:

$$\begin{aligned}
\forall \lambda, \lambda' \in \mathbb{R}, \quad & A(\lambda \mathbf{x} + \lambda' \mathbf{x}') = \\
& = A(\lambda x + \lambda' x', \lambda y + \lambda' y', \lambda z + \lambda' z') \\
& = (|\lambda x + \lambda' x'|, 0) \\
& \neq \lambda A\mathbf{x} + \lambda' A\mathbf{x}' \\
& = \lambda(|x|, 0) + \lambda'(|x'|, 0) \\
& = (\lambda |x| + \lambda' |x'|, 0)
\end{aligned}$$

da cui la non linearità di A.

Capitolo 5

Omomorfismi e isomorfismi

5.1 Introduzione

Ricordiamo che dati gli insiemi $X, Y \neq \emptyset$ e $f : X \longmapsto Y$, l'**immagine** di f in Y è:

$$f(X) = \{y \in Y \mid y = f(x)\} \subseteq Y$$

Ciò premesso, sussistono le seguenti:

Definizione. (f *è suriettiva*) $\Longleftrightarrow (\forall y \in Y,\ \exists x \in X \mid f(x) = y)$

Definizione. (f *è iniettiva*) $\Longleftrightarrow (x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x'))$

Definizione. (f *è biiettiva*) $\Longleftrightarrow$ (f è iniettiva e suriettiva)

Nel caso speciale $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$, le definizioni suddette si prestano ad interpretazione geometrica. Nel caso di un'applicazione iniettiva, ogni retta parallela all'asse x interseca in uno ed un sol punto la curva di equazione $y = f(x)$. Ad esempio, la funzione esponenziale:

$$\begin{array}{c} f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R} \\ x \longmapsto a^x \end{array}, \tag{5.1}$$

è un'applicazione iniettiva ma non suriettiva (figura 5.1). Infatti:

$$x \neq x' \Longrightarrow a^x \neq a^{x'}$$
$$\forall y \in (-\infty, 0), \nexists x \in \mathbb{R} \mid a^x = y,$$

da cui l'iniettività e la non suriettività dell'applicazione (5.1).
Nel caso di un'applicazione $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ suriettiva, ogni retta parallela all'asse x interseca *almeno* in un punto la curva $y = f(x)$. Ciò implica (a differenza del caso precedente) che possono esserci intersezioni multiple, come nel caso della funzione $f(x) = x^3 - x^2 - x$ (figura 5.2).Si consideri ora l'applicazione:

$$\begin{array}{c} f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{array} \tag{5.2}$$

Tale applicazione non è né iniettiva e né suriettiva. Infatti, ogni x^2 è immagine di $-x$ e $+x$. Inoltre, $\forall y \in (-\infty, 0)$, $\nexists x \in \mathbb{R} : f(x) = y$ (figura 5.3)

Figura 5.1: Grafico della funzione $f(x) = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$). Ogni retta $y = y_0 > 0$ interseca in uno e un sol punto il grafico di $f(x)$. Per $y_0 < 0$ l'intersezione è vuota. Si tratta quindi di un'applicazione iniettiva ma non suriettiva.

Figura 5.2: Grafico della funzione $f(x) = x^3 - x^2 - x$. Esistono rette parallele all'asse x che intersecano in punti distinti il grafico della funzione. Ogni retta $y = y_0$ interseca comunque $y = f(x)$. Si tratta quindi di un'applicazione suriettiva ma non iniettiva.

Figura 5.3: Grafico della funzione $f(x) = x^2$. Ogni retta $y = b > 0$ interseca in due punti distinti la curva $y = f(x)$. L'intersezione di una generica retta $y = c < 0$ con il grafico di $f(x)$, è l'insieme vuoto.

5.2 Definizione assiomatica e teoremi conseguenti

Definizione. Siano E, F due spazi vettoriali sul campo $\mathbb{K}$. Dicesi ***omomorfismo*** tra E ed F ogni applicazione lineare $\Omega : E \longmapsto F$.

Osservazione. Nel caso speciale $E = F$, ogni applicazione lineare $\Omega : E \to E$, è denominata ***endomorfismo***.

Definizione. Due spazi vettoriali si dicono ***omomorfi*** se esiste un omomorfismo tra essi.

Definizione. Siano E, F due spazi vettoriali sul campo $\mathbb{K}$. Dicesi ***isomorfismo*** tra E ed F ogni applicazione lineare biiettiva $\Omega : E \longmapsto F$.

Definizione. Due spazi vettoriali si dicono ***isomorfi*** se esiste un isomorfismo tra essi.

Esempio 57.
Se E è un qualunque spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$, consideriamo l'applicazione:

$$\begin{array}{c} \Omega : E \longmapsto E \\ \mathbf{v} \longmapsto \lambda \mathbf{v} \end{array}, \tag{5.3}$$

essendo λ scalare assegnato non nullo. Dimostriamo che la (5.3) è biiettiva.
Iniziamo a dimostrare la linearità:

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in E, \forall \mu, \nu \in K,\ \Omega(\mu \mathbf{v} + \nu \mathbf{w}) = \\ &= \lambda(\mu \mathbf{v} + \nu \mathbf{w}) \\ &= \mu(\lambda \mathbf{v}) + \nu(\lambda \mathbf{w}) \\ &= \mu \Omega \mathbf{v} + \nu \Omega \mathbf{w} \end{aligned}$$

L'iniettività:

$$\mathbf{v} \neq \mathbf{v}' \Longrightarrow \Omega \mathbf{v} \neq \Omega \mathbf{v}'$$

La suriettività:

$$\forall (\lambda \mathbf{v}) \in E,\ \exists \mathbf{v} \in E \mid \Omega \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$$

Da ciò segue la biiettività di Ω. Tale isomorfismo è noto come **omotetia** di rapporto λ: l'immagine di un generico vettore $\mathbf{v} \in E$ si identifica con $\mathbf{v}$ medesimo a meno di un fattore di scala λ.

***

Teorema 58. Sia $\mathbb{K}$ un campo. Gli spazi vettoriali su $\mathbb{K}$ isodimensionali sono isomorfi.

Dimostrazione. Siano E, F due arbitrari spazi vettoriali isodimensionali:

$$\dim E = n, \quad \dim F = n$$

Fissiamo due basi:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{e}_i\}, \quad i = 1, 2, ..., n \quad \text{base di } E \\ \{\mathbf{e}'_i\}, \quad i = 1, 2, ..., n \quad \text{base di } F \end{aligned}$$

Si consideri l'applicazione lineare:

$$\psi : E \longmapsto F \tag{5.4}$$

tale che:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i \longmapsto \mathbf{x}' = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}'_i$$

L'applicazione (5.4) associa ad ogni vettore $\mathbf{x}$ di E il vettore $\mathbf{x}'$ di F che ha per componenti le componenti di $\mathbf{x}$ in $\{\mathbf{e}_i\}$. Osserviamo che presi ad arbitrio $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ in E:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i \mathbf{e}_i,$$

risulta:

$$\psi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}' = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}'_i$$
$$\psi(\mathbf{y}) = \mathbf{y}' = \sum_{i=1}^{n} y_i \mathbf{e}'_i$$

Tenendo conto della proposizione (3.3) (unicità delle componenti di un vettore in una assegnata base:

$$\mathbf{x} \neq \mathbf{y} \Longrightarrow x_i \neq y_i,$$

donde:

$$\mathbf{x} \neq \mathbf{y} \Longrightarrow \psi(\mathbf{x}) \neq \psi(\mathbf{y})$$

Cioè ψ è iniettiva. Inoltre:

$$\forall \mathbf{x}' \in F, \ \exists (x_1, x_2, ..., x_n) \mid \ \mathbf{x}' = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}'_i \Longrightarrow \exists \mathbf{x} \in E \mid \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i$$

da cui la suriettività di ψ. Si conclude che ψ è iniettiva e suriettiva, quindi biiettiva. Da qui la tesi. □

Definizione. Si chiama ***immagine*** dell'applicazione lineare $\Omega : E \longmapsto F$ e si indica con $\Omega(E)$ il sottoinsieme di F:

$$\Omega(E) = \{\mathbf{y} \in F \mid \Omega\mathbf{x} = \mathbf{y}, \ \forall \mathbf{x} \in E\}$$

Teorema 59. $\Omega(E)$ è un sottospazio vettoriale di F.

Dimostrazione. $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \Omega(E) \Longleftrightarrow \exists \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in E \mid \mathbf{y}_1 = \Omega\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2 = \Omega\mathbf{x}_2$. Quindi:

$$\forall \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \Omega(E), \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 = \Omega\mathbf{x}_1 + \Omega\mathbf{x}_2 \underset{\Omega \text{ è lineare}}{=} \Omega(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \in \Omega(E)$$
$$\forall \lambda \in K, \forall \mathbf{y} \in \Omega(E), \ \lambda\mathbf{y} = \lambda\Omega\mathbf{x} \underset{\Omega \text{ è lineare}}{=} \Omega(\lambda\mathbf{x}) \in \Omega(E),$$

donde l'asserto. □

Definizione. Dicesi ***rango*** di $\Omega : E \longmapsto F$, la dimensione del sottospazio $\Omega(E)$, e si indica con $R(\Omega)$.

Definizione. Dicesi ***kernel*** o ***nucleo*** dell'applicazione lineare $\Omega : E \longmapsto F$, il sottoinsieme di E:

$$Ker\Omega = \{\mathbf{x} \in E \mid \Omega\mathbf{x} = \mathbf{0}_F\},$$

essendo $\mathbf{0}_F$ il vettore nullo di F.

Teorema 60. Il kernel di $\Omega : E \longmapsto F$ è un sottospazio vettoriale di E.

Dimostrazione. Prendiamo ad arbitrio $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in Ker\Omega$, $\lambda \in K$. Quindi:

$$\Omega(\mathbf{x} + \mathbf{x}') = \Omega\mathbf{x} + \Omega\mathbf{x}' = \mathbf{0}_F + \mathbf{0}_F = \mathbf{0}_F \Longrightarrow (\mathbf{x} + \mathbf{x}') \in Ker\Omega$$
$$\Omega(\lambda\mathbf{x}) = \lambda\Omega\mathbf{x} = \lambda\mathbf{0}_F = \mathbf{0}_F \Longrightarrow (\lambda\mathbf{x}) \in Ker\Omega,$$

donde l'asserto. □

Definizione. Dicesi ***nullità*** di $\Omega : E \longmapsto F$, e si indica con $N(\Omega)$, la dimensione di $Ker\Omega$:

$$N(\Omega) = \dim \ker \Omega$$

Se $E \equiv F$, $\Omega(E)$ e $Ker\Omega$ non sono in generale sottospazi supplementari, cioè E non si decompone nella somma diretta di $\Omega(E)$ e di $Ker\Omega$, però vale sempre la relazione:

$$R(\Omega) + N(\Omega) = \dim E \tag{5.5}$$

Teorema 61.

$$\left(\begin{array}{c}\text{Un omomorfismo suriettivo } \Omega : E \longmapsto F \\ \text{è un isomorfismo}\end{array}\right) \Longleftrightarrow (\ker \Omega = \{\mathbf{0}_E\})$$

Dimostrazione. **Implicazione inversa**
Hp: $\ker \Omega = \{\mathbf{0}_E\}$
Th: $\Omega : E \longmapsto F$ è un isomorfismo (basta dimostrare l'iniettività, poiché per ipotesi Ω è suriettiva).

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E \mid \Omega\mathbf{x} = \Omega\mathbf{y} \Longrightarrow \mathbf{0}_F = \Omega\mathbf{x} - \Omega\mathbf{y} = \Omega(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \Longrightarrow (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \in Ker\Omega$$

L'ultima implicazione si giustifica ricordando la definizione di Kernel. Inoltre:

$$(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \in Ker\Omega \underset{\ker \Omega = \{\mathbf{0}_E\}}{\Longrightarrow} \mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{0}_E \Longrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$$

Si conclude

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E, \ \Omega\mathbf{x} = \Omega\mathbf{y} \Longrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y},$$

da cui l'iniettività di Ω.
Implicazione diretta
Hp: $\Omega : E \longmapsto F$ è iniettiva e suriettiva.
Th: $\ker \Omega = \{\mathbf{0}_E\}$.
Osserviamo innanzitutto che:

$$\forall \mathbf{x} \in \ker \Omega,\ \forall \mathbf{y} \in E,\ \mathbf{x} + \mathbf{y} \overset{def}{=} \mathbf{z} \in E$$

Inoltre per definizione di kernel:

$$\mathbf{x} \in \ker \Omega \Longrightarrow \mathbf{0}_F = \Omega \mathbf{x} = \Omega\left(\mathbf{z} - \mathbf{y}\right) \underset{\Omega \text{ è lineare}}{=} \Omega \mathbf{z} - \Omega \mathbf{y} \Longrightarrow \Omega \mathbf{z} = \Omega \mathbf{y} \underset{\Omega \text{ è iniettiva}}{\Longrightarrow} \mathbf{z} = \mathbf{y} \Longrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}_E$$

Cioè:

$$(\forall \mathbf{x} \in \ker \Omega,\ \mathbf{x} = \mathbf{0}_E) \Longrightarrow \ker \Omega = \{\mathbf{0}_E\}$$

□

Conclusione 62. Il kernel di un isomorfismo $\Omega : E \to F$ è il sottospazio nullo (o "improprio") di E.

Teorema 63. Sia $\mathbb{K}$ un campo. Spazi vettoriali su $\mathbb{K}$ isomorfi sono isodimensionali.

Dimostrazione. Sia $\Omega : E \longmapsto F$ un isomorfismo. Consideriamo una generica base di E:

$$\{\mathbf{e}_i\},\ \ i = 1, 2, ..., n = \dim E$$

Quindi, preso ad arbitrio $\mathbf{x} \in E$:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i$$

Il risultato dell'applicazione dell'operatore lineare Ω sul vettore $\mathbf{x}$ è:

$$\Omega \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \Omega \mathbf{e}_i \tag{5.6}$$

Fissiamo l'attenzione sul sistema di vettori:

$$\{\Omega \mathbf{e}_1, \Omega \mathbf{e}_2, ..., \Omega \mathbf{e}_n\} \tag{5.7}$$

Per ipotesi Ω è un isomorfismo e per il teorema 61 deve essere $Ker\Omega = \{\mathbf{0}_E\}$, quindi:

$$\Omega \mathbf{x} = \mathbf{0}_F \Longrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}_E \Longrightarrow x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$$

Tenendo conto della (5.6):

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \left(\Omega \mathbf{e}_i\right) = \mathbf{0}_F \Longrightarrow x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$$

Cioè il sistema (5.7) è linearemente indipendente. Inoltre: Ω è un isomorfismo $\Longrightarrow \Omega\left(E\right) = F \Longrightarrow \forall \mathbf{y} \in F,\ \exists \mathbf{x} \in E \mid \mathbf{y} = \Omega \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\Omega \mathbf{e}_i\right) \Longrightarrow \{\Omega \mathbf{e}_i\}$ è una base di $F \Longrightarrow \dim F = n$. □

I teoremi 58 e 63 si riuniscono nell'unico teorema:

Teorema 64. Spazi vettoriali su un assegnato campo $\mathbb{K}$ sono isomorfi se e solo se sono isodimensionali.

5.3 Esercizi

1. Assegnata l'applicazione
$$\Omega : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^2 \tag{5.8}$$
tale che:
$$\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbf{x}' = (x, y) \in \mathbb{R}^2$$
Si dimostri che Ω è un omomorfismo ma non un isomorfismo. Si determini inoltre l'immagine, il kernel e la nullità di Ω.

2. Se $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$, con la notazione $C^n(a, b)$ si denota l'insieme delle funzioni continue in (a, b) e ivi derivabili fino all'ordine n. Come è noto, introducendo le operazioni:
$$\begin{aligned} + : C^n(a, b) \times C^n(a, b) &\longmapsto C^n(a, b) \\ \cdot : \mathbb{R} \times C^n(a, b) &\longmapsto C^n(a, b), \end{aligned}$$
l'insieme $C^n(a, b)$ assume la struttura algebrica di spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Ciò premesso, si consideri lo spazio vettoriale $C^\infty(a, b)$ e i cui vettori sono le funzioni reali di una variabile reale continue in (a, b) e ivi infinitamente derivabili. Si consideri l'applicazione:
$$D : C^\infty(a, b) \longmapsto C^\infty(a, b),$$
essendo D l'operatore di derivazione, per cui:
$$Df = \frac{d}{dx} f(x)$$
Provare che D è un omomorfismo suriettivo ma non iniettivo. Determinare poi l'immagine e il kernel di D.

3. Sia $\mathcal{P}_n[x]$ lo spazio vettoriale i cui vettori sono i polinomi di grado $\leq n$ (§ 27). Si consideri l'operatore di derivazione D dell'esercizio precedente. Applicando tale operatore ai vettori di $\mathcal{P}_n[x]$, determinare l'immagine e il kernel di D. Definire inoltre l'operatore di derivazione *n-ma* D^n, determinando il suo nucleo.

4. Si consideri l'applicazione:
$$\begin{aligned} \Omega : C^0(\mathbb{R}) &\longmapsto C^0(\mathbb{R}) \\ f(x) &\longmapsto \int_0^x f(\xi)\, d\xi \end{aligned} \tag{5.9}$$
Dimostrare la linearità di Ω, determinando poi la sua immagine e il suo nucleo.

5.3.1 Soluzioni

1. Risulta:

$$\begin{aligned}
&\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3,\ \Omega(\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}) \\
&\quad = \Omega(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z') \\
&\quad = (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y') \\
&\quad = \lambda (x, y) + \mu (x'.y') \\
&\quad = \lambda \Omega \mathbf{x} + \mu \Omega \mathbf{y},
\end{aligned}$$

donde il carattere omomorfo di Ω. Inoltre, tale applicazione è suriettiva, poichè:

$$\forall \mathbf{x}' = (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \exists \mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \Omega \mathbf{x} = \mathbf{x}'$$

Per il teorema (64) l'applicazione (5.8) non è un isomorfismo.

L'immagine di Ω è:

$$\begin{aligned}
\Omega(E) &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < x < +\infty,\ \ -\infty < y < +\infty\right\} \\
&= \text{piano cartesiano } xy
\end{aligned}$$

Il rango di Ω è:

$$R(\Omega) = 2$$

Per il kernel di Ω osserviamo che:

$$\left(\forall z \in (-\infty, +\infty),\ \ \mathbf{x} = (0, 0, z) \in \mathbb{R}^3\right) \Longrightarrow \Omega \mathbf{x} = (0, 0) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2},$$

quindi:

$$\begin{aligned}
Ker\Omega &= \left\{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -\infty < z < +\infty\right\} \\
&= \text{asse } z
\end{aligned}$$

La nullità di Ω è:

$$N(\Omega) = \dim Ker\Omega = 1$$

Si noti che risulta $R(\Omega) + N(\Omega) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$.

2. La linearità di D discende immediatamente dalle regole di derivazione della somma di due funzioni e del prodotto di uno costante per una funzione. Quindi:

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall f, g \in C^\infty(a, b),\ D(\lambda f + \mu g) = \lambda Df + \mu Dg,$$

donde D è un omorfismo. La suriettività è evidente:

$$\forall f \in C^\infty(a, b),\ \exists F(x) = \int f(x)\, dx \mid DF = f$$

Inoltre:

$$(\forall c \in \mathbb{R} - \{0\}\,,\ \forall f \in C^{\infty}(a,b)\,,\ g(x) = f(x) + c \neq f(x)) \Longrightarrow Df = Dg$$

Cioè:

$$f \neq g \nRightarrow Df \neq Dg,$$

per cui D non è suriettiva.

Il kernel di D è composto dalle funzioni costanti in $[a,b]$:

$$KerD = \{f(x) = \text{const}, \forall x \in [a,b]\}\,,$$

in quanto è tale che:

$$\frac{d}{dx} f(x) = 0$$

3. Consideriamo un generico elemento di $\mathcal{P}_n[x]$:

$$p_m(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_m x^m$$

Il risultato dell'applicazione dell'operatore D su $p_m(x)$ è:

$$Dp_m(x) = a_1 + 2a_2 x + ... + m a_m x^{m-1}$$

Quindi:

$$D : p_m(x) \longmapsto q_{m-1}(x)$$

Per $m = n$, si ottiene il polinomio di grado $n-1$, pertanto l'immagine di D è:

$$D(\mathcal{P}_n[x]) = \mathcal{P}_{n-1}[x]$$

Per definizione di kernel:

$$KerD = \{p_m(x) \in \mathcal{P}_n[x] \mid Dp_m(x) = \mathbf{0}\}\,,$$

cioè:

$$KerD = \{p_0\} \tag{5.10}$$

Si conclude che il kernel di D è composto dai polinomi di grado nullo.

L'operatore D^n è così definito:

$$\begin{aligned} D^n p_m(x) &= \frac{d^n}{dx^n} p_m(x) \\ &= \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx} ... \left(\frac{d}{dx} p_m(x)\right)\right) \end{aligned}$$

Per $m = n$:

$$\begin{aligned} Dp_n(x) &= a_1 + 2a_2 x + ... + n a_n x^{n-1} \\ D^2 p_n(x) &= 2a_2 + 6a_3 x + ... + n(n-1) x^{n-2} \\ &... \\ D^n p_n(x) &= n! a_n \end{aligned}$$

Per $m < n$:

$$D^n p_m\,(x) = \mathbf{0} \tag{5.11}$$

La (5.11) implica:

$$KerD^n = \{p_{m<n}\,(x)\}\,, \tag{5.12}$$

cioè il kernel di D^n è composto da tutti e soli i polinomi di grado strettamente minore di n. Si osservi che la (5.10) è un caso particolare della (5.12).

4. La linearità della (5.9) segue immediatamente dalle proprietà di additività e omogeneità dell'integrale definito di una funzione reale di variabile reale.

   Se indichiamo con $F\,(x)$ una primitiva di $f\,(x) \in C^0\,(\mathbb{R})$, deve essere:

$$\Omega f\,(x) = F\,(x) - F\,(0)\,,$$

   donde l'immagine di Ω:

$$\Omega\left(C^0\,(\mathbb{R})\right) = \left\{F\,(x) - F\,(0) \mid \frac{d}{dx}F\,(x) = f\,(x)\right\}$$

   Per definizione di kernel:

$$Ker\Omega = \left\{f\,(x) \in C^0\,(\mathbb{R}) \mid \Omega f\,(x) = \mathbf{0}_{C^0(\mathbb{R})}\right\},$$

   essendo $\mathbf{0}_{C^0(\mathbb{R})}$ il vettore nullo di $C^0\,(\mathbb{R})$, cioè la funzione identicamente nulla su $\mathbb{R}$. Dobbiamo perciò risolvere l'equazione operatoriale:

$$\Omega f\,(x) = \mathbf{0}_{C^0(\mathbb{R})},$$

   equivalente alla:

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \int_0^x f\,(\xi)\,d\xi = 0 \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\;\; F\,(x) = F\,(0) \Longleftrightarrow F\,(x) \equiv c \Longleftrightarrow f\,(x) \equiv 0$$

   Quindi:

$$Ker\Omega = \left\{\mathbf{0}_{C^0(\mathbb{R})}\right\}$$

5.4 Lo spazio vettoriale $Hom\,(E,F)$

Siano E, F due spazi vettoriali su $\mathbb{K}$. Poniamo per definizione:

$$Hom\,(E,F) \stackrel{def}{=} \{\Omega \mid \Omega \text{ omomorfismo tra } E \text{ e } F\} \tag{5.13}$$

In altri termini, $Hom\,(E,F)$ è la totalità delle applicazioni lineari tra i due spazi vettoriali E, F. Introduciamo l'operazione di addizione di omomorfismi:

$$\begin{gathered} + : Hom\,(E,F) \times Hom\,(E,F) \longmapsto Hom\,(E,F) \\ (\Omega_1, \Omega_2) \in Hom\,(E,F) \times Hom\,(E,F) \longmapsto (\Omega_1 + \Omega_2) \in Hom\,(E,F) \end{gathered} \tag{5.14}$$

La (5.14) è così definita:

$$\begin{aligned} \Omega_1 + \Omega_2 : E &\longmapsto F \\ \mathbf{v} \in E &\longmapsto \mathbf{v}' = (\Omega_1 + \Omega_2)\,\mathbf{v} \overset{def}{=} (\Omega_1 \mathbf{v} + \Omega_2 \mathbf{v}) \in F \end{aligned} \tag{5.15}$$

Verifichiamo che $(\Omega_1 + \Omega_2) \in Hom\,(E, F)$. Posto $\tilde{\Omega} = \Omega_1 + \Omega_2$, abbiamo:

$$\begin{aligned} \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in E,\ \ \tilde{\Omega}\,(\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}) &\overset{def}{=} \Omega_1\,(\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}) + \Omega_2\,(\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}) \\ &\overset{\Omega_k \in Hom(E,F)}{=} \alpha\Omega_1\mathbf{v} + \beta\Omega_1\mathbf{w} + \alpha\Omega_2\mathbf{v} + \beta\Omega_2\mathbf{w} \\ &= \alpha\,(\Omega_1 + \Omega_2)\,\mathbf{v} + \beta\,(\Omega_1 + \Omega_2)\,\mathbf{w} \\ &= \alpha\tilde{\Omega}\mathbf{v} + \beta\tilde{\Omega}\mathbf{w} \end{aligned}$$

Introduciamo ora l'operazione di moltiplicazione di uno scalare per un elemento di $Hom\,(E, F)$:

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times Hom\,(E, F) &\longmapsto Hom\,(E, F) \\ (\lambda, \Omega) \in \mathbb{K} \times Hom\,(E, F) &\longmapsto (\lambda\Omega) \in Hom\,(E, F) \end{aligned} \tag{5.16}$$

La (5.16) è così definita:

$$\begin{aligned} \lambda\Omega : E &\longmapsto F \\ \mathbf{v} \in E &\longmapsto \mathbf{v}' = (\lambda\Omega)\,\mathbf{v} \overset{def}{=} \lambda\,(\Omega\mathbf{v}) \in F \end{aligned} \tag{5.17}$$

Verifichiamo che $(\lambda\Omega) \in Hom\,(E, F)$. Posto $\Phi = \lambda\Omega$, abbiamo:

$$\begin{aligned} \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in E,\ \ \Phi\,(\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}) &\overset{def}{=} \lambda\Omega\,(\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}) \\ &\overset{\Omega \in Hom(E,F)}{=} \lambda\,(\alpha\Omega\mathbf{v} + \beta\Omega\mathbf{w}) \\ &= \alpha\lambda\Omega\mathbf{v} + \beta\lambda\Omega\mathbf{w} \\ &= \alpha\Phi\mathbf{v} + \beta\Phi\mathbf{w} \end{aligned}$$

È facile verificare che le operazioni (5.14)-(5.16) verificano le seguenti proprietà:

1. **Proprietà commutativa.**
   $\forall \Omega, \Lambda \in Hom\,(E, F),\ \ \Omega + \Lambda = \Lambda + \Omega$

2. **Proprietà associativa.**
   $\forall \Omega, \Lambda, \Phi \in Hom\,(E, F),\ \ \Omega + (\Lambda + \Phi) = (\Omega + \Lambda) + \Phi$

3. **Esistenza dell'elemento neutro.**
   $\exists \hat{O} \in Hom\,(E, F) \mid\ \ \Omega + \hat{O} = \Omega$
   Ricordiamo che l'omomorfismo nullo $\hat{O}$ è così definito: $\forall \mathbf{v} \in E,\ \ \hat{O}\mathbf{v} = \mathbf{0}_F$.

4. **Esistenza dell'opposto**
   $\forall \Omega \in Hom\,(E, F)\,, \exists\,(-\Omega) \in Hom\,(E, F) \mid -\Omega + \Omega = \hat{O}$
   L'opposto di Ω è così definito: $-\Omega : \mathbf{v} \in E \longmapsto (-\Omega\mathbf{v}) \in F$

I Proprietà distributiva rispetto alla somma di omomorfismi

$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall \Omega, \Lambda \in Hom\,(E, F),\ \alpha\,(\Omega + \Lambda) = \alpha\Omega + \alpha\Lambda$

II Proprietà distributiva rispetto alla somma in $\mathbb{K}$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall \Omega \in Hom\,(E, F),\ \ (\alpha + \beta)\,\Omega = \alpha\Omega + \beta\Omega$

III Proprietà associativa

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall \Omega \in Hom\,(E, F),\ \ \alpha\,(\beta\Omega) = (\alpha\beta)\,\Omega$

IV Esistenza dell'elemento neutro

$\exists 1 \in \mathbb{K} \mid \forall \Omega \in Hom\,(E, F),\ 1\Omega = \Omega$

Con l'introduzione delle operazioni (5.14)-(5.16), l'insieme $Hom\,(E, F)$ assume la struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Nel caso speciale in cui $E = F$, la generica applicazione lineare $\Omega : E \longmapsto F$ è un operatore lineare spesso denominato **endomorfismo** o **trasformazione lineare** di E. In tal caso l'insieme (5.13) si indica con il simbolo $End\,(E)$.

5.5 Matrice rappresentativa

Siano E e F due spazi vettoriali sul medesimo campo $\mathbb{K}$. Consideriamo due basi di E ed F rispettivamente:

$$\begin{aligned} &\{\mathbf{e}_i\}\,, \quad i = 1, 2, ..., n = \dim E \\ &\{\mathbf{f}_j\}\,, \quad j = 1, 2, ..., m = \dim F \end{aligned}$$

Se prendiamo arbitariamente un vettore $\mathbf{x} \in E$: $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i$, quindi $\Omega \in Hom\,(E, F) \Longrightarrow$ $\Omega\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \Omega \mathbf{e}_i$. Poniamo:

$$\mathbf{e}'_i = \Omega \mathbf{e}_i$$

Evidentemente $\mathbf{e}'_i \in F$, per cui essi si esprimono come combinazioni lineari della base $\{\mathbf{f}_j\}$:

$$\mathbf{e}'_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \mathbf{f}_j \tag{5.18}$$

Esplicitiamo la (5.18):

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= a_{11}\mathbf{f}_1 + a_{12}\mathbf{f}_2 + ... + a_{1m}\mathbf{f}_m \\ \mathbf{e}'_2 &= a_{21}\mathbf{f}_1 + a_{22}\mathbf{f}_2 + ... + a_{2m}\mathbf{f}_m \\ &... \\ \mathbf{e}'_n &= a_{n1}\mathbf{f}_1 + a_{n2}\mathbf{f}_2 + ... + a_{nm}\mathbf{f}_m \end{aligned} \tag{5.19}$$

Gli scalari a_{ij} compongono una matrice $n \times m$ la cui trasposta è:

$$A = (a_{ij})^T\,,$$

La matrice A si chiama *matrice rappresentativa dell'omomorfismo* Ω *relativamente alle basi* $\{\mathbf{e}_i\}$, $\{\mathbf{f}_j\}$. Scriviamo:

$$\Omega \doteq A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & ... & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & ... & a_{n2} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{1m} & a_{2m} & ... & a_{nm} \end{pmatrix} \tag{5.20}$$

Si noti che la colonna *i-esima* della matrice rappresentativa di Ω è composta dalle componenti del vettore trasformato $\Omega\mathbf{e}_i$ nella base $\{\mathbf{f}_j\}$.
Osserviamo che la notazione utilizzata per gli elementi di matrice della (5.20) genera confusione, giacché scambia gli indici di riga con gli indici di colonna. È conveniente ridefinire gli elementi di matrice scrivendo l'indice di riga in alto e quello di colonna in basso. Ad esempio, a_{21} diventa a^1_2. Si tratta, dunque, di eseguire la sostituzione di simboli:

$$a_{ji} \to a^i_j$$

Quindi:

$$A = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & ... & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & ... & a^2_n \\ ... & ... & ... & ... \\ a^m_1 & a^m_2 & ... & a^m_n \end{pmatrix} \tag{5.21}$$

In tal modo:

$$\Omega\mathbf{e}_j = \left(a^1_j, a^2_j, ..., a^m_j\right)$$

Cioè:

$$\Omega\mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^{m} a^i_j \mathbf{f}_i$$

Utilizzando la convenzione di Einstein:

$$\Omega\mathbf{e}_j = a^i_j \mathbf{f}_i$$

Nel caso speciale in cui $\Omega \in End\,(E)$, assumiamo $\{\mathbf{f}_i\} = \{\mathbf{e}_i\}$. La matrice (5.20) è la *matrice rappresentativa dell'endomorfismo* Ω *relativamente alla base* $\{\mathbf{e}_i\}$:

$$\Omega \doteq A = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & ... & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & ... & a^2_n \\ ... & ... & ... & ... \\ a^n_1 & a^n_2 & ... & a^n_n \end{pmatrix} \tag{5.22}$$

***

Per quanto detto, assegnato $\Omega \in Hom\,(E, F)$, risulta univocamente associata una matrice $A \in M_{\mathbb{K}}\,(m, n)$, essendo quest'ultimo lo spazio vettoriale delle matrici $m \times n$ sul campo $\mathbb{K}$. Quindi abbiamo l'applicazione lineare:

$$\begin{aligned} &L : Hom\,(E, F) \longrightarrow M_{\mathbb{K}}\,(m, n) \\ &\Omega \to A, \quad \forall\Omega \in Hom\,(E, F) \end{aligned} \tag{5.23}$$

Mostriamo che tale applicazione è un isomorfismo, cioè L è suriettiva e iniettiva. La prima proprietà deriva dall'implicazione:

$$A \in M_{\mathbb{K}}\,(m, n) \Longrightarrow \exists\Omega \in Hom\,(E, F) \mid \Omega \doteq A$$

Per dimostrare tale implicazione, prendiamo due basi $\{\mathbf{e}_i\}$, $\{\mathbf{f}_j\}$ di E e F rispettivamente. La matrice A è $m \times n$, quindi:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & ... & \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & ... & \alpha_n^2 \\ ... & ... & ... & ... \\ \alpha_1^m & \alpha_2^m & ... & \alpha_n^m \end{pmatrix},$$

con $\alpha_j^i \in \mathbb{K}$. Assumiamo la *j-esima* colonna della matrice A come componenti (nella base $\{\mathbf{f}_j\}$) del vettore $\Omega\mathbf{e}_j$. Cioè poniamo:

$$\Omega\mathbf{e}_j = \left(\alpha_j^1, \alpha_j^2, ..., \alpha_j^m\right), \quad j = 1, 2, ..., n \tag{5.24}$$

Per ogni vettore $\mathbf{x} \in E$, risulta: $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{e}_i$, quindi $\Omega\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\Omega\mathbf{e}_i$. Siccome $\Omega\mathbf{e}_i$ sono noti dalla (5.24), restano univocamente definite le componenti dei vettori trasformati dei vettori di E. Ciò equivale a definire univocamente l'applicazione lineare Ω. L'iniettività dell'applicazione (5.23) segue immediatamente dalla definizione di matrice rappresentativa e dall'esistenza e unicità delle componenti di un vettore in una base assegnata. Quindi posiamo scrivere:

$$\Omega \neq \Omega' \Longrightarrow A \neq A'$$

Si conclude che l'applicazione (5.23) è un isomorfismo.

Osservazione. L'isomorfismo L dipende dalla scelta delle due basi. Ciò si esprime dicendo che tale isomorfismo **non è canonico**, a differenza di un **isomorfismo canonico** (o **naturale**) che è indipendente dalla base.

I due spazi vettoriali $Hom\,(E, F)$, $M_{\mathbb{K}}\,(m, n)$ sono isomorfi, e per il teorema 64 sono isodimensionali:

$$\dim Hom\,(E, F) = \dim M_{\mathbb{K}}\,(m, n) = mn$$

Cioè:

$$\dim Hom\,(E, F) = \dim E \cdot \dim F$$

Nel caso speciale di $End\,(E)$ si ha che tale spazio è isomorfo a $M_{\mathbb{K}}\,(n, n)$, per cui:

$$\dim End\,(E) = (\dim E)^2$$

5.6 Relazioni tra le componenti dei vettori trasformati

Per applicare efficacemente la convenzione di Einstein, è preferibile ridefinire le componenti dei vettori (esclusi i vettori di una base) scrivendo gli indici in alto, anziché in basso:

$$\mathbf{x} = \left(x^1, x^2, ..., x^n\right)$$

Quindi:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x^i\mathbf{e}_i \equiv x^i\mathbf{e}_i$$

Inoltre se $\Omega \in Hom\,(E, F)$

$$\Omega\mathbf{x} = x^i a_i^j \mathbf{f}_j, \tag{5.25}$$

essendo $\{\mathbf{f}_j\}$ una base di F. Indichiamo con $\mathbf{y}$ il risultato dell'applicazione lineare Ω al vettore $\mathbf{x} \in E$:

$$\mathbf{y} = \Omega\mathbf{x} = \left(y^1, y^2, ..., y^m\right)$$

Cioè:

$$\mathbf{y} = y^i \mathbf{f}_i, \tag{5.26}$$

dove la sommatoria sugli indici ripetuti è estesa da 1 a m. Sostituendo la (5.26) nella (5.25) e ridifinendo l'indice della sommatoria:

$$\left(y^j - x^i a_i^j\right) \mathbf{f}_j = \mathbf{0}_F \underset{\{\mathbf{f}_j\} \text{ è lin. inip.}}{\Longrightarrow} y^j - x^i a_i^j = 0, \;\; j = 1, 2, ..., m$$

Cioè:

$$y^j = a_i^j x^i, \tag{5.27}$$

che esprime il prodotto righe per colonne della matrice rappresentativa (5.22) per il vettore colonna $\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ ... \\ x^n \end{pmatrix}$. Il risultato è il vettore colonna $\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ ... \\ y^m \end{pmatrix}$. Quindi poniamo:

$$Y = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ ... \\ y^m \end{pmatrix}, \;\; X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ ... \\ x^n \end{pmatrix} \tag{5.28}$$

Con tale notazione, la (5.27) si scrive:

$$Y = AX \tag{5.29}$$

Osserviamo che la (5.29) altro non è che la $\mathbf{y} = \Omega\mathbf{x}$ scritta in forma matriciale. Infatti all'applicazione lineare Ω corrisponde la matrice rappresentativa A nelle basi assegnate, e ai vettori $\mathbf{y} \in F, \mathbf{x} \in E$, i vettori colonna Y e X. L'equivalenza tra la relazione operatoriale $\mathbf{y} = \Omega\mathbf{x}$ e la relazione matriciale (5.29) è una conseguenza dell'isomorfismo degli spazi vettoriali $Hom\,(E, F)$ e $M_{\mathbb{K}}\,(m, n)$.

5.7 Sistemi di equazioni lineari. Applicazione di K^n in K^m

Consideriamo il sistema di equazioni lineari di m equazioni in n incognite:

$$\begin{cases} a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + ... + a_n^1 x^n = y^1 \\ a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + ... + a_n^2 x^n = y^2 \\ \qquad ... \\ a_1^m x^1 + a_2^m x^2 + ... + a_n^m x^n = y^m \end{cases} \tag{5.30}$$

dove i coefficienti a_j^i e i termini noti y^i appartengono a un campo K; per ipotesi le incognite x^i appartengono al medesimo campo K.
Se indichiamo con $A = \left(a_j^i\right)$ la matrice dei coefficienti (detta anche matrice incompleta), con le posizioni (5.28) il sistema si scrive in forma matriciale:

$$Y = AX \tag{5.31}$$

Ciò premesso, ricordiamo che i problemi fondamentali della teoria dei sistemi di equazioni lineari sono:

1. Compatibilità del sistema
2. Numero delle soluzioni linearmente indipendenti

Tali problemi possono essere interpretati in termini di nullità e rango di un omomorfismo. Infatti, la matrice dei coefficienti è la matrice rappresentativa dell'omomorfismo:

$$\begin{aligned} &\Omega : K^n \longrightarrow K^m \\ &\mathbf{x} \to \mathbf{y}, \ \ \forall \mathbf{x} \in K^n \end{aligned}$$

relativamente alle basi canoniche di K^n e K^m.
Pertanto:

$$\Omega \mathbf{x} = \mathbf{y},$$

essendo $\mathbf{x} = (x^1, x^2, ..., x^n)$, $\mathbf{y} = (y^1, y^2, ..., y^m)$.
Indichiamo con A_1 la matrice dei coefficienti e dei termini noti (detta anche matrice completa), cioè la matrice $m \times (n+1)$ ottenuta aggiungendo la colonna Y alla matrice A.
Utilizzando il formalismo degli omomorfismi, dimostriamo il

Teorema (di Rouche'-Capelli) 65.

$$\text{Il sistema è compatibile} \Longleftrightarrow \rho(A) = \rho(A_1),$$

essendo $\rho(A)$ il rango della matrice A.

Dimostrazione. **Implicazione diretta**. Innanzitutto dimostriamo:

$$\text{Il sistema è compatibile} \Longleftrightarrow \mathbf{y} \in \Omega(K^n)$$

essendo $\Omega(K^n)$ l'immagine dell'applicazione Ω, spesso indicata con il simbolo $\operatorname{Im}\Omega$:

$$\operatorname{Im}\Omega = \{\mathbf{z} \in K^m \mid \Omega\mathbf{x} = \mathbf{z}\} \tag{5.32}$$

Consideriamo la base canonica di K^n:

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, ..., 0), \ \mathbf{e}_2 = (0, 1, ..., 0), \ ..., \mathbf{e}_n = (0, 0, ..., 1)$$

Nella base $\{\mathbf{f}_j\}$ di K^m i vettori trasformati $\Omega\mathbf{e}_i$ hanno componenti:

$$\Omega\mathbf{e}_i = \left(a_i^1, a_i^2, ..., a_i^m\right) \in K^m$$

Cioè:

$$\Omega\mathbf{e}_i = a_i^j \mathbf{f}_j$$

Dal sistema di vettori $\{\Omega\mathbf{e}_i\}$ estraiamo un sistema di ordine massimo $\{\mathbf{e}_i'\}$ con $i = 1, 2, ..., r \leq n$. Ciò equivale ad estrarre $r \leq n$ colonne indipendenti dalla matrice A. Ricordiamo che $\Omega(K^n)$ è un sottospazio vettoriale di K^m, e la sua dimensione è il rango dell'applicazione Ω, cioè:

$$R(\Omega) = \dim \Omega(K^n) = r, \tag{5.33}$$

giacchè $\{\mathbf{e}'_i\}$ è una base di $\Omega(K^n)$. Abbiamo:

$$\begin{aligned}
\text{il sistema è compatibile)} &\Longleftrightarrow \exists X \mid AX = Y \\
&\Longleftrightarrow \exists \mathbf{x} \in K^n \mid \Omega\mathbf{x} = \mathbf{y} \\
&\Longleftrightarrow \mathbf{y} \in \Omega(K^n) \\
&\Longrightarrow \exists b^i \in K \mid \mathbf{y} = b^i \mathbf{e}'_i \quad (i = 1, ..., r) \\
&\Longrightarrow \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ ... \\ y^m \end{pmatrix} = \sum_{i_k=1}^{r} b^{i_k} \begin{pmatrix} a^1_{i_k} \\ a^2_{i_k} \\ ... \\ a^m_{i_k} \end{pmatrix} \\
&\Longrightarrow \rho(A_1) = \rho(A)
\end{aligned}$$

In altre parole, abbiamo prima dimostrato che la compatibilità del sistema è equivalente a $\mathbf{y} \in \Omega(K^n)$, dopodiché abbiamo dimostrato che tale appartenenza implica che il vettore colonna Y della matrice A_1 è combinazione lineare di r colonne linearmente indipendenti della matrice A, e ciò implica che le due matrici hanno lo stesso rango.

Implicazione inversa

Abbiamo:

$$\begin{aligned}
\rho(A) = \rho(A_1) \Longrightarrow \exists \lambda^{i_k} \in K \mid \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ ... \\ y^m \end{pmatrix} &= \sum_{i_k=1}^{\rho(A)} \lambda^{i_k} \begin{pmatrix} a^1_{i_k} \\ a^2_{i_k} \\ ... \\ a^m_{i_k} \end{pmatrix} \\
\Longrightarrow \mathbf{y} = \lambda^i \mathbf{e}'_i \quad (i = 1, 2, ..., \rho(A)) &\Longrightarrow \mathbf{y} \in \Omega(K^n),
\end{aligned}$$

da cui la compatibilità del sistema. □

Casi particolari:

1. $\rho(A) = m$
2. $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ (sistema omogeneo)

In entrambi i casi il sistema è compatibile. Innanzitutto osserviamo che nel caso 1 il numero delle incognite è maggiore o uguale del numero di equazioni, giacché $\rho(A) \leq \min\{m, n\}$. Infatti:

$$\begin{aligned}
\rho(A) = m &\underset{\rho(A) \leq \min\{m,n\}}{\Longrightarrow} n \geq m \\
n < m &\Longrightarrow \rho(A) \leq \min\{m, n\} \leq n < m
\end{aligned}$$

Inoltre, $R(\Omega) = m$, essendo $R(\Omega)$ il rango di Ω (eq. (5.33)). Quindi:

$$\dim \Omega(K^n) = m$$

Cioè l'omomorfismo Ω è suriettivo:

$$\Omega(K^n) = K^m \Longrightarrow \forall \mathbf{y} \in K^m, \mathbf{y} \in \Omega(K^n),$$

da cui la compatibilità del sistema.

Nel caso 2, si ha $AX = 0$ per $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$, che è la soluzione banale (o *impropria*)

Passiamo al problema 2 (cioè il numero di soluzioni linearmente indipendenti). Consideriamo prima il caso omogeneo, dimostrando la

Proposizione. Le soluzioni di un sistema omogeneo costituiscono uno spazio vettoriale di dimensione $n - \rho(A)$.

Dimostrazione. Abbiamo

$$AX = 0 \Longleftrightarrow \Omega\mathbf{x} = \mathbf{0} \Longrightarrow \mathbf{x} \in Ker\Omega$$

Ricordiamo infatti che il kernel è:

$$Ker\Omega = \{\mathbf{x} \in K^n \mid \Omega\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

Per la (5.5):

$$R(\Omega) + N(\Omega) = n,$$

cioè la nullità di Ω è:

$$N(\Omega) = n - \rho(A),$$

giacchè $R(\Omega) = \rho(A)$.

$$\rho(A) < n \Longrightarrow N(\Omega) > 0$$

Sia $\{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_{N(\Omega)}\}$ una base di $Ker\Omega$. Evidentemente:

$$\Omega\mathbf{u}_i = \mathbf{0} \quad \text{per } i = 1, ..., N(\Omega)$$

Ai vettori $\mathbf{u}_i$ corrispondono $N(\Omega)$ vettori colonna linearmente indipendenti $X_1, X_2, ..., X_{N(\Omega)}$ che sono soluzioni non nulle del sistema:

$$AX_i = 0, \quad \text{per } i = 1, ..., N(\Omega)$$

Si conclude che le soluzioni del sistema costituiscono uno spazio vettoriale $N(\Omega)$-*dimensionale*, che è appunto il kernel di Ω. □

Dalla proposizione appena dimostrata segue:

$$\forall c_i \in K, \;\; X = \sum_{i=1}^{N(\Omega)} c_i X_i \Longrightarrow AX = \sum_{i=1}^{N(\Omega)} c_i A X_i = 0$$

Cioè, ogni combinazione lineare dei vettori colonna $X_1, X_2, ..., X_{N(\Omega)}$ è ancora soluzione del sistema. Ciò equivale a dire che il sistema ammette $\infty^{N(\Omega)}$ soluzioni proprie, ovvero non banali, dette anche **autosoluzioni** del sistema.
Ponendo $p = \varrho(A)$ (rango del sistema), si conclude che se $p < n$, il sistema ammette ∞^{n-p} autosoluzioni. Se $p = n$ si ha $N(\Omega) = 0$, per cui $Ker\Omega = \{\mathbf{0}\}$, cioè $\Omega\mathbf{x} = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$. Quindi il sistema ammette solo la soluzione banale.
Consideriamo ora il caso non omogeneo. Ci proponiamo quindi di esprimere la soluzione generale del sistema (5.30).

Teorema 66. La soluzione generale del sistema (5.30) è data dalla somma di una qualunque soluzione del sistema (5.30) e della soluzione generale del sistema omogeneo associato.

Dimostrazione. Indichiamo con S l'insieme delle soluzioni del sistema (5.30). Abbiamo:

$$\begin{aligned}&\forall \mathbf{v} \in S,\ \forall \mathbf{v}' \in Ker\Omega,\ \ \mathbf{x} \overset{def}{=} \mathbf{v} + \mathbf{v}' \\ &\Omega\mathbf{x} = \Omega\mathbf{v} + \Omega\mathbf{v}'\end{aligned}$$

Risulta:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \in S &\Longrightarrow \Omega\mathbf{v} = \mathbf{y} \\ \mathbf{v}' \in Ker\Omega &\Longrightarrow \Omega\mathbf{v}' = \mathbf{0}\end{aligned}$$

Quindi:

$$\Omega\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

Cioè $\mathbf{x} = \mathbf{v} + \mathbf{v}'$ è soluzione del sistema (5.30). Viceversa, se $\mathbf{w}$,$\mathbf{v} \in S$ si ha $\Omega(\mathbf{w} - \mathbf{v}) = \mathbf{y} - \mathbf{y} = \mathbf{0} \Longrightarrow \mathbf{w} - \mathbf{v} \overset{def}{=} \mathbf{v}' \in Ker\Omega$. Cioè due soluzioni arbitarie del sistema (5.30) differiscono per una soluzione del sistema omogeneo associato. □

Si conclude che la soluzione generale del sistema (5.30) si può scrivere come:

$$\mathbf{x} \overset{def}{=} \mathbf{v} + \mathbf{v}' = \mathbf{v} + \sum_{k=1}^{n-p} c_k \mathbf{u}_k,$$

dove $\{\mathbf{u}_k\}$ è una base di $Ker\Omega$, mentre c_k sono scalari arbitrari.

5.8 Prodotto di endomorfismi

Siano $\Omega, \Phi \in End(E)$. Dicesi **prodotto dell'endomorfismo Ω per l'endomorfismo Φ**, l'endomorfismo $\Psi = \Phi \circ \Omega$ così definito:

$$\forall \mathbf{v} \in E,\ \Psi\mathbf{v} = \Phi(\Omega\mathbf{v})$$

È facile mostrare che $\Psi \in End(E)$. Infatti:

$$\begin{aligned}\forall \lambda, \mu \in K,\ \ \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in E,\ \Psi(\lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w}) &\overset{def}{=} \Phi(\Omega(\lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w})) \\ &\overset{\Omega \in End(E)}{=} \Phi(\lambda\Omega\mathbf{v} + \mu\Omega\mathbf{w}) \\ &\overset{\Phi \in End(E)}{=} \lambda\Phi(\Omega\mathbf{v}) + \mu\Phi(\Omega\mathbf{w}) \\ &\overset{def}{=} \lambda\Psi\mathbf{v} + \mu\Psi\mathbf{w}\end{aligned}$$

Proposizione. Se A e B sono le matrici rappresentative di Ω e Φ relativamente alla base $\{\mathbf{e}_i\}$, la matrice rappresentativa di $\Phi \circ \Omega$ relativamente alla medesima base è $A \cdot B$, dove $\cdot$ denota il prodotto righe per colonne.

Dimostrazione. Nella base $\{\mathbf{e}_i\}$:

$$\Phi \doteq A = \left(a^i_j\right), \quad \Omega \doteq B = \left(b^i_j\right) \quad i,j = 1,2,...,n = \dim E$$

Quindi:

$$\forall \mathbf{x} \in E,\ \Omega\mathbf{x} = \Omega x^j \mathbf{e}_j = x^j \Omega \mathbf{e}_j = x^j b^i_j \mathbf{e}_j$$

Da ciò segue:

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{x} \in E,\ \Psi\mathbf{x} &= \Phi\left(\Omega\mathbf{x}\right) = \Phi\left(x^j b^i_j \mathbf{e}_i\right) \\ &= x^j b^i_j \Phi\mathbf{e}_i = x^j b^i_j a^k_i \mathbf{e}_k, \end{aligned}$$

poichè $\Phi\mathbf{e}_j = a^k_i \mathbf{e}_k$. Quindi:

$$\forall \mathbf{x} \in E,\ \Psi\mathbf{x} = x^j c^k_j \mathbf{e}_k,$$

dove:

$$c^k_j \overset{def}{=}{}^j\ a^k_i b^i_j,$$

per cui:

$$\Psi \doteq C \overset{def}{=} (c_{kj}) = A \cdot B$$

□

Definizione. L'operatore $\Omega \in End\,(E)$ è ***nilpotente***, se risulta: $\Omega^2 = \Omega \circ \Omega = \hat{0}$, essendo $\hat{0}$ l'operatore nullo.
Più in generale, se $\exists p \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\} \mid \Omega^p = \hat{0}$, diremo che Ω è ***nilpotente con indice di nilpotenza*** p.

Definizione. L'operatore $\Omega \in End\,(E)$ è ***idempotente***, se risulta: $\Omega^2 = \Omega$.

Ad esempio, gli operatori:

$$\Omega \doteq \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ 3 & -6 \end{pmatrix};\ \Lambda \doteq \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 15 & -5 \end{pmatrix}$$

Sono rispettivamente nilpotente e idempotente:

$$\begin{aligned} \Omega^2 &\doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \Omega^2 = \hat{0} \\ \Lambda^2 &\doteq \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 15 & -5 \end{pmatrix} \Longrightarrow \Lambda^2 = \Lambda \end{aligned}$$

Esempi.
Consideriamo l'operatore lineare:

$$\begin{aligned} \Omega : \mathbb{R}^2 &\longmapsto \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\longmapsto (x+y, y) \end{aligned} \tag{5.34}$$

Costruiamo la matrice rappresentativa di (5.34) relativamente alle basi:

$$\{\mathbf{e}_1 = (1,0)\,, \mathbf{e}_2 = (0,1)\}$$
$$\{\mathbf{f}_1 = (2,1)\,, \mathbf{f}_2 = (1,2)\}$$

A tale scopo prendiamo ad arbitrio $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, donde nella base $\{\mathbf{e}_i\}$:

$$\mathbf{x} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$$

Il risultato dell'applicazione di Ω su $\mathbf{x}$ è:

$$\Omega\mathbf{x} = x\Omega\mathbf{e}_1 + y\Omega\mathbf{e}_2$$

Risulta:

$$\Omega\mathbf{e}_1 = (1,0) = \mathbf{e}_1 \Longrightarrow \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1$$
$$\Omega\mathbf{e}_2 = (0,1) = (1,1) \Longrightarrow \mathbf{e}_2' = (1,1)$$

Esprimiamo $\mathbf{e}_1'$ come combinazione lineare di $\{\mathbf{f}_i\}$:

$$a_{11}\,(2,1) + a_{12}\,(1,2) = (1,0)$$

equivalente al sistema lineare:

$$2a_{11} + a_{12} = 1$$
$$a_{11} + 2a_{12} = 0,$$

la cui soluzione è:

$$a_{11} = \frac{2}{3}, a_{12} = -\frac{1}{3}$$

Esprimiamo $\mathbf{e}_2'$ come combinazione lineare di $\{\mathbf{f}_i\}$:

$$a_{21}\,(2,1) + a_{22}\,(1,2) = (1,1)$$

equivalente al sistema lineare:

$$2a_{21} + a_{22} = 1$$
$$a_{21} + 2a_{22} = 1,$$

la cui soluzione è:

$$a_{21} = \frac{1}{3}, a_{22} = \frac{1}{3}$$

Quindi:

$$\Omega \doteq \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

***

Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathcal{P}_n[x]$ dei polinomi di grado $\leq n$, quindi l'operatore di derivazione $D \equiv \frac{d}{dx}$:

$$D : \mathcal{P}_n[x] \longmapsto \mathcal{P}_{n-1}[x]$$
$$p_m(x) \longmapsto \frac{d}{dx} p_m(x)$$

Determiniamo la matrice rappresentativa di D relativamente alle basi:

$$\{e_i(x)\}, \quad (i = 1, 2, ..., n)$$
$$\{f_j(x)\}, \quad (j = 1, 2, ..., n-1)$$

essendo:

$$\begin{aligned} e_0(x) &= 1 \\ e_1(x) &= x \\ e_2(x) &= x^2 \\ &... \\ e_n(x) &= x^n \end{aligned}$$

mentre $\{f_j(x)\}$ è una base dello spazio $\mathcal{P}_{n-1}[x]$:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= 1 \\ f_1(x) &= x \\ f_2(x) &= x^2 \\ &... \\ f_{n-1}(x) &= x^{n-1} \end{aligned}$$

A tale scopo determiniamo i vettori $e_i'(x) = De_i(x)$. Risulta:

$$\begin{aligned} e_0'(x) &= De_0(x) = 0 \\ e_1'(x) &= De_1(x) = 1 \\ e_3'(x) &= De_2(x) = 2x \\ &... \\ e_n'(x) &= De_n(x) = nx^{n-1} \end{aligned}$$

Scriviamo i vettori $e_i'(x)$ come combinazione lineare dei vettori della base $\{f_i(x)\}$:

$$\begin{aligned} e_0'(x) &= 0 \cdot f_0(x) + 0 \cdot f_1(x) + 0 \cdot f_2(x) + ... + 0 \cdot f_{n-1}(x) \\ e_1'(x) &= 1 \cdot f_0(x) + 0 \cdot f_1(x) + 0 \cdot f_2(x) + ... + 0 \cdot f_{n-1}(x) \\ e_2'(x) &= 0 \cdot f_0(x) + 2 \cdot f_1(x) + 0 \cdot f_2(x) + ... + 0 \cdot f_{n-1}(x) \\ e_3'(x) &= 0 \cdot f_0(x) + 0 \cdot f_1(x) + 3 \cdot f_2(x) + ... + 0 \cdot f_{n-1}(x) \\ &... \\ e_n'(x) &= 0 \cdot f_0(x) + 0 \cdot f_1(x) + 0 \cdot f_2(x) + ... + n \cdot f_{n-1}(x), \end{aligned}$$

da cui la matrice rappresentativa:

$$D \doteq \underbrace{\left.\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n \end{pmatrix}\right\} n \text{ righe}}_{n+1 \text{ colonne}}$$

5.9 Endomorfismo inverso

Definizione. Se $\hat{A} \in End(E)$, diremo che esso è ***invertibile*** se esiste $\hat{A}^{-1} \in End(E)$ denomoninato ***inverso dell'operatore*** $\hat{A}$ tale che:

$$\hat{A}\hat{A}^{-1} = \hat{A}^{-1}\hat{A} = \hat{1}$$

Un endomorfismo invertibile è spesso denominato **automorfismo.**

Proposizione.

$$\begin{pmatrix} \hat{A} \in End(E) \\ \text{è invertibile} \end{pmatrix} \Longleftrightarrow (A \text{ è non singolare})$$

Dimostrazione. In una base assegnata, indichiamo con $\tilde{A}$ la matrice rappresentativa di $\hat{A}^{-1}$. Deve essere:

$$\hat{A}\tilde{A} = \tilde{A}\hat{A} = \overline{I}_n \tag{5.35}$$

Dall'algebra delle matrici segue che la (5.35) è vera se e solo se $\tilde{A} = \hat{A}^{-1}$. □

5.9.1 Esercizi

1. Determinare la matrice rappresentativa dell'operatore omotetia (es. 57)

2. Assegnata l'applicazione:

$$\Omega : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^3$$
$$(x, y) \longmapsto (x - y, x + y, x),$$

mostrare che $\Omega \in Hom(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, determinando poi la sua matrice rappresentativa relativamente alle basi:

$$\{\mathbf{e}_1 = (1, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1)\}$$
$$\{\mathbf{f}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{f}_2 = (0, 1, 0), \mathbf{f}_3 = (0, 0, 1)\}$$

3. Sia E uno spazio vettoriale su K con $\dim E = 3$. Si consideri l'operatore lineare $\Omega : E \longmapsto E$ tale che la sua applicazione sulla base $\{\mathbf{e}_i\}$ è:

$$\mathbf{e}_i \longmapsto \begin{cases} \mathbf{e}_{i-1}, & \text{se } i > 1 \\ \mathbf{0}, & \text{se } i = 1 \end{cases} \tag{5.36}$$

Determinare: a) il risultato dell'applicazione di Ω su un qualunque vettore di E; b) la matrice rappresentativa di Ω nella base $\{\mathbf{e}_i\}$.

4. Si determini la nullità del seguente operatore lineare:

$$\begin{aligned} \Omega : \mathbb{R}^2 &\longmapsto \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (2x - 4y, -x + 2y) \end{aligned}$$

5.9.1.1 Soluzioni

1. Abbiamo:

$$\begin{aligned} \Omega : E &\longmapsto E \\ \mathbf{v} &\longmapsto \lambda \mathbf{v} \end{aligned}$$

essendo $\lambda \in K - \{0\}$ il rapporto di omotetia. Consideriamo una base di E:

$$\{\mathbf{e}_i\}, \, i = 1, 2, ..., n = \dim E \tag{5.37}$$

Applichiamo Ω ai vettori di base:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1' = \lambda \mathbf{e}_1 &= \lambda \mathbf{e}_1 + 0 \cdot \mathbf{e}_2 + ... + 0 \cdot \mathbf{e}_n \\ \mathbf{e}_2' = \lambda \mathbf{e}_2 &= 0 \cdot \mathbf{e}_1 + \lambda \cdot \mathbf{e}_2 + ... + 0 \cdot \mathbf{e}_n \\ &... \\ \mathbf{e}_n' = \lambda \mathbf{e}_n &= 0 \cdot \mathbf{e}_1 + 0 \cdot \mathbf{e}_2 + ... + \lambda \cdot \mathbf{e}_n \end{aligned}$$

Quindi la matrice rappresentativa di Ω è la matrice diagonale:

$$\Omega \doteq \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Ciò si esprime dicendo che Ω *è diagonale* nella base (5.37).

Nel caso speciale $\lambda = 1$, l'operatore omotetia si identifica con l'operatore identità: $\hat{1} : \mathbf{v} \longmapsto \mathbf{v}$, la cui matrice rappresentativa è la matrice identità di ordine n:

$$\hat{1} \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.38}$$

2. Iniziamo a dimostrare la linearità.

$$\begin{aligned} \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall \mathbf{w} = (x', y') \in \mathbb{R}^2, \mathbf{u} &= \lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{w} = (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y') \\ \Omega \mathbf{u} &= (\lambda x + \mu x' - \lambda y - \mu y', \lambda x + \mu x' + \lambda y + \mu y', \lambda x + \mu x') \\ &= (\lambda (x - y) + \mu (x' - y'), \lambda (x + y) + \mu (x' + y'), \lambda x + \mu x') \\ &= \lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{w} \Longrightarrow \Omega \in Hom\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3\right) \end{aligned}$$

Determiniamo ora il risultato dell'applicazione di Ω sui vettori di base:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1' &= \Omega\mathbf{e}_1 = (1,1,1)\\ \mathbf{e}_2' &= \Omega\mathbf{e}_2 = (-1,1,0)\end{aligned}$$

Quindi esprimiamo tali vettori nella base $\{\mathbf{f}_j\}$

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1' &= 1\cdot\mathbf{f}_1 + 1\cdot\mathbf{f}_2 + 1\cdot\mathbf{f}_3\\ \mathbf{e}_2' &= -1\cdot\mathbf{f}_1 + 1\cdot\mathbf{f}_2 + 0\cdot\mathbf{f}_3\end{aligned}$$

da cui la matrice rappresentativa:

$$\Omega \doteq \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Sia $\mathbf{x} \in E$:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{3} x_i\mathbf{e}_i$$

Applichiamo Ω:

$$\begin{aligned}\Omega\mathbf{x} &= \sum_{i=1}^{3} x_i\Omega\mathbf{e}_i\\ &= x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3,\end{aligned}$$

donde:

$$\Omega : \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \longmapsto \mathbf{x}' = (x_2, x_3, 0) \tag{5.39}$$

Per determinare la matrice rappresentativa, esplicitiamo le (5.36):

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1' &= \Omega\mathbf{e}_1 = \mathbf{0} = 0\cdot\mathbf{e}_1 + 0\cdot\mathbf{e}_2 + 0\cdot\mathbf{e}_3\\ \mathbf{e}_2' &= \Omega\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 = 1\cdot\mathbf{e}_1 + 0\cdot\mathbf{e}_2 + 0\cdot\mathbf{e}_3\\ \mathbf{e}_3' &= \Omega\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 = 0\cdot\mathbf{e}_1 + 1\cdot\mathbf{e}_2 + 0\cdot\mathbf{e}_3,\end{aligned}$$

per cui:

$$\Omega \doteq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si osservi che al risultato (5.39) si perviene attraverso la moltiplicazione righe x colonne delle matrici rappresentative di Ω e $\mathbf{x}$ rispettivamente:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.40}$$

4. Come è noto:
$$N(\Omega) = \dim Ker(\Omega)$$
Determiniamo il kernel dell'operatore:
$$\begin{aligned} Ker\Omega &= \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \Omega\mathbf{x} = \mathbf{0}\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (2x-4y, -x+2y) = (0,0)\right\} \end{aligned}$$
Gli elementi di $Ker\Omega$ sono i vettori $\mathbf{x} = (x,y)$ le cui componenti sono soluzioni del sistema di equazioni lineari:
$$\begin{aligned} 2x - 4y &= 0 \\ -x + 2y &= 0, \end{aligned} \tag{5.41}$$
equivalente all'equazione lineare omogenea:
$$x - 2y = 0,$$
per cui il sistema (3.23) ammette ∞^1 autosoluzioni:
$$(x,y) = (2y, y)$$
Quindi il kernel di Ω è:
$$Ker\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 2y, \ -\infty < y < +\infty\right\}$$
La nullità:
$$N(\Omega) = 1$$

5.10 Autovalori e autovettori di un endomorfismo

5.10.1 Definizioni

Da qui in poi indichiamo con un simbolo del tipo $\hat{X}$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale e con X la matrice rappresentativa relativamente ad una base assegnata. Ciò premesso, sia $\hat{A} \in End(E)$:
$$\begin{aligned} &\hat{A} : E \longmapsto E \\ &\mathbf{v} \in E \longmapsto \mathbf{v}' \in E \end{aligned}$$
In generale il vettore $\mathbf{v}'$ - risultato dell'applicazione dell'operatore $\hat{A}$ sul vettore $\mathbf{v}$ - non è proporzionale a $\mathbf{v}$. Ci si può chiedere se esistono vettori che verifichino tale proprietà. Più precisamente, sussiste la seguente definizione:

Definizione. Il vettore $\mathbf{v} \in E \setminus \{\mathbf{0}\}$ dicesi ***autovettore*** dell'operatore $\hat{A}$ se esiste uno scalare $\lambda \in K$ tale che:
$$\hat{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$
Lo scalare λ si chiama ***autovalore*** di $\hat{A}$, e diremo che $\mathbf{v}$ è un autovettore appartenente (o associato) all'autovalore λ.

Si osservi che se $\mathbf{v}$ è autovettore di $\hat{A}$ con autovalore λ, per ogni $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$:

$$\hat{A}(\alpha\mathbf{v}) = \alpha\hat{A}\mathbf{v} = \lambda(\alpha\mathbf{v}), \tag{5.42}$$

cioè $\alpha\mathbf{v}$ è ancora autovettore di $\hat{A}$ con autovalore λ. Sia $V[\mathbf{v}]$ il sottospazio vettoriale di E generato da $\mathbf{v}$:

$$V[\mathbf{v}] = \left\{(\alpha\mathbf{v}) \in E \mid \alpha \in \mathbb{K},\ \ \hat{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}\right\} \tag{5.43}$$

Chiamiamo (5.43) **sottospazio invariante** per l'operatore $\hat{A}$.

Osservazione. $V[\mathbf{v}]$ contiene il vettore nullo (in quanto sottospazio vettoriale) corrispondente a $\alpha = 0$.

Assegnato $\lambda \in \mathbb{K}$, consideriamo l'insieme:

$$E_0(\lambda) \overset{def}{=} \left\{\mathbf{v} \in E \setminus \{\mathbf{0}\} \mid \hat{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}\right\} \tag{5.44}$$

In altri termini consideriamo la totalità dei vettori di E che sono autovettori di $\hat{A}$ appartenenti al medesimo autovalore λ.

Proposizione. $E(\lambda) = E_0(\lambda) \cup \{\mathbf{0}\}$ è un sottospazio di E.

Dimostrazione. $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in E(\lambda)$:

$$\begin{aligned} \hat{A}(\mathbf{v}+\mathbf{w}) &\overset{\hat{A}\in End(E)}{=} \hat{A}\mathbf{v} + \hat{A}\mathbf{w} \\ &= \lambda(\mathbf{v}+\mathbf{w}) \Longrightarrow (\mathbf{v}+\mathbf{w}) \in E(\lambda) \end{aligned}$$

$\forall \alpha \in K$, $\forall \mathbf{v} \in E(\lambda)$, per la (5.42) il vettore $(\alpha\mathbf{v}) \in E(\lambda)$. □

Definizione. Il sottospazio vettoriale $E(\lambda)$ dicesi ***autospazio*** di $\hat{A}$ associato all'autovalore λ.

Teorema 67. Autovettori appartenenti ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione. Sia $\hat{A} \in End(E)$ tale che:

$$\begin{aligned} \hat{A}\mathbf{v}_k = \lambda_k\mathbf{v}_k,\ \ k = 1, 2, ..., n \\ \lambda_k \neq \lambda_{k'},\ k, k' \in \underset{k\neq k'}{\{1, 2, ..., n\}} \end{aligned} \tag{5.45}$$

Si osservi che nel caso speciale $n = 1$, l'asserto è banalmente vero:

$$\hat{A}\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1$$

Per definizione di autovettore deve essere $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ e come tale $\{\mathbf{v}_1\}$ è linearmente indipendente. Per dimostrare l'asserto per ogni n, procediamo per induzione:

$$\begin{pmatrix} \text{la proposizione è vera} \\ \text{per } r = n-1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} \text{la proposizione è vera} \\ \text{per } r = n \end{pmatrix} \tag{5.46}$$

Per dimostrare l'implicazione induttiva (5.46) procediamo per assurdo. La negazione della tesi è:

$$\begin{pmatrix} \text{la proposizione è falsa} \\ \text{per } r = n \end{pmatrix},$$

ovvero:

$$\begin{pmatrix} \text{il sistema } \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\} \\ \text{è linearmente dipendente} \end{pmatrix}$$

Quindi:

$$\exists\,(a_1, a_2, ..., a_n) \neq (0, 0, ..., 0) \mid a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + ... + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \tag{5.47}$$

Senza perdita di generalità supponiamo che:

$$a_1 \neq 0 \tag{5.48}$$

Applichiamo l'operatore $\hat{A}$ ad ambo i membri della combinazione lineare (5.47), ricordando che il sottospazio improprio è invariante rispetto all'azione di un qualunque operatore lineare:

$$\hat{A}\,(a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + ... + a_n\mathbf{v}_n) = \mathbf{0}$$

Per la (5.45):

$$a_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + a_2\lambda_2\mathbf{v}_2 + ... + a_n\lambda_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \tag{5.49}$$

Moltiplichiamo la (5.47) per λ_n, per poi scrivere il sistema di equazioni:

$$\begin{aligned} a_1\lambda_n\mathbf{v}_1 + a_2\lambda_n\mathbf{v}_2 + ... + a_n\lambda_n\mathbf{v}_n &= \mathbf{0} \\ a_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + a_2\lambda_2\mathbf{v}_2 + ... + a_n\lambda_n\mathbf{v}_n &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Sottraendo membro a membro:

$$a_1\,(\lambda_1 - \lambda_n)\,\mathbf{v}_1 + a_2\,(\lambda_2 - \lambda_n)\,\mathbf{v}_2 + ... + a_{n-1}\,(\lambda_{n-1} - \lambda_n)\,\mathbf{v}_{n-1} = \mathbf{0}$$

Per la (5.48) e la seconda delle (5.45):

$$a_1\,(\lambda_1 - \lambda_n) \neq 0,$$

cioè il sistema $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_{n-1}\}$ è linearmente dipendente, che è una negazione dell'ipotesi (5.46). La negazione della tesi implica la negazione dell'ipotesi, da cui l'asserto. □

5.10.2 Polinomio caratteristico

Sia $\hat{A} \in End\,(E)$ rappresentato dalla matrice (in una base assegnata):

$$A = \left(a^i_j\right), \;\; i, j = 1, 2, ..., n = \dim E < +\infty$$

Proposizione.

$$\hat{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} \Longleftrightarrow \det\,(A - \lambda\bar{1}_n) = 0,$$

essendo $\bar{1}_n$ la matrice identità di ordine n.

Dimostrazione. L'equazione agli autovalori:

$$\hat{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$$

è equivalente alla:

$$\left(\hat{A} - \lambda\hat{1}\right)\mathbf{u} = \mathbf{0}, \tag{5.50}$$

essendo $\hat{1} \in End(E)$ l'operatore identità: $\hat{1}\mathbf{u} = \mathbf{u}$, $\forall \mathbf{u} \in E$. La (5.50) può essere esplicitata attraverso la matrice rappresentativa:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 - \lambda & a_2^1 & ... & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 - \lambda & ... & a_n^2 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_1^n & a_2^n & ... & a_n^n - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ ... \\ u^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.51}$$

essendo u^i le componenti di $\mathbf{u}$. La (5.51) è equivalente al sistema lineare omogeneo:

$$\begin{aligned} \left(a_1^1 - \lambda\right) u^1 + a_2^1 u^2 + ... + a_n^1 u^n &= 0 \\ a_1^2 u^1 + \left(a_2^2 - \lambda\right) u^2 + ... + a_n^2 u^n &= 0 \\ &... \\ a_1^n u^1 + a_2^n u^2 + ... + \left(a_n^n - \lambda\right) u^n &= 0 \end{aligned} \tag{5.52}$$

Come è noto, il sistema (5.52) ammette autosoluzioni se e solo se:

$$\begin{vmatrix} a_1^1 - \lambda & a_2^1 & ... & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 - \lambda & ... & a_n^2 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_1^n & a_2^n & ... & a_n^n - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

cioè:

$$\det\left(A - \lambda \bar{1}_n\right) = 0$$

□

Si osservi che $\det\left(A - \lambda \bar{1}_n\right)$ è un polinomio di grado n, quindi poniamo per definizione:

$$p_A(\lambda) \stackrel{def}{=} \det\left(A - \lambda \bar{1}_n\right) \tag{5.53}$$

Chiamiamo $p_A(\lambda)$ **polinomio caratteristico** dell'endomorfismo $\hat{A}$.

Esempio 68. Esplicitare il polinomio caratteristico degli operatori $\hat{A}$ e $\hat{B}$, rappresentati dalle matrici:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

Per l'operatore $\hat{A}$:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (a_{11} - \lambda)(a_{21} - \lambda) - a_{12}a_{21} \\ &= \lambda^2 + (-a_{11} - a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} \end{aligned}$$

Per l'operatore $\hat{B}$:

$$\begin{aligned} p_B(\lambda) &= \begin{vmatrix} b_{11} - \lambda & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} - \lambda & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} - \lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3 + \lambda^2 (b_{11} + b_{22} + b_{33}) + \lambda (b_{12}b_{21} - b_{11}b_{22} + b_{13}b_{31} + b_{23}b_{32} - b_{11}b_{33} - b_{22}b_{33}) + \\ &- b_{13}b_{22}b_{31} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32} - b_{11}b_{23}b_{32} - b_{12}b_{21}b_{33} + b_{11}b_{22}b_{33} \end{aligned}$$

Da tali esempio si evince che nel caso $n \times n$:

$$p_A(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(a_{ij}) \lambda^k,$$

essendo $\alpha_k(a_{ij})$ funzioni degli elementi di matrice.

***

Per quanto detto, gli autovalori di un endomorfismo $\hat{A}$ sono le radici (in $\mathbb{K}$) del polinomio caratteristico. Dalla conoscenza di tali radici, risolvendo il sistema lineare (5.52) si ottengono i corrispondenti autovettori.

Esempio 69. Consideriamo l'endomorfismo $\hat{A} \in End(E)$, dove E è lo spazio vettoriale $\mathbb{C}^2$ (sul campo complesso $\mathbb{C}$) rappresentato - nella base canonica - dalla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Determiniamo autovettori e autovalori di $\hat{A}$.
Il polinomio caratteristico è:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 + 1 \end{aligned}$$

Da ciò segue che gli autovalori di $\hat{A}$ sono le radici dell'equazione:

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Longleftrightarrow \lambda_1 = -i,\ \lambda_2 = +i$$

Gli autovettori si ottengono risolvendo il sistema omogeneo:

$$\begin{cases} (1-\lambda_k) u_1 - u_2 = 0 \\ 2u_1 - (1+\lambda_k) u_2 = 0 \end{cases}, \tag{5.54}$$

ottenendo:

$$\mathbf{u}^{(1)} \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix},\ \mathbf{u}^{(2)} \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}$$

Si osservi che gli autovettori $\mathbf{u}^{(k)}$ sono definiti a meno di una costante moltiplicativa, poiché il sistema (5.54) ammette ∞^1 autosoluzioni.

***

Sia $p(x)$ un polinomio a coefficienti in $\mathbb{K}$:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n \tag{5.55}$$

Se $\hat{A} \in End(E)$, essendo E uno spazio vettoriale *n-dimensionale* sul campo $\mathbb{K}$, eseguiamo nella (5.55) la sostituzione:

$$x \to \hat{A},\ a_0 \to a_0 \hat{1}$$

ottenendo l'operatore

$$p\left(\hat{A}\right) = a_0 \hat{1} + a_1 \hat{A} + a_2 \hat{A}^2 + ... + a_n \hat{A}^n \tag{5.56}$$

Se A è la matrice rappresentativa di $\hat{A}$:

$$p\left(\hat{A}\right) \doteq p(A) = a_0 \overline{1}_n + a_1 A + a_2 A^2 + ... + a_n A^n$$

Esempio 70.

$$p(x) = 2x^2 - 3x + 7; q(x) = x^2 - 5x - 2;\ A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Risulta:

$$p(A) = 2A^2 - 3A + 7 \cdot \bar{I}_2 = \begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 27 & 27 \end{pmatrix};\ \ q(A) = A^2 - 5A - 2 \cdot \bar{I}_2 = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 24 & -6 \end{pmatrix}$$

Definizione. Se risulta $p(A) = 0$, diremo che $p(x)$ è un ***polinomio annullatore di*** A.

Teorema (di Cayley-Hamilton) 71. Il polinomio caratteristico di una qualunque matrice A è un polinomio annullatore di A.

Dimostrazione. Omessa □

5.10.3 Endomorfismi diagonalizzabili

Consideriamo uno spazio vettoriale E *n-dimensionale* sul campo $\mathbb{K}$.

Definizione. $\hat{A} \in End(E)$ è ***diagonalizzabile*** se esiste una base di E tale che: $\hat{A} \doteq A = diag(a_1^1, a_2^2, ..., a_n^n)$.

Proposizione. $\hat{A} \in End(E)$ è diagonalizzabile se e solo se $\hat{A}$ ammette n autovettori linearmente indipendenti.

Dimostrazione. **La condizione è necessaria.** Per ipotesi:

$$\hat{A}\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i,\ \ i = 1, 2, ..., n$$

Il sistema $\Sigma = \{\mathbf{v}_i\}$ è una base di E, in quanto sistema di ordine massimo. Scriviamo la matrice rappresentativa dell'operatore $\hat{A}$ nella base Σ. A tale scopo determiniamo il risultato dell'applicazione di $\hat{A}$ sui vettori di Σ:

$$\begin{aligned} \hat{A}\mathbf{v}_1 &= \lambda_1 \mathbf{v}_1 + 0 \cdot \mathbf{v}_2 + ... + 0 \cdot \mathbf{v}_n \\ \hat{A}\mathbf{v}_2 &= 0 \cdot \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \cdot \mathbf{v}_2 + ... + 0 \cdot \mathbf{v}_n \\ &... \\ \hat{A}\mathbf{v}_n &= 0 \cdot \mathbf{v}_1 + 0 \cdot \mathbf{v}_2 + ... + \lambda_n \cdot \mathbf{v}_n \end{aligned}$$

Quindi:

$$\hat{A} \doteq A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix},$$

donde l'asserto. **La condizione è sufficiente.** Per ipotesi $\hat{A}$ è diagonalizzabile, per cui esiste una base $\{\mathbf{e}_i\}$ di E tale che

$$\hat{A} \doteq A = \begin{pmatrix} a_1^1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_2^2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_n^n \end{pmatrix}$$

Per definizione di matrice rappresentativa deve essere:

$$\hat{A}\mathbf{e}_1 = a_1^1\mathbf{e}_1,\ \hat{A}\mathbf{e}_2 = a_2^2\mathbf{e}_2, ...,\ \hat{A}\mathbf{e}_n = a_n^n\mathbf{e}_n,$$

cosicchè $\hat{A}$ ammette n autovettori linearmente indipendenti. □

***

Consideriamo l'autospazio $E(\lambda_i)$ corrispondente all'autovalore λ_i di $\hat{A} \in End(E)$.

Definizione. Dicesi ***molteplicità geometrica***[1] ***di*** λ_i l'intero naturale $r_i = \dim E(\lambda_i) \geq 1$.

Da ciò segue che al medesimo autovalore λ_i possono corrispondere più autovettori linearmente indipendenti. In simboli:

$$\lambda_i \longrightarrow \{\mathbf{u}_{i,1}, \mathbf{u}_{i,2}, ..., \mathbf{u}_{i,r_i}\}$$

L'equazione agli autovalori si scrive:

$$\begin{aligned}
\hat{A}\mathbf{u}_{i,1} &= \lambda_i\mathbf{u}_{i,1} \\
\hat{A}\mathbf{u}_{i,2} &= \lambda_i\mathbf{u}_{i,2} \\
&... \\
\hat{A}\mathbf{u}_{i,r_i} &= \lambda_i\mathbf{u}_{i,r_i}
\end{aligned}$$

D'altro canto, λ_i è una radice del polinomio caratteristico $p_A(\lambda)$ e come tale avrà una **molteplicità algebrica** $\nu_i \geq 1$.

Teorema 72. Se λ_i è autovalore di $\hat{A} \in End(E)$, allora $r_i \leq \nu_i$.

Dimostrazione. Omessa □

Proposizione. Sia E uno spazio vettoriale finito-dimensionale. $\hat{A} \in End(E)$ dotato di q autovalori distinti $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_q$, è diagonalizzabile se e solo se:

$$\sum_{i=1}^{q} r_i = n,$$

essendo $n = \dim E$.

Dimostrazione. Omessa □

Esempio
Consideriamo gli operatori $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C} \in End(\mathbb{R}^3)$ che nella base canonica $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ sono rappresentati dalle matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

[1] In alcune teorie fisiche (Meccanica Quantistica) la molteplicità geometrica è denominata *grado di degenerazione*, e il corrispondente autovalore si dice *degenere*.

Si diagonalizzino (quando è possibile) i suddetti operatori.
Soluzione.
Polinomio caratteristico di A:

$$p_A(\lambda) = (2-\lambda)\left(\lambda^2 - 5\lambda + 6\right),$$

le cui radici - autovalori di A - sono:

$$\begin{aligned}\lambda_1 = 2,\ \nu_1 = 2\\ \lambda_2 = 3,\ \nu_2 = 1\end{aligned}$$

Da ciò segue immediatamente che $r_2 = 1$, $r_1 \leq 2$.

$$\lambda_1 \longrightarrow \mathbf{u}_1 = (1,0,0),$$

donde:

$$E(\lambda_1) = \{\alpha \mathbf{u}_1 : \alpha \in \mathbb{R}\} \Longrightarrow r_1 = 1$$

All'autovalore λ_2:

$$\lambda_2 = 3 \longrightarrow \mathbf{u}_2 = (-1,-1,2)$$

Si conclude che l'operatore $\hat{A}$ possiede solo due autovettori indipendenti, e come tale non è diagonalizzabile. Alternativamente, osserviamo che:

$$\sum_{i=1}^{2} r_i = 2 < n = \dim E,$$

quindi per la proposizione 5.10.3 l'endomorfismo $\hat{A}$ non è diagonalizzabile.
Polinomio caratteristico di $\hat{B}$:

$$p_B(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda-3)^2$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\lambda_1 = 1,\ \nu_1 = 1 \Longrightarrow r_1 = 1\\ \lambda_2 = 3,\ \nu_2 = 2 \Longrightarrow r_2 = 2\end{aligned}$$

Gli autovettori:

$$\begin{aligned}&\lambda_1 \longrightarrow \mathbf{u}_1 = (2,-1,1)\\ &\lambda_2 = 3 \longrightarrow \mathbf{u}_1 = (1,0,1),\ \mathbf{u}_{2,2} = (1,1,0)\end{aligned}$$

Ciò implica:

$$r_2 = \dim E(\lambda_2) = 2$$

Il sistema $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_{2,1}, \mathbf{u}_{2,2}\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ e in essa la matrice rappresentativa di $\hat{B}$ è:

$$B_{diag} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Polinomio caratteristico di $\hat{C}$:

$$p_C(\lambda) = (1-\lambda)^3$$

Quindi:

$$\lambda_1 = 1,\ \nu_1 = 3 \Longrightarrow r_1 \leq 3$$

Gli autovettori:

$$\lambda_1 \longrightarrow \mathbf{u}_{1,1} = (0,0,1)\,,\ \mathbf{u}_{1,2} = (1,0,0)$$

Ciò implica:

$$r_2 = \dim E(\lambda_2) = 2$$

Il sistema $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_{2,1}, \mathbf{u}_{2,2}\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ e in essa la matrice rappresentativa di $\hat{B}$ è:

$$B_{diag} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Polinomio caratteristico di $\hat{C}$:

$$p_C(\lambda) = (1-\lambda)^3$$

Quindi l'operatore $\hat{C}$ possiede l'unico autovalore $\lambda_1 = 1$ la cui molteplicità algebrica è $\nu_1 = 3$. Gli autovettori sono:

$$\mathbf{u}_{1,1} = (1,0,0)\,,\ \mathbf{u}_{1,2} = (0,0,1)$$

Da ciò segue che $\dim E(\lambda_2) = r_2 = 2$, per cui $\hat{C}$ non è diagonalizzabile.

5.10.4 Esercizi

1. Assegnati gli operatori $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C} \in End(\mathbb{C})$ rappresentati nella base canonica dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix},\ a \in \mathbb{R} - \{0\}$$

   si determinino autovalori e autovettori, diagonalizzando (dove è possibile) il singolo operatore.

2. Assegnati gli operatori $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C} \in End(\mathbb{R}^3)$ rappresentati nella base canonica dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

si determinino autovalori e autovettori, diagonalizzando (dove è possibile) il singolo operatore.

3. Assegnati gli operatori $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C} \in End(\mathbb{R}^3)$ rappresentati nella base canonica dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & -8 & -12 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -3 & -9 & -12 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

si determinino autovalori e autovettori, diagonalizzando (dove è possibile) il singolo operatore.

4. Assegnati gli operatori $\hat{A}, \hat{B} \in End(\mathbb{R}^3)$ e $\hat{C} \in End(\mathbb{R}^4)$ rappresentati nella base canonica dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

si determinino autovalori e autovettori, valutando la possibilità di diagonalizzazione di singolo operatore.

5. Assegnati gli operatori $\hat{A} \in End(\mathbb{R}^4)$, $\hat{B} \in End(\mathbb{R}^3)$ rappresentati nella base canonica dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

si determinino autovalori e autovettori, valutando la possibilità di diagonalizzazione di singolo operatore.

6. Diagonalizzare l'operatore $\hat{A} \in End(\mathbb{R}^4)$ rappresentato nella base canonica dalla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

7. Diagonalizzare l'operatore $\hat{A} \in End(\mathbb{R}^4)$ rappresentato nella base canonica dalla matrice:
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -10 & 7 \\ -5 & -4 & 9 & -6 \\ -3 & -2 & 6 & -4 \\ -3 & -3 & 7 & -5 \end{pmatrix}$$

8. Diagonalizzare l'operatore $\hat{A} \in End(\mathbb{R}^4)$ rappresentato nella base canonica dalla matrice:
$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -6 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

9. Determinare gli autovalori di $\hat{A}^{-1}$ essendo $\hat{A} \in End(E)$, supponendo noti gli autovalori λ di $\hat{A}$ e nell'ipotesi $\lambda \neq 0$.

10. Sia $\hat{A} \in End(E)$ con E spazio vettoriale *n-dimensionale* sul campo K, la cui equazione agli autovalori è:
$$\hat{A}\mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i, \quad i = 1, 2, ..., n$$
Per semplicità consideriamo il caso non degenere: $\nu_i = r_i = 1$. Si consideri il polinomio su K:
$$f(x) = a_0 \prod_{i=1}^{m} (x - x_i),$$
Determinare: a) l'espressione analitica di $f\left(\hat{A}\right)$; b) $\det f(A)$ in funzione degli autovalori di $\hat{A}$; c) autovettori e autovalori di $f\left(\hat{A}\right)$

5.10.4.1 Soluzioni

1. Il polinomio caratteristico di $\hat{A}$ è:
$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda - 1,$$
le cui radici sono:
$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3$$
La molteplicità algebrica di singola radice è:
$$\nu_1 = 1,\ \nu_2 = 1$$
In forza del teorema 72 la molteplicità geometrica di singolo autovalore è:
$$r_i = 1, \quad i = 1, 2 = q$$
per cui:
$$\sum_{i=1}^{q} r_i = 2 = \dim \mathbb{C},$$

donde la diagonalizzabilità dell'operatore $\hat{A}$. Le componenti dell'autovettore appartenente a λ_1 sono le soluzioni (x, y) dell'equazione lineare omogenea:

$$x + y = 0,$$

quindi:

$$\mathbf{u}_1 = (1, -1)$$

In maniera analoga si determinano le componenti dell'autovettore appartenente all'autovalore λ_2, ottenendo:

$$\mathbf{u}_2 = (1, 1)$$

Nella base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ l'operatore $\hat{A}$ è rappresentato dalla matrice:

$$A_{diag} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di $\hat{B}$ è:

$$p_B(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda - 14$$

le cui radici sono:

$$\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 7$$

La molteplicità algebrica di singola radice è:

$$\nu_1 = 1,\ \nu_2 = 1$$

In forza del teorema 72 la molteplicità geometrica di singolo autovalore è:

$$r_i = 1,\ \ i = 1, 2 = q$$

per cui:

$$\sum_{i=1}^{q} r_i = 2 = \dim \mathbb{C},$$

donde la diagonalizzabilità dell'operatore $\hat{B}$. Le componenti dell'autovettore appartenente a λ_1 sono le soluzioni (x, y) dell'equazione lineare omogenea:

$$5x + 4y = 0,$$

quindi:

$$\mathbf{u}_1 = (4, -5)$$

In maniera analoga si determinano le componenti dell'autovettore appartenente all'autovalore λ_2, ottenendo:

$$\mathbf{u}_2 = (1, 1)$$

Nella base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ l'operatore $\hat{B}$ è rappresentato dalla matrice:

$$B_{diag} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di $\hat{C}$ è:

$$p_C(\lambda) = \lambda^2 + a^2,$$

le cui radici sono:

$$\lambda_1 = -ia,\ \lambda_2 = ia$$

La molteplicità algebrica di singola radice è:

$$\nu_1 = 1,\ \nu_2 = 1$$

In forza del teorema 72 la molteplicità geometrica di singolo autovalore è:

$$r_i = 1, \quad i = 1, 2 = q$$

per cui:

$$\sum_{i=1}^{q} r_i = 2 = \dim \mathbb{C},$$

donde la diagonalizzabilità dell'operatore $\hat{C}$. Le componenti dell'autovettore appartenente a λ_1 sono le soluzioni (x, y) dell'equazione lineare omogenea:

$$ix + y = 0,$$

quindi:

$$\mathbf{u}_1 = (1, -i)$$

In maniera analoga si determinano le componenti dell'autovettore appartenente all'autovalore λ_2, ottenendo:

$$\mathbf{u}_2 = (1, i)$$

Nella base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ l'operatore $\hat{C}$ è rappresentato dalla matrice:

$$C_{diag} = \begin{pmatrix} -ia & 0 \\ 0 & ia \end{pmatrix}$$

2. Il polinomio caratteristico di $\hat{A}$ è:

$$p_A(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6$$

le cui radici sono:

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$$

La molteplicità algebrica di singola radice è:

$$\nu_i = 1, \quad i = 1, 2, 3$$

In forza del teorema 72 la molteplicità geometrica di singolo autovalore è:

$$r_i = 1, \quad i = 1, 2, 3,$$

per cui:

$$\sum_{i=1}^{q} r_i = 3,$$

donde la diagonalizzabilità dell'operatore $\hat{A}$.
Gli autovettori sono:

$$\mathbf{u}_1 = (-1, 1, 0)\,,\ \mathbf{u}_2 = (-2, 1, 2)\,, \mathbf{u}_3 = (-1, 1, 2)$$

Essi compongono una base di $\mathbb{R}^3$, pertanto la matrice rappresentativa in tale base è:

$$A_{diag} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di $\hat{B}$ è:

$$p_B(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2$$

le cui radici sono:

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$$

La molteplicità algebrica di singola radice è:

$$\nu_i = 1, \quad i = 1, 2, 3$$

In forza del teorema 72 la molteplicità geometrica di singolo autovalore è:

$$r_i = 1, \quad i = 1, 2, 3,$$

per cui:

$$\sum_{i=1}^{q} r_i = 3,$$

donde la diagonalizzabilità dell'operatore $\hat{B}$ (prop. 5.10.3).
Gli autovettori sono:

$$\mathbf{u}_1 = (1, 0, 1)\,,\ \mathbf{u}_2 = (3, 2, 1)\,, \mathbf{u}_3 = (1, 3, 1)$$

Essi compongono una base di $\mathbb{R}^3$, pertanto la matrice rappresentativa in tale base è:

$$B_{diag} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di $\hat{C}$ è:

$$p_C(\lambda) = -(\lambda - 2)^2 (\lambda - 1)$$

le cui radici sono:

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$$

La molteplicità algebrica di singola radice è:

$$\nu_1 = 2,\ \nu_2 = 1$$

In forza del teorema 72 la molteplicità geometrica di singolo autovalore è:

$$r_1 \leq 2,\ \ r_2 = 1$$

Determiniamo gli autovettori.

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\longrightarrow \mathbf{u}_1 = (2, 1, 0) \Longrightarrow r_1 = 1 \\ \lambda_2 &\longrightarrow \mathbf{u}_2 = (-1, -1, 1) \Longrightarrow r_2 = 1 \end{aligned} \tag{5.57}$$

Dalle (5.57):

$$\sum_{i=1}^{q} r_i = 2,$$

donde la non diagonalizzabilità dell'operatore $\hat{C}$.

3. Il polinomio caratteristico di $\hat{A}$ è:

$$p_A(\lambda) = (1 - \lambda)^3$$

la cui radice è:

$$\lambda_1 = 1$$

La molteplicità algebrica:

$$\nu_1 = 3$$

λ_1 ammette un solo autovettore:

$$\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1)$$

Evidentemente:

$$r_1 = 1,$$

per cui $\hat{A}$ non è diagonalizzabile.

Il polinomio caratteristico di $\hat{B}$ è:

$$p_B(\lambda) = -\lambda\left(\lambda^2 - 3\lambda + 2\right)$$

le cui radici sono:

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$$

La molteplicità algebrica di singola radice è:

$$\nu_i = 1, \quad i = 1, 2, 3$$

In forza del teorema 72 la molteplicità geometrica di singolo autovalore è:

$$r_i = 1, \quad i = 1, 2, 3,$$

per cui:

$$\sum_{i=1}^{q} r_i = 3,$$

donde la diagonalizzabilità dell'operatore $\hat{B}$ (prop. 5.10.3).
Gli autovettori sono:

$$\mathbf{u}_1 = (-4, 1, 0), \mathbf{u}_2 = (-4, 0, 1), \mathbf{u}_3 = (-2, 1, 0)$$

Essi compongono una base di $\mathbb{R}^3$, pertanto la matrice rappresentativa in tale base è:

$$B_{diag} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di $\hat{C}$ è:

$$p_C(\lambda) = \lambda^2 (1 - \lambda)^2$$

le cui radici sono:

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$$

La molteplicità algebrica di singola radice è:

$$\nu_1 = 2, \nu_2 = 1$$

In forza del teorema 72 la molteplicità geometrica di singolo autovalore è:

$$r_1 \leq 2, \quad r_2 = 1$$

Determiniamo gli autovettori.

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\longrightarrow \mathbf{u}_1 = (-3, 1, 0) \Longrightarrow r_1 = 1 \\ \lambda_2 &\longrightarrow \mathbf{u}_2 = (-12, 4, 1) \Longrightarrow r_2 = 1 \end{aligned} \tag{5.58}$$

Dalle (5.57):

$$\sum_{i=1}^{q} r_i = 2,$$

donde la non diagonalizzabilità dell'operatore $\hat{C}$.

4. Il polinomio caratteristico di $\hat{A}$ è:

$$p_A(\lambda) = (3-\lambda)(\lambda-1)^2$$

le cui radici sono:

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3,$$

La molteplicità algebrica di singola radice è:

$$\nu_1 = 2, \;\; \nu_2 = 3$$

In forza del teorema 72 la molteplicità geometrica di singolo autovalore è:

$$r_1 \leq 2, \, r_2 = 1$$

All'autovalore λ_1 corrispondono gli autovettori:

$$\mathbf{u}_{1,1} = (-1, 0, 1), \;\; \mathbf{u}_{1,2} = (-1, 1, 0)$$

Cioè la molteplicità geometrica di λ_1 è $r_1 \stackrel{def}{=} \dim E(\lambda_1) = 2$.
All'autovalore λ_2 corrisponde l'autovettore:

$$\mathbf{u}_2 = (1, 1, 0)$$

Abbiamo:

$$\sum_{i=1}^{q} r_i = 2 + 1 = 3$$

donde la diagonalizzabilità dell'operatore $\hat{A}$. La matrice rappresentativa in tale base è:

$$A_{diag} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di $\hat{B}$ è:

$$p_B(\lambda) = -\lambda\left(\lambda^2 - 5\lambda + 4\right)$$

le cui radici sono:

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 4$$

La molteplicità algebrica di singola radice è:

$$\nu_i = 1, \;\; i = 1, 2, 3$$

In forza del teorema 72 la molteplicità geometrica di singolo autovalore è:

$$r_i = 1, \;\; i = 1, 2, 3,$$

per cui:

$$\sum_{i=1}^{q} r_i = 3,$$

donde la diagonalizzabilità dell'operatore $\hat{B}$ (prop. 5.10.3).
Gli autovettori sono:

$$\mathbf{u}_1 = (-1, 1, 0)\,,\, \mathbf{u}_2 = (0, 0, 1)\,, \mathbf{u}_3 = (1, 1, 0)$$

Essi compongono una base di $\mathbb{R}^3$, pertanto la matrice rappresentativa in tale base è:

$$B_{diag} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di $\hat{C}$ è:

$$p_C(\lambda) = (\lambda - 1)^2 \left(\lambda^2 - 5\lambda + 6\right)$$

le cui radici sono:

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3$$

La molteplicità algebrica di singola radice è:

$$\nu_1 = 2,\ \nu_2 = 1\ ,\nu_3 = 1$$

In forza del teorema 72 la molteplicità geometrica di singolo autovalore è:

$$r_1 \leq 2,\ \ r_2 = 1,\ r_3 = 1$$

Determiniamo gli autovettori.

$$\lambda_1 \longrightarrow \{\mathbf{u}_{1,1} = (-1, 0, 1, 0)\,,\, \mathbf{u}_{1,2} = (-1, 1, 0, 0)\} \Longrightarrow r_1 = 2 \tag{5.59}$$

$$\lambda_2 \longrightarrow \mathbf{u}_2 = (-2, 4, 1, 2) \Longrightarrow r_2 = 1$$

$$\lambda_3 \longrightarrow \mathbf{u}_3 = (0, 3, 1, 2) \Longrightarrow r_3 = 1 \tag{5.60}$$

Dalle (5.57):

$$\sum_{i=1}^{q} r_i = 4,$$

donde la diagonalizzabilità dell'operatore $\hat{C}$.
Il sistema di autovettori:

$$\{\mathbf{u}_{1,1}, \mathbf{u}_{1,2}, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}\,,$$

è una base di $\mathbb{R}^4$, e la matrice rappresentativa di $\hat{C}$ in tale base è:

$$C_{diag} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

5. Il polinomio caratteristico di A è:

$$p_A(\lambda) = (\lambda - 2)^3 (\lambda + 2)$$

Quindi gli autovalori:

$$\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 2$$

le cui molteplicità algebriche sono:

$$\nu_1 = 1, \nu_2 = 3$$

Le molteplicità geometriche:

$$r_1 = 1,\ r_2 \leq 3$$

Gli autovettori appartenenti all'autovalore λ_1 hanno per componenti nella base canonica, le soluzioni del sistema lineare omogeneo:

$$\begin{aligned} 3x + y + z + t &= 0 \\ x + 3y - z - t &= 0 \\ x - y + 3z - t &= 0 \\ x - y - z + 3t &= 0, \end{aligned}$$

che ammette ∞^1 autosoluzioni. Quindi a meno di una costante moltiplicativa:

$$\mathbf{u}_1 = (-1, 1, 1, 1)$$

Per l'autovalore λ_2 occorre risolvere il sistema omogeneo:

$$\begin{aligned} -x + y + z + t &= 0 \\ x - y - z - t &= 0 \\ x - y - z - t &= 0 \\ x - y - z - t &= 0, \end{aligned}$$

equivalente a:

$$x - y - z - t = 0$$

Pertanto esistono ∞^3 autosoluzioni $(\alpha + \beta + \gamma, \alpha, \beta, \gamma)$, per ogni $\alpha, \beta, \gamma \in (-\infty, +\infty)$. Quindi il più generale autovettore di $\hat{A}$ appartenente all'autovalore λ_2 è:

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= (\alpha + \beta + \gamma, \alpha, \beta, \gamma) \\ &= \alpha(1, 1, 0, 0) + \beta(1, 0, 1, 0) + \gamma(1, 0, 0, 1) \end{aligned}$$

Posto:

$$\mathbf{u}_{2,1} = (1, 1, 0, 0),\ \ \mathbf{u}_{2,2} = (1, 0, 1, 0),\ \ \mathbf{u}_{2,3} = (1, 0, 0, 1)$$

risulta che i suddetti vettori compongono una base dell'autospazio $E'(\lambda_2)$:

$$\hat{A}\mathbf{u}_{2,i} = \lambda_2 \mathbf{u}_{2,i},\ \ i = 1, 2, 3 = r_2$$

Pertanto all'autovalore λ_2 corrispondono tre autovettori lineramente indipendenti:

$$\lambda_2 \to \{\mathbf{u}_{2,1}, \mathbf{u}_{2,2}, \mathbf{u}_{2,3}\}$$

Infine

$$\sum_{i=1}^{4} r_i = 1 + 3 = 4$$

donde la diagonalizzabilità dell'operatore $\hat{A}$. La matrice rappresentativa in tale base è:

$$A_{diag} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di B è:

$$p_B(\lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 2\lambda - 4,$$

le cui radici sono:

$$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 1 - \sqrt{3},\ \lambda_3 = 1 + \sqrt{3}$$

Gli autovettori sono:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= (-2, 1, 0) \\ \mathbf{u}_2 &= \left(\frac{3\left(-1+\sqrt{3}\right)}{1+\sqrt{3}}, \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}, 1 \right) \\ \mathbf{u}_3 &= \left(\frac{3\left(1+\sqrt{3}\right)}{-1+\sqrt{3}}, \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}, 1 \right) \end{aligned}$$

Nella base $\{\mathbf{u}_i\}$ la matrice rappresentativa di $\hat{B}$ è:

$$B_{diag} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

6. Il polinomio caratteristico è:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det\left|A - \lambda \overline{\mathrm{I}}_4\right| \\ &= (\lambda - 1)^3 (\lambda - 2) \end{aligned}$$

Quindi gli autovalori:

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$$

le cui molteplicità algebriche sono:

$$\nu_1 = 3, \nu_2 = 1$$

Le molteplicità geometriche:

$$r_1 \leq 3,\ r_2 = 1$$

Gli autovettori appartenenti all'autovalore λ_1 hanno per componenti nella base canonica, le soluzioni del sistema lineare omogeneo:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix},$$

che ammette ∞^1 autosoluzioni. Quindi a meno di una costante moltiplicativa:

$$\mathbf{u}_1 = (-3, -6, 4, 5)$$

Per l'autovalore λ_2 troviamo:

$$\mathbf{u}_2 = (-2, -3, 2, 3)$$

Si conclude che l'operatore lineare $\hat{A}$ possiede solo due autovettori indipendenti, pertanto non è diagonalizzabile.

7. Il polinomio caratteristico è:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det \left| A - \lambda \overline{1}_4 \right| \\ &= (\lambda + 1)(\lambda - 1)^3 \end{aligned}$$

Quindi gli autovalori:

$$\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1$$

le cui molteplicità algebriche sono:

$$\nu_1 = 1, \nu_2 = 3$$

Le molteplicità geometriche:

$$r_1 = 1,\ r_2 \leq 3$$

Gli autovettori appartenenti all'autovalore λ_1 hanno per componenti nella base canonica, le soluzioni del sistema lineare omogeneo:

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & -10 & 7 \\ -5 & -4 & 9 & -6 \\ -3 & -2 & 6 & -4 \\ -3 & -3 & 7 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix},$$

che ammette ∞^1 autosoluzioni. Quindi a meno di una costante moltiplicativa:

$$\mathbf{u}_1 = (-3, 0, 1, 4)$$

Per l'autovalore λ_2 troviamo:

$$\mathbf{u}_2 = (1, 2, 3, 2)$$

Si conclude che l'operatore lineare $\hat{A}$ possiede solo due autovettori indipendenti, pertanto non è diagonalizzabile.

8. Il polinomio caratteristico è:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det\left|A - \lambda \bar{\mathrm{I}}_4\right| \\ &= \lambda^2\left(\lambda^2 - 1\right) \end{aligned}$$

Quindi gli autovalori:

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1$$

le cui molteplicità algebriche sono:

$$\nu_1 = 2, \nu_2 = \nu_3 = 1,$$

Le molteplicità geometriche:

$$r_1 \leq 2,\ r_2 = r_3 = 1$$

Gli autovettori appartenenti all'autovalore λ_1 hanno per componenti nella base canonica, le soluzioni del sistema lineare omogeneo:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -6 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

che ammette ∞^1 autosoluzioni. Quindi a meno di una costante moltiplicativa:

$$\mathbf{u}_1 = (2, 1, 0, 1)$$

Per gli autovalori λ_2, λ_3 troviamo:

$$\mathbf{u}_2 = (3, 0, 1, 2)\,,\ \mathbf{u}_3 = (3, 0, 1, 4)$$

Si conclude che l'operatore lineare $\hat{A}$ possiede solo tre autovettori indipendenti, pertanto non è diagonalizzabile.

9. Scriviamo l'equazione agli autovalori per gli operatori $\hat{A}$, $\hat{A}^{-1}$:

$$\begin{aligned} \hat{A}\mathbf{u} &= \lambda \mathbf{u} \\ \hat{A}^{-1}\mathbf{w} &= \lambda' \mathbf{w} \end{aligned} \tag{5.61}$$

Dalla seconda delle (5.61):

$$p_{A^{-1}}(\lambda') = \det\left(A^{-1} - \lambda' \bar{I}\right) = 0$$

Da ciò segue:

$$0 = \det\left(AA^{-1} - \lambda' A\right) = \det\left(\bar{I} - \lambda' A\right) = -\lambda' \det\left[A - (\lambda')^{-1}\bar{I}\right]$$

Cioè:

$$\det\left[A - (\lambda')^{-1}\bar{I}\right] = 0 \Longleftrightarrow p_A\left[(\lambda')^{-1}\right] = 0 \Longrightarrow \lambda = \frac{1}{\lambda'}$$

Si conclude che gli autovalori di $\hat{A}^{-1}$ sono:

$$\lambda' = \frac{1}{\lambda}$$

10. L'operatore $f\left(\hat{A}\right)$ si ottiene dall'espressione $f(x)$ eseguendo la sostituzione $x \to \hat{A}$, $x_i \to x_i\hat{1}$, $a_0 \to a_0\hat{1}$:

$$f\left(\hat{A}\right) = a_0\hat{1}\prod_{i=1}^{m,}\left(\hat{A} - x_i\hat{1}\right) \tag{5.62}$$

Dalla (5.62) passiamo alla matrice rappresentativa:

$$f\left(\hat{A}\right) \doteq f(A) = a_0\bar{1}_n\prod_{i=1}^{m,}\left(A - x_i\bar{1}_n\right),$$

e per una nota proprietà dei determinanti:

$$\det\left[f(A)\right] = a_0^m\prod_{i=1}^{m,}\det\left(A - x_i\bar{1}_n\right)$$

Cioè:

$$\det\left[f(A)\right] = a_0^m\prod_{i=1}^{m}p_A(x_i), \tag{5.63}$$

essendo $p_A(\lambda)$ il polinomio caratteristico della matrice A: $p_A(\lambda) = \det\left(A - \lambda\bar{1}_n\right)$, le cui radici sono gli autovalori λ_i, donde:

$$p_A(x_i) = \prod_{j=1}^{n}(x_i - \lambda_j) \tag{5.64}$$

Sostituendo la (5.64) nella (5.63):

$$\begin{aligned}\det\left[f(A)\right] &= a_0^m\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}(x_i - \lambda_j)\\ &= \prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{m}\left[a_0(x_i - \lambda_j)\right],\end{aligned}$$

donde:

$$\det\left[f(A)\right] = \prod_{j=1}^{n}f(\lambda_j)$$

Per determinare gli autovettori dell'operatore $f\left(\hat{A}\right)$ si osservi che $f\left(\hat{A}\right)$ si esprime come:

$$f\left(\hat{A}\right) = \sum_{i=1}^{m}c_i\hat{A}^i, \tag{5.65}$$

con $c_i \in K$. Applichiamo l'operatore $\hat{A}$ ad ambo i membri della (5.65):

$$\begin{aligned}f\left(\hat{A}\right)\mathbf{u}_i &= \sum_{j=1}^{m}c_j\hat{A}^j\mathbf{u}_i\\ &= \left(\sum_{j=1}^{m}c_j\lambda_i^j\right)\mathbf{u}_i\\ &= f(\lambda_i)\,\mathbf{u}_i\end{aligned}$$

L'ultimo passaggio si giustifica osservando che se $A\mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i$, allora $A^n \mathbf{u}_i = \lambda_i^n \mathbf{u}_i$. Si conclude che $f\left(\hat{A}\right)$ ammette gli stessi autovettori di $\hat{A}$, con autovalori $f(\lambda_i)$.

Osservazione. Si può dimostrare che $f(\lambda_i)$ sono gli autovalori di $f\left(\hat{A}\right)$ nel seguente modo: si consideri la funzione:

$$g(x) = f(x) - \lambda$$

Posto $\hat{B} = f\left(\hat{A}\right)$, il polinomio caratteristico della matrice B è:

$$p_B(\mu) = \det\left(B - \mu \bar{1}_n\right)$$

Scriviamo l'equazione agli autovalori per $\hat{B}$:

$$\hat{B}\mathbf{v}_i = \mu_i \mathbf{v}_i$$

Inoltre:

$$\begin{aligned} p_B(\mu) = \det g(A) = \det\left(f(A) - \lambda\right) &= \prod_{i=1}^{n} g(\lambda_i) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \left[f(\lambda_j) - \lambda\right] \Longrightarrow \mu_i = f(\lambda_i) \end{aligned}$$

5.11 Similitudine

5.11.1 Matrici simili

Sia $\hat{A}$ un endomorfismo diagonalizzabile di uno spazio vettoriale finito-dimensionale ($\dim E = n$) sul campo K. Supponiamo che in una base assegnata $\{\mathbf{e}_i\}$, $\hat{A}$ sia rappresentato dalla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{5.66}$$

Per ipotesi $\hat{A}$ è diagonalizzabile, per cui se $\{\mathbf{u}_i\}$ è il suo sistema di autovettori e λ_i i relativi autovalori[2], nella base $\{\mathbf{u}_i\}$ l'operatore è rappresentato dalla matrice diagonale:

$$A_{diag} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{5.67}$$

Proposizione. Le matrici (5.66)-(5.67) sono legate dalla relazione:

$$A_{diag} = R^{-1} A R, \tag{5.68}$$

essendo R la matrice del cambiamento di base $\{\mathbf{e}_i\} \to \{\mathbf{v}_i\}$ (§ **??**).

[2]Per semplicità stiamo considerando il caso $r_i = \nu_i = 1$, $i = 1, ..., n$.

Dimostrazione. Omessa □

***

Naturalmente le matrici A_{diag} e A hanno i medesimi autovalori, per cui ci si può chiedere se la relazione (5.68) abbia validità generale. La risposta è affermativa ed è espressa dalla seguente

Definizione. Le matrici A e B sono simili se esiste una matrice C non singolare tale che:

$$B = C^{-1}AC \tag{5.69}$$

Proposizione. Due matrici simili hanno gli stessi autovalori.

Dimostrazione. Il polinomio caratteristico di B è:

$$p_B(\lambda) = \det\left(B - \lambda\overline{I}\right) = \det\left(C^{-1}AC - \lambda\overline{I}\right), \tag{5.70}$$

giacchè la matrice B è legata alla matrice A dalla (5.69). D'altro canto:

$$\lambda\overline{I} \underset{C^{-1}C=\overline{I}}{=} \lambda\overline{I}C^{-1}C \underset{\overline{I}C^{-1}=C^{-1}\overline{I}}{=} \lambda C^{-1}\overline{I}C = C^{-1}\left(\lambda\overline{I}\right)C,$$

che sostituita nella (5.70) porge:

$$\begin{aligned} p_B(\lambda) &= \det\left[C^{-1}AC - C^{-1}\left(\lambda\overline{I}\right)C\right] \\ &= \det\left[C^{-1}\left(A - \lambda\overline{I}\right)C\right] \\ &= \left(\det C^{-1}\right)\det\left(A - \lambda\overline{I}\right)(\det C) \\ &= \det\left(A - \lambda\overline{I}\right) \\ &= p_A(\lambda), \end{aligned}$$

cioè A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico, da cui l'asserto. □

Capitolo 6

Spazio duale

6.1 Forme lineari

Nel capitolo 5.4 abbiamo definito l'insieme $Hom\,(E, F)$ (eq. 5.13) che assume la struttura di spazio vettoriale su K. Riferiamoci in particolare a:

$$Hom\,(E, K) = \{\omega : \ \omega \text{ è un omomorfismo tra } E \text{ e } K\}$$

Definizione. Un omomorfismo $\omega \in Hom\,(E, K)$ si dice ***forma lineare.***

Il risultato dell'applicazione di ω su un vettore di E è uno scalare. Scriviamo:

$$\omega\,(\mathbf{x}) \stackrel{def}{=} \langle \mathbf{x}, \omega \rangle\,, \ \ \mathbf{x} \in E$$

Esempio 73. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ il *prodotto scalare* di due vettori $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$ è definito da:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Ciò premesso, consideriamo l'applicazione lineare:

$$\omega_{\mathbf{a}} : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R} \tag{6.1}$$

tale che ad ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ associa il prodotto scalare $\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}$, essendo $\mathbf{a}$ un assegnato vettore di $\mathbb{R}^n$. Quindi:

$$\langle \mathbf{x}, \omega_{\mathbf{a}} \rangle = \mathbf{x} \cdot \mathbf{a}$$

È facile rendersi conto che l'applicazione (6.1) è una forma lineare.

Poniamo per definizione:

$$E^* \stackrel{def}{=} Hom\,(E, K)$$

Introduciamo in E^* l'operazione di somma tra forme lineari:

$$\begin{gathered} + : E^* \times E^* \longmapsto E^* \\ (\omega_1, \omega_2) \in E^* \times E^* \longmapsto (\omega_1 + \omega_2) \in E^* \end{gathered} \tag{6.2}$$

La (6.2) è così definita:

$$\begin{aligned} \omega_1 + \omega_2 : E^* &\longmapsto K \\ \mathbf{v} \in E &\longmapsto \langle \mathbf{v}, \omega_1 + \omega_2 \rangle \overset{def}{=} (\langle \mathbf{v}, \omega_1 \rangle + \langle \mathbf{v}, \omega_2 \rangle) \in K \end{aligned} \tag{6.3}$$

Dimostriamo che $(\omega_1 + \omega_2) \in E^*$:

$$\begin{aligned} \forall \alpha, \beta \in K, \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in E, \quad & \langle \alpha \mathbf{v} + \beta \mathbf{w}, \omega_1 + \omega_2 \rangle \overset{def}{=} \langle \alpha \mathbf{v} + \beta \mathbf{w}, \omega_1 \rangle + \langle \alpha \mathbf{v} + \beta \mathbf{w}, \omega_2 \rangle \\ & \overset{\omega_k \in E^*}{=} \alpha \langle \mathbf{v}, \omega_1 \rangle + \beta \langle \mathbf{w}, \omega_1 \rangle + \alpha \langle \mathbf{v}, \omega_2 \rangle + \beta \langle \mathbf{w}, \omega_2 \rangle \\ & = \alpha \langle \mathbf{v}, \omega_1 + \omega_2 \rangle + \beta \langle \mathbf{w}, \omega_1 + \omega_2 \rangle \Longrightarrow (\omega_1 + \omega_2) \in E^* \end{aligned}$$

Introduciamo ora l'operazione di prodotto di uno scalare per un elemento di $Hom\,(E, K)$:

$$\begin{aligned} \cdot : K \times E^* &\longmapsto E^* \\ (\lambda, \omega) \in K \times E^* &\longmapsto (\lambda \omega) \in E^* \end{aligned} \tag{6.4}$$

La (6.4) è così definita:

$$\begin{aligned} \lambda \omega : E^* &\longmapsto K \\ \mathbf{v} \in E &\longmapsto \langle \mathbf{v}, \lambda \omega \rangle \overset{def}{=} \lambda \langle \mathbf{v}, \omega \rangle \in K \end{aligned} \tag{6.5}$$

Dimostriamo che $(\lambda \omega) \in E^*$:

$$\begin{aligned} \forall \alpha, \beta \in K, \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in E, \quad & \langle \alpha \mathbf{v} + \beta \mathbf{w}, \lambda \omega \rangle \overset{def}{=} \lambda \langle \alpha \mathbf{v} + \beta \mathbf{w}, \omega \rangle \\ & \overset{\omega \in E^*}{=} \lambda (\alpha \langle \mathbf{v}, \omega \rangle + \beta \langle \mathbf{w}, \omega \rangle) \\ & = \alpha \lambda \langle \mathbf{v}, \omega \rangle + \beta \lambda \langle \mathbf{w}, \omega \rangle \\ & = \alpha \langle \mathbf{v}, \lambda \omega \rangle + \beta \langle \mathbf{v}, \lambda \omega \rangle \Longrightarrow (\lambda \omega) \in E^* \end{aligned}$$

Con l'introduzione delle operazioni (6.2)-(6.4), l'insieme E^* assume la struttura di spazio vettoriale su K. Chiamiamo E^* **spazio duale** dello spazio vettoriale E.

Osservazione. L'elemento neutro in E^* è la forma lineare:

$$\hat{O} : \mathbf{v} \in E \longmapsto 0$$

Cioè:

$$\left\langle \mathbf{v}, \hat{O} \right\rangle = 0, \ \ \forall \mathbf{v} \in E$$

L'elemento opposto ad un elemento $\omega \in E^*$ è la forma lineare $-\omega$ tale che:

$$\langle \mathbf{v}, -\omega \rangle = - \langle \mathbf{v}, \omega \rangle, \ \ \forall \mathbf{v} \in E$$

***

Lemma 74. Sia E uno spazio vettoriale su K e $\{\mathbf{e}_i\}$ una sua base ($i = 1, 2, ..., n = \dim E$).

$$\forall b_1, b_2, ..., b_n \in K, \ \exists! \ \omega \in E^* : \langle \mathbf{e}_i, \omega \rangle = b_i \quad (i = 1, 2, ..., n)$$

Dimostrazione. **Esistenza di** ω Preso ad arbitrio un vettore $\mathbf{x} \in E$, siano x_i le sue componenti nella base $\{\mathbf{e}_i\}$. Consideriamo l'applicazione:

$$\begin{aligned} \omega : E &\longmapsto K \\ \mathbf{x} \in E &\longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i b_i \end{aligned} \tag{6.6}$$

Cioè

$$\langle \mathbf{x}, \omega \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i$$

L'applicazione (6.6) è manifestamente lineare, per cui è una forma lineare. Applichiamo ω ai vettori di base:

$$\mathbf{x} = \mathbf{e}_j \Longrightarrow \langle \mathbf{e}_j, \omega \rangle = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ij} b_i = b_j,$$

da cui l'esistenza di $\omega : \langle \mathbf{e}_j, \omega \rangle = b_j$ per $j = 1, 2, ..., n$. **Unicità di** ω Neghiamo la tesi:

$$\exists \omega, \omega' \in E^* : \langle \mathbf{e}_i, \omega \rangle = \langle \mathbf{e}_i, \omega' \rangle = b_i \Longrightarrow \langle \mathbf{e}_i, \omega - \omega' \rangle = 0$$

Poniamo:

$$\tilde{\omega} \stackrel{def}{=} \omega - \omega',$$

donde:

$$\langle \mathbf{e}_i, \tilde{\omega} \rangle = 0$$

Quindi:

$$\left(\forall \mathbf{x} \in E, \ \langle \mathbf{x}, \tilde{\omega} \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i, \tilde{\omega} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \langle \mathbf{e}_i, \tilde{\omega} \rangle = 0 \right) \Longrightarrow \tilde{\omega} = \hat{O} \Longrightarrow \omega = \omega'$$

□

Remark 75. Da qui in avanti utilizziamo la convenzione (di Einstein) di somma sugli indici ripetuti due volte. Ad esempio, la sommatoria:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

andrebbe scritta omettendo il simbolo di sommatoria:

$$a_i b_i$$

Per una ragione che apparirà chiara in seguito, uno dei due indici è scritto in alto, per cui ogni espressione del tipo:

$$a_i b^i$$

significa:

$$\sum_{i} a_i b^i$$

Prendiamo la *n-pla*:

$$(b_1, b_2, ..., b_n) = (1, 0, ..., 0)$$

Per il lemma precedente esiste ed è unica la forma lineare $\theta^1 \in E^*$ tale che:

$$\left\langle \mathbf{e}_i, \theta^1 \right\rangle = \delta_i^1$$

Si ricordi che δ_i^j è la delta di Kronecher:

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Similmente possiamo costruire una forma θ^2:

$$(b_1, b_2, ..., b_n) = (0, 1, ..., 0) \Longrightarrow \exists! \theta^2 \in E^* : \left\langle \mathbf{e}_i, \theta^2 \right\rangle = \delta_i^2$$

Da ciò segue che in corrispondenza delle *n-ple*:

$$(1, 0, ..., 0), (0, 1, ..., 0), ..., (0, 0, ..., 1)$$

esiste ed è unica la *n-pla* di forme lineari:

$$\left\{\theta^j\right\}, \quad j = 1, 2, ..., n$$

tali che:

$$\left\langle \mathbf{e}_i, \theta^j \right\rangle = \delta_i^j$$

Ciò premesso, dimostriamo il:

Teorema 76. $\{\theta^j\}$ è una base dello spazio duale E^*.

Dimostrazione. Si tratta di dimostrare che $\{\theta^j\}$ è un sistema massimo linearmente indipendente. Abbiamo:

$$\lambda_j \theta^j = 0$$

Quindi:

$$\left\langle \mathbf{x}, \lambda_j \theta^j \right\rangle = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in E$$

Se $\mathbf{x}$ è un vettore di base:

$$0 = \left\langle \mathbf{e}_i, \lambda_j \theta^j \right\rangle = \lambda_j \left\langle \mathbf{e}_i, \theta^j \right\rangle = \lambda_j \delta_i^j = \lambda_i \tag{6.7}$$

La (6.7) implica che il sistema $\{\theta^j\}$ è linearmente indipendente. Dimostriamo che tale sistema è di ordine massimo. A tale scopo prendiamo ad arbitrio $\omega \in E^*$, quindi occorre far vedere che $\left\{\omega, \theta^h\right\}$ è linearmente dipendente o, ciò che è lo stesso:

$$\omega = \omega_i \theta^i, \quad \omega_i = \langle \mathbf{e}_i, \omega \rangle \tag{6.8}$$

La (6.8) è vera se le forme lineari ω e $\omega_i \theta^i$ riproducono i medesimi scalari quando agiscono sui vettori di base dello spazio vettoriale E. Risulta:

$$\begin{aligned} \left\langle \mathbf{e}_i, \omega_j \theta^j \right\rangle = \omega_j \left\langle \mathbf{e}_i, \theta^j \right\rangle &= \omega_j \delta_i^j = \omega_i \\ \langle \mathbf{e}_i, \omega \rangle &= \omega_i \end{aligned} \tag{6.9}$$

da cui la validità della (6.8). □

Il teorema appena dimostrato garantisce l'esistenza di una base $\{\theta^j\}$ dello spazio duale E^*, denominata **base duale** associata alla base $\{\mathbf{e}_i\}$ di E. Le grandezze ω_i sono le componenti di $\omega \in E^*$ nella base $\{\theta^j\}$.

6.2 Cambiamento di base nello spazio duale.

Riprendiamo le equazioni relative al cambiamento di base $\{\mathbf{e}_i\} \to \{\mathbf{e}'_i\}$ (§ **??**):

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_i &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\mathbf{e}_k \\ \mathbf{e}_i &= \sum_{k=1}^{n} \beta_{ik}\mathbf{e}'_k, \end{aligned} \tag{6.10}$$

che individuano la matrice $R = (\alpha_{ik})$ e la sua inversa $R^{-1} = (\beta_{ik})$. Se $\mathbf{x}$ è un arbitrario vettore di E:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{e}_i \quad \text{nella base } \{\mathbf{e}_i\} \\ \mathbf{x} &= \sum_{i=1}^{n} x'_i\mathbf{e}'_i \quad \text{nella base } \{\mathbf{e}'_i\} \end{aligned}$$

Le componenti x_i si trasformano secondo la legge:

$$x'_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}x_j \tag{6.11}$$

Utilizzando la convenzione di Einstein possiamo ridefinire gli indici degli elementi di matrice che compaiono nelle equazioni appena scritte:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_i &= \alpha_i^k\mathbf{e}_k \\ \mathbf{e}_i &= \beta_i^k\mathbf{e}'_k, \end{aligned} \tag{6.12}$$

Con tale notazione, la (6.11) si riscrive:

$$x'^i = \beta^i_j x^j \tag{6.13}$$

La (6.13) esprime la legge di trasformazione dei cosiddetti **vettori controvarianti** che per definizione hanno le componenti con gli indici scritti in alto. Inoltre la legge di trasformazione è individuata dall'inversa della matrice R.
Al cambiamento di base $\{\mathbf{e}_i\} \to \{\mathbf{e}'_i\}$ nello spazio vettoriale E, corrisponde nello spazio duale E^* il cambiamento di base $\{\theta^j\} \to \{\theta'^j\}$. Si ricordi che:

$$\begin{aligned} \left\langle \mathbf{e}_i, \theta^j \right\rangle &= \delta_i^j \\ \left\langle \mathbf{e}'_i, \theta'^j \right\rangle &= \delta_i^j \end{aligned}$$

Determiniamo le equazioni di trasformazione che connettono le basi $\{\theta^j\}$, $\{\theta'^j\}$. A tale scopo esprimiamo θ'^j come combinazione lineare delle θ^i:

$$\theta'^j = \gamma_i^j \theta^i \tag{6.14}$$

Per la (6.9):

$$\gamma_i^j = \left\langle \mathbf{e}_i, \theta'^j \right\rangle,$$

donde:

$$\theta'^j = \left\langle \mathbf{e}_i, \theta'^j \right\rangle \theta^i$$

Per la seconda delle (6.12):

$$\theta'^j = \left\langle \beta_i^k \mathbf{e}'_k, \theta'^j \right\rangle \theta^i = \beta_i^k \left\langle \mathbf{e}'_k, \theta'^j \right\rangle \theta^i = \beta_i^k \delta_k^j \theta^i = \beta_i^j \theta^i$$

In maniera simile si ottengono le $\theta^j = f^j(\theta'^i)$. Quindi:

$$\begin{aligned} \theta'^j &= \beta_i^j \theta^i \\ \theta^j &= \alpha_i^j \theta'^i \end{aligned} \tag{6.15}$$

Determiniamo la legge di trasformazione delle forme lineari in corrispondenza di un cambiamento di base $\{\theta^i\} \to \{\theta'^i\}$. Abbiamo:

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_i \theta^i \quad \text{nella base } \left\{\theta^i\right\} \\ \omega &= \omega'_i \theta'^i \quad \text{nella base } \left\{\theta'^i\right\} \end{aligned}$$

Evidentemente:

$$\omega_i \theta^i = \omega'_i \theta'^i = \omega'_i \beta_k^j \theta^k$$

Scrivendo θ^i come $\theta^i = \theta^k \delta_k^i$ e sostituendo nell'equazione precedente:

$$\omega_i \theta^k \delta_k^i - \omega'_i \beta_k^i \theta^k = 0 \Longleftrightarrow \left(\omega_i \delta_k^i - \omega'_i \beta_k^i\right) \theta^k = 0$$

Il sistema di vettori $\{\theta^i\}$ è linearmente indipendente, per cui:

$$\left(\omega_k - \omega'_i \beta_k^i\right) \theta^k = 0 \Longrightarrow \omega_k - \omega'_i \beta_k^i = 0, \quad \text{per } k = 1, 2, ..., n$$

Cioè:

$$\omega_k = \beta_k^i \omega'_i \tag{6.16}$$

Allo stesso modo si giunge a:

$$\omega'_k = \alpha_k^i \omega_i \tag{6.17}$$

Le (6.16) o ciò che è lo stesso le (6.16) compongono le equazioni di trasformazione che connetteno le due basi $\{\theta^i\}$, $\{\theta'^i\}$ dello spazio duale E^*.
Per chiarezza riscriviamo tutte le equazioni ottenute:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_i &= \alpha_i^k \mathbf{e}_k, \quad \theta'^j = \beta_i^j \theta^i \\ \mathbf{e}_i &= \beta_i^k \mathbf{e}'_k, \quad \theta^j = \alpha_i^j \theta'^i \end{aligned} \tag{6.18}$$

Per quanto riguarda i vettori dello spazio E e del suo spazio duale E^*:

$$\begin{aligned} x'^i &= \beta_j^i x^j, \ \ \omega_i = \beta_i^k \omega'_k \\ x^i &= \alpha_j^i x'^j, \ \ \omega'_i = \alpha_i^k \omega_k \end{aligned} \tag{6.19}$$

Si noti che le equazioni relative al cambiamento di base $\{\mathbf{e}_i\} \to \{\mathbf{e}'_i\}$ esibiscono una forma per così dire, speculare rispetto alle equazioni che connettono le basi $\{\theta^i\}$, $\{\theta'^i\}$. Più precisamente, i "vettori" di E^* hanno componenti scritte in basso, e ciò si esprime dicendo che sono **vettori covarianti**.

Capitolo 7

Spazi vettoriali euclidei

7.1 Introduzione

Gli spazi vettoriali euclidei nascono dall'esigenza di introdurre in uno spazio vettoriale nozioni primitive del tipo distanza tra punti, angolo tra direzioni.

7.2 Prodotto scalare

Nell'esempio 73 abbiamo definito il prodotto scalare tra due vettori di $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Più in generale, assegnato un qualunque spazio vettoriale E sul campo reale $\mathbb{R}$, si definisce **prodotto scalare** l'applicazione lineare:

$$\begin{aligned} \cdot : E \times E &\longmapsto \mathbb{R} \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in E \times E &\longmapsto \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

che verifica le proprietà seguenti:

1. Commutatività:
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E$$

2. Associatività rispetto alla moltiplicazione di uno scalare per un vettore:
$$\lambda \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \lambda \mathbf{v} = \lambda \left(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \right), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E$$

3. Proprietà distributiva rispetto alla somma tra vettori:
$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}, \ \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in E$$

4. $\forall \mathbf{u} \in E, \ \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \Longrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

In $\mathbb{R}^n$ il prodotto scalare è così definito:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k, \tag{7.1}$$

essendo $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$.
Si consideri lo spazio vettoriale $C(a, b)$ (§ 2), i cui elementi sono le funzioni reali e continue in $[a, b]$. Il prodotto scalare tra i "vettori" di $C(a, b)$ è definito da:

$$f \cdot g = \int_a^b f(x) g(x) dx \tag{7.2}$$

Infatti:

1. $$g \cdot f = \int_a^b g(x) f(x) dx = \int_a^b f(x) g(x) dx = f \cdot g$$

2. $$(\lambda f) \cdot g = \int_a^b \lambda f(x) g(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) g(x) dx = \lambda f \cdot g$$

3. $$f \cdot (g + h) = \int_a^b f(x) [g(x) + h(x)] dx = \int_a^b f(x) g(x) dx + \int_a^b g(x) h(x) dx$$
$$= f \cdot g + f \cdot h$$

4. $$\forall f \in C(a, b), f \cdot g = 0 \Longrightarrow g(x) \equiv 0$$

Dimostriamo l'ultima implicazione. Deve essere:

$$\forall f \in C(a, b), \int_a^b f(x) g(x) dx = 0 \Longrightarrow g(x) \equiv 0 \tag{7.3}$$

Procediamo per assurdo:

$$\exists x_0 \in [a, b] : g(x_0) \neq 0$$

Senza perdita di generalità supponiamo che sia $g(x_0) > 0$. La continuità della funzione $g(x)$ porge:

$$\exists I_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : x \in I_\delta(x_0) \Longrightarrow g(x) > 0$$

Quindi:

$$g(x) = 0, \quad \text{se } x \in [a, b] - I_\delta(x_0)$$
$$g(x) > 0, \quad \text{se } x \in I_\delta(x_0)$$

Pertanto:

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = \int_{x_0-\delta}^{x_0-\delta} f(x)\, g(x)\, dx \tag{7.4}$$

In forza dell'arbitrarietà della funzione $f(x)$, poniamo:

$$\begin{aligned} &f(x) = 0, \quad \text{se } x \in [a,b] - I_\delta(x_0) \\ &f(x) = [x - (x_0 - \delta)]\,[(x_0 + \delta) - x]\,, \ \ \text{se} x \in I_\delta(x_0) \end{aligned}$$

Con tale posizione, l'integrale (7.4) diventa:

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0-\delta} f(x)\, g(x)\, dx = \int_{x_0-\delta}^{x_0-\delta} [x - (x_0 - \delta)]\,[(x_0 + \delta) - x]\, g(x)\, dx > 0, \tag{7.5}$$

giacchè l'integrando è maggiore di zero. Il risultato (7.5) contraddice l'ipotesi, da cui l'asserto.

Esempi numerici

Consideriamo lo spazio vettoriale $C(0,\pi)$.

$$f(x) = x; \ \ g(x) = \sin x$$

Il prodotto scalare è:

$$f \cdot g = \int_0^\pi x \sin x dx$$

Integriamo per parti:

$$f \cdot g = \int_0^\pi x \sin x dx = \int_0^\pi x d(-\cos x) = -x\cos x|_{x=0}^{x=\pi} + \int_0^\pi \cos x dx = \pi$$

***

Consideriamo lo spazio vettoriale $C(0,b)$ essendo b numero reale positivo preso ad arbitrio. Siano:

$$f(x) = xe^{-x}; \ \ g(x) = \sin x \tag{7.6}$$

Il prodotto scalare è una funzione di b:

$$\begin{aligned} (f \cdot g)(b) &= \int_0^b xe^{-x} \sin x dx \\ &= \frac{1}{2}\left[1 - e^{-b}\left((1+b)\cos b + b \sin b\right)\right] \end{aligned}$$

Il prodotto scalare di f e g date dalla (7.6) ha l'andamento riportato in figura 7.1.

Figura 7.1: Grafico di $(f \cdot g)(b)$.

Osservazione. In $\mathbb{R}^n$ il prodotto scalare tra due vettori è dato dalla somma dei prodotti delle componenti omonime dei vettori medesimi [eq. (7.1)]. In $C(a,b)$ il prodotto scalare tra i "vettori" $f, g \in C(a,b)$ è dato dalla (7.2), che è la generalizzazione al continuo della (7.1). Infatti si passa dalla (7.1) alla (7.2) attraverso la sostituzione $\sum \to \int$. Quindi gli elementi di $C(a,b)$ sono vettori con un numero infinito non numerabile di componenti (in quanto funzioni della variabile continua x).

7.3 Tensore metrico

Sia E uno spazio vettoriale su K. Presi ad arbitrio $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E$, consideriamone le componenti nella base $\{\mathbf{e}_i\}$:

$$\mathbf{u} = u^i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i, \quad (i = 1, 2, ..., n = \dim E)$$

Eseguiamo il prodotto scalare:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \left(u^i \mathbf{e}_i\right) \cdot \left(v^k \mathbf{e}_k\right) = u^i v^k \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k \tag{7.7}$$

Poniamo:

$$g_{ik} \overset{def}{=} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k \tag{7.8}$$

g_{ik} è un "oggetto" a $n(n+1)/2$ componenti, denominato **tensore metrico**. La ragione di tale definizione apparirà chiara in un prossimo capitolo. Il numero delle componenti è $n(n+1)/2$ in forza della simmetria di g_{ik} rispetto alla permutazione degli indici:

$$g_{ki} = \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_i \underset{\text{commutatività del p.s.}}{=} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = g_{ik}$$

Il prodotto scalare (7.7) si scrive:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = g_{ik} u^i v^k \tag{7.9}$$

Per la proprietà 4 del prodotto scalare:

$$\forall \mathbf{u} \in E, \ \ \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \Longrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

In termini del tensore metrico:

$$\forall \mathbf{u} \in E, \ g_{ik} u^i v^k = 0 \Longrightarrow v^k = 0$$

Cioè:

$$\left(g_{ik} v^k = 0, \quad i = 1, 2, ..., n\right) \Longrightarrow v^k = 0, \ \ k = 1, 2, ..., n \tag{7.10}$$

La (7.10) è il sistema omogeneo:

$$\begin{aligned} g_{11}v^1 + g_{12}v^2 ... + g_{1n}v^n &= 0 \\ g_{21}v^1 + g_{22}v^2 ... + g_{2n}v^n &= 0 \\ &.. \\ g_{n1}v^1 + g_{n2}v^2 ... + g_{nn}v^n &= 0 \end{aligned} \tag{7.11}$$

La nostra richiesta si traduce nell'esistenza della sola soluzione banale (o impropria):

$$\left(v^1, v^2, ..., v^n\right) = (0, 0, ..., 0)$$

Come è noto, condizione necessaria e sufficiente affinchè il sistema (7.11) ammetta la sola soluzione impropria è che sia diverso da zero il determinante della matrice dei coefficienti:

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{7.12}$$

Poniamo per definizione:

$$g \stackrel{def}{=} \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix} = \det\left(g_{ik}\right)$$

Quindi la (7.12) si riscrive:

$$g \neq 0 \tag{7.13}$$

***

L'introduzione del prodotto scalare in uno spazio vettoriale E ci consente di introdurre le nozioni di ortogonalità, unitarietà e norma di un vettore.

Definizione. Due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ si dicono ***ortogonali*** se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Osservazione. Il vettore nullo è ortogonale ad ogni vettore di E. Infatti, $\forall \mathbf{v} \in E, \mathbf{v} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$

Definizione. Dicesi ***quadrato*** del vettore $\mathbf{v}$, la grandezza:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = g_{ik}v^i v^k \tag{7.14}$$

Si noti che la (7.14) è una forma quadratica nelle v^i i cui coefficienti sono le componenti del tensore metrico g_{ik}.

Definizione. Un vettore $\mathbf{u}$ dicesi ***vettore unitario*** o ***versore*** se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 1$.

7.4 Spazi vettoriali propriamente euclidei e pseudo-euclidei

Sia E uno spazio vettoriale sul campo K.

Definizione. Lo spazio vettoriale E è ***propriamente euclideo (o euclideo)*** se per ogni $\mathbf{v} \in E$ la forma quadratica $g_{ik}v^i v^k$ è definita positiva. Nel caso contrario, lo spazio vettoriale E dicesi ***pseudo-euclideo***.

La suddetta definizione può essere formulata in termini di prodotto scalare tra i vettori di E. Precisamente, abbiamo visto in 7.2 che una delle proprietà del prodotto scalare è:

$$\forall \mathbf{u} \in E,\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \Longrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

In uno spazio vettoriale propriamente euclideo tale proprietà si specializza nella seguente:

$$\forall \mathbf{v} \in E,\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \begin{cases} > 0, & \text{se } \mathbf{v} \neq \mathbf{0} \\ = 0, & \text{se } \mathbf{v} = \mathbf{0} \end{cases}$$

7.5 Norma di un vettore

Sia E uno spazio vettoriale propriamente euclideo. Dicesi **norma** del vettore $\mathbf{v} \in E$ la grandezza:

$$||\mathbf{v}|| \stackrel{def}{=} \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$$

Sussiste la seguente

Teorema della media.

$$\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in E, \quad |\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}| \leq ||\mathbf{v}|| \cdot ||\mathbf{w}||$$

Dimostrazione. Omessa. □

7.6 Spazi metrici

Uno **spazio metrico** è un qualunque insieme non vuoto S tale che esiste una funzione reale $d(a,b)$ definita in $S \times S$ che verifica le seguenti proprietà:

1. $d(a,b)$ è non negativa:
$$d(a,b) : S \times S \longmapsto [0, +\infty)$$
Inoltre $d(a,b) = 0$ se e solo se $a = b$.

2. $d(a,b)$ è simmetrica rispetto alla permutazione delle variabili indipendenti:
$$d(a,b) = d(b,a), \quad \forall a, b \in S$$

3. $d(a,b)$ verifica la *disuguaglianza triangolare*:
$$d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c), \quad \forall a, b, c \in S$$

Chiamiamo $d(a,b)$ **distanza** tra gli elementi di S.
Consideriamo il caso speciale $S = E$ spazio vettoriale su K. Una possibile definizione di distanza è:

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = ||\mathbf{x}-\mathbf{y}|| \tag{7.15}$$

È facile rendersi conto che la (7.15) verifica gli assiomi precedenti.

7.7 Base ortonormale

Definizione. Un sistema $\Sigma = \{\mathbf{w}_i\}$ con $i = 1, 2, ..., r \leq n = \dim E$, dicesi ***ortonormale*** se:

$$\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_j = \delta_{ij}, \tag{7.16}$$

cioè se i suoi vettori sono versori e sono mutuamente ortogonali.

L'ortonormalità di un sistema di vettori implica l'indipendenza lineare dello stesso. Invero, sussiste la seguente:

Proposizione.

$$(\Sigma = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_r\} \text{ è ortonormale}) \Longrightarrow (\Sigma \text{ è linearmente indipendente})$$

Dimostrazione. Studiamo le soluzioni rispetto a λ^i dell'equazione:

$$\lambda^i \mathbf{w}_i = \mathbf{0} \tag{7.17}$$

A tale scopo moltiplichiamo scalarmente per $\mathbf{w}_k$ $(k = 1, 2, ..., n)$ primo e secondo membro della (7.17):

$$\lambda^i \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_k = \mathbf{0} \cdot \mathbf{w}_k = 0$$

Tenendo conto della (7.16):

$$\lambda^i \delta_{ik} = 0 \Longrightarrow \lambda^k = 0, \text{ per } k = 1, 2, ..., r$$

da cui segue che Σ è linearmente indipendente. □

Definizione. Per $r = n$ si ha che Σ è un sistema massimo linearmente indipendente, cioè una base. Si conclude che ogni sistema ortonormale di ordine $r = n$ è una base di E, denominata ***base ortonormale***

***

L'algoritmo che implementa l'ortonormalizzazione di una base generica $\{\hat{\mathbf{e}}_i\}$ è noto come **procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt**:

$$\hat{\mathbf{e}}'_i = \frac{\mathbf{a}_i}{||\mathbf{a}_i||},$$

essendo:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a}_1 &= \mathbf{e}_1 \\
\mathbf{a}_2 &= \mathbf{e}_2 - \frac{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{e}_2}{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1}\mathbf{a}_1 \\
\mathbf{a}_3 &= \mathbf{e}_3 - \frac{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{e}_3}{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2}\mathbf{a}_2 - \frac{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{e}_3}{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1}\mathbf{a}_1 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\mathbf{a}_n &= \mathbf{e}_n - \frac{\mathbf{a}_{n-1} \cdot \mathbf{e}_n}{\mathbf{a}_{n-1} \cdot \mathbf{a}_{n-1}}\mathbf{a}_{n-1} - \dots - \frac{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{e}_n}{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1}\mathbf{a}_1
\end{aligned}
\tag{7.18}
$$

Esempio 77. Assegnati i vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{e}_1 = (1,1,1)\,,\ \mathbf{e}_2 = (1,-2,1)\,,\ \mathbf{e}_3 = (1,2,3)\,,$$

provare che $\{\mathbf{e}_i\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$, determinando poi la base ortonormale $\{\mathbf{e}'_i\}$ attraverso il procedimento di Gram-Schimidt

Soluzione 78. Studiamo l'equazione vettoriale:

$$\lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2 + \lambda_3\mathbf{e}_3 = \mathbf{0},$$

equivalente al sistema lineare omogeneo:

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\
\lambda_1 - 2\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0 \\
\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 &= 0,
\end{aligned}
$$

che ammette l'unica soluzione $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0,0,0)$, donde $\{\mathbf{e}_i\}$ è manifestamente una base di $\mathbb{R}^3$. Per ortonormalizzare $\{\mathbf{e}_i\}$, applichiamo le (7.18) che in questo caso si scrivono:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a}_1 &= \mathbf{e}_1 \\
\mathbf{a}_2 &= \mathbf{e}_2 - \frac{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{e}_2}{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1}\mathbf{a}_1 \\
\mathbf{a}_3 &= \mathbf{e}_3 - \frac{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{e}_3}{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2}\mathbf{a}_2 - \frac{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{e}_3}{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1}\mathbf{a}_1
\end{aligned}
$$

da cui:

$$\mathbf{a}_1 = (1,1,1)\,,\ \mathbf{a}_2 = (1,-2,1)\,,\ \mathbf{a}_3 = (-1,0,1)$$

La norma di singolo vettore:

$$||\mathbf{a}_1|| = \sqrt{3},\ ||\mathbf{a}_2|| = \sqrt{6},\ ||\mathbf{a}_3|| = \sqrt{2},$$

quindi:

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{e}}_1 &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\
\hat{\mathbf{e}}_2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \\
\hat{\mathbf{e}}_3 &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}
$$

***

Sia $\{\mathbf{e}_i\}$ una base ortonormale di uno spazio propriamente euclideo E (*n-dimensionale*). Preso ad arbitrio $\mathbf{x} \in E$:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i \tag{7.19}$$

moltiplichiamo scalarmente per $\mathbf{e}_k$ $(k = 1, 2, ..., n)$ primo e secondo membro della (7.19):

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_k = \sum_{i=1}^{n} x_i \delta_{ik},$$

da cui:

$$x_k = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_k, \quad \text{per } k = 1, 2, ..., n \tag{7.20}$$

La (7.20) esprime le componenti del vettore $\mathbf{x}$ nella base $\{\mathbf{e}_i\}$. Spesso le x_k si indicano con c_k noti come **coefficienti di Fourier** del vettore $\mathbf{x}$ rispetto alla base $\{\mathbf{e}_i\}$.

7.8 Polinomi ortonormali

Definizione. Dicesi ***polinomio trigonometrico di ordine*** n, la funzione reale di variabile reale:

$$\tau_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)], \quad a_k, b_k \in \mathbb{R}$$

Indichiamo con $T_n(-\pi, \pi)$ l'insieme dei polinomi trigonometrici di ordine n, per $x \in [-\pi, \pi]$. Tale insieme assume la struttura di spazio vettoriale reale, e la $(2n+1)$-*pla* di scalari $(a_0, a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n)$ sono le componenti del "vettore" $\tau_n(x)$ nella base:

$$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, ..., \cos(nx), \sin(nx)\} \tag{7.21}$$

Poniamo:

$$\begin{aligned} e_1(x) &= 1 \\ e_2(x) &= \cos x \\ e_3(x) &= \sin x \\ &... \\ e_{2n}(x) &= \cos(nx) \\ e_{2n+1}(x) &= \sin(nx) \end{aligned} \tag{7.22}$$

Da ciò segue che $\dim T_n(-\pi, \pi) = 2n + 1$. Definiamo il prodotto scalare:

$$\tau_n \cdot \tau_n' = \int_{-\pi}^{\pi} \tau_n(x) \tau_n'(x) \, dx,$$

in forza del quale lo spazio vettoriale $T_n(-\pi, \pi)$ risulta essere propriamente euclideo.

Inoltre la base (7.21) è ortogonale in forza delle seguenti identità:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\cos(k'x) = 0, \quad \forall k, k' \in \mathbb{N}$$

Cioè:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e_k(x)\, e_{k'}(x)\, dx = 0, \quad \text{se } k \neq k'$$

Tale base non è però ortonormale, in quanto i suoi vettori non sono unitari:

$$||e_1(x)||^2 = \int_{-\pi}^{\pi} e_1(x)\, e_1(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(kx) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(kx) = \pi$$

Un vettore $\mathbf{v}$ non unitario è legato al suo versore da:

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{||\mathbf{v}||} \tag{7.23}$$

La (7.23) ci consente di passare dal vettore $\mathbf{v}$ al corrispondente vettore normalizzato $\hat{\mathbf{v}}$. Quindi:

$$\hat{e}_1(x) = \frac{e_1(x)}{||e_1(x)||} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\hat{e}_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad k > 1$$

Da cui otteniamo la base ortonormale dello spazio $T_n(-\pi, \pi)$.

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, ..., \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx) \right\} \tag{7.24}$$

***

La nozione di polinomi ortonormali si generalizza nel modo seguente. Consideriamo lo spazio vettoriale $C(a, b)$ con prodotto scalare:

$$f \cdot g = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx, \quad f, g \in C(a, b)$$

Sia:

$$\Sigma = \{p_1(x), p_2(x), ..., p_r(x)\}$$

diremo che Σ è ortonormale se:

$$\int_a^b p_i(x)\, p_j(x)\, dx = \delta_{ij}$$

Parte III

Appendici

Appendice A

Soluzioni degli esercizi proposti

A.1 Calcolo di determinanti del secondo ordine

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{21} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} \end{pmatrix}$$

$$A + B - D = \begin{pmatrix} -p-2 & -q \\ 4-r & -1-s \\ 9-t & 9-u \end{pmatrix}$$

Quindi:

$$A + B - D = 0 \Longleftrightarrow (p = -2, q = 0, r = 4, s = -1, t = 9, u = 9)$$

cioè:

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -1 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}$$

***

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A - C = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -5 \\ 5 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$-2A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 6 \\ -10 & 0 & -4 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A + (B - C) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 9 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$(A + B) - C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 9 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$D = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix}$$

ed è tale che:

$$A + D = B$$

Ciò implica:

$$\begin{pmatrix} 1 + x_1 & 2 + x_2 & -2 + x_3 \\ 5 + x_4 & x_5 & 2 + x_6 \\ 1 + x_7 & -1 + x_8 & 1 + x_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

da cui:

$$\begin{aligned} 1 + x_1 &= 3 \\ 2 + x_2 &= -1 \\ -3 + x_3 &= 2 \\ 5 + x_4 &= 4 \\ 2 + x_6 &= 5 \\ 1 + x_7 &= 2 \\ -1 + x_8 &= 0 \\ 1 + x_9 &= 3 \end{aligned}$$

Quindi:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} B - A &= \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ -(A - B) &= -\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

***

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 5;$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 1 = 5; \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix} = \sin^2\alpha + \cos^2 a = 1;$$

$$\begin{vmatrix} \alpha + i\beta & \gamma + i\delta \\ \gamma - i\delta & \alpha - i\beta \end{vmatrix} = \alpha^2 + \beta^2 - \left(\gamma^2 + \delta^2\right) = \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2$$

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha & \sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix} = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos a = \sin(\alpha - \beta)$$

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix} = \cos\alpha\cos\beta - \sin\beta\sin\alpha = \cos(\alpha + \beta)$$

$$\begin{vmatrix} \tan\alpha & -1 \\ 1 & \tan\beta \end{vmatrix} = \tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \lg_b a \\ \lg_a b & 1 \end{vmatrix} = 1 - \lg_a b \lg_b a \underset{(\lg_a b = \lg_b a)}{=} 0$$

$$\begin{vmatrix} a+b & b+d \\ a+c & c+d \end{vmatrix} = ac + bd - ab - cd = a(c-b) + d(b-c)$$

$$\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a-b \end{vmatrix} = a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2 = 4ab$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^3 & x^2+x+1 \end{vmatrix} = (x-1)\left(x^2+x+1\right) - x^3 = x^3 - 1 - x^3 = -1$$

$$\begin{vmatrix} \omega & \omega \\ -1 & \omega \end{vmatrix} = \omega^2 + \omega = \left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]^2 + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

A.2 Determinanti del terzo ordine

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(0+1) + (1+1) = +1$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(0-1) + (1-0) = +1 + 1 = 2$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix} &= a^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ -1 & 1 & x \\ -1 & -1 & x \end{vmatrix} = a^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & a+x \\ -1 & -1 & x \end{vmatrix} \\ &= a^2 \left(\begin{vmatrix} 2 & a+x \\ -1 & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a \\ 2 & a+x \end{vmatrix} \right) \\ &= 2a^2(a+x) \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1-i) \begin{vmatrix} i & 1+i \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(1+i)(1-i) = -2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} \\ \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3} & 1 & \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} \\ \cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} \\ \cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3} & 1 \end{vmatrix} - \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \begin{vmatrix} \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} \\ \cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4} & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \begin{vmatrix} \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3} & 1 \\ \cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3} \end{vmatrix}$$

$$= 0 - \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\left[\frac{i}{2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{i}{2}}{\sqrt{2}} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right] + \left(-1 - \frac{1+i}{2}\right)$$

$$= -1 - \frac{1-i}{\sqrt{2}} - 1 - \frac{1+i}{\sqrt{2}} = -2 - \sqrt{2}$$

Poniamo:

$$\Delta \overset{def}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{vmatrix} = -\omega\left(\omega^3 - 3\omega + 2\right)$$

per $\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$:

$$\Delta = -3i\sqrt{3}$$

A.3 Determinanti di ordine qualsiasi

Si tratta di determinare gli zeri della funzione $f(x)$. Lo sviluppo del determinante porge:

$$f(x) = x^2 - x - 8,$$

donde:

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{33}\right)$$

***

Per una nota proprietà, il determinante di una matrice diagonale è pari al prodotto degli elementi della diagonale principale, donde:

$$\det A_{diag} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$$

***

Il calcolo diretto di $\Delta(n)$ (eq. 1.55) porge:

$$\Delta(2) = -1,\ \Delta(3) = -1,\ \Delta(4) = 1,\ \Delta(5) = 1,\ \Delta(6) = -1$$

Da ciò segue che:

$$\Delta(n) = (-1)^{k(n)},$$

essendo $k(n)$ tale che:

$$k(n) = \begin{cases} \text{dispari}, & n = 2 \\ \text{dispari}, & n = 3 \\ \text{pari}, & n = 4 \\ \text{pari}, & n = 5 \\ \text{dispari}, & n = 6 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{A.1}$$

La (A.1) implica che $k(n)$ deve essere del tipo:

$$k(n) = an^2 + bn \tag{A.2}$$

Affinchè sia valida la (A.1):

$$\begin{aligned} 4a + 2b &= 1 \\ 9a + 3b &= 3, \end{aligned}$$

da cui:

$$(a, b) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \Longrightarrow k(n) = \frac{n(n-1)}{2}$$

Si conclude:

$$\Delta(n) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

***

Il calcolo diretto di $\Delta(n)$ (eq. 1.56) porge:

$$D(2) = 2,\ D(3) = 6,\ D(4) = 24,\ \ D(5) = 120,\ \ D(6) = 720$$

Da ciò segue:

$$D(n) = nD(n-1)$$

Quindi:

$$D(n) = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$$

***

Calcoliamo direttamente $F(n)$ per $n = 2, 3$. La (1.57) è:

$$\begin{aligned} f_2(x) &= x(x-1) \\ f_3(x) &= x(x-1)(x-2) \end{aligned} \tag{A.3}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} F(2) &= \begin{vmatrix} f_2(0) & f_2(1) & f_2(2) \\ f_2(1) & f_2(2) & f_2(3) \\ f_2(2) & f_2(3) & f_2(4) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 12 \end{vmatrix} = -8; \\ F(3) &= \begin{vmatrix} f_3(0) & f_3(1) & f_3(2) & f_3(3) \\ f_3(1) & f_3(2) & f_3(3) & f_3(4) \\ f_3(2) & f_3(3) & f_3(4) & f_3(5) \\ f_3(3) & f_3(4) & f_3(5) & f_3(6) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 24 \\ 0 & 3 & 24 & 60 \\ 3 & 24 & 60 & 120 \end{vmatrix} = 1296 \end{aligned}$$

Osserviamo che:

$$\begin{aligned} (2!)^3 &= 8 \\ (3!)^4 &= 1296 \end{aligned}$$

donde:

$$|F(n)| = n!^{n+1}$$

Inoltre:

$$\frac{n(n-1)}{2} = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 2, & n = 2 \end{cases}$$

Quindi:

$$F(n) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n!^{n+1}$$

***

Eseguiamo il calcolo esplicito per $n = 2$:

$$G(x, 2) = \begin{vmatrix} f_2(x) & f_2'(x) & f_2''(x) \\ f_2'(x) & f_2''(x) & f_2'''(x) \\ f_2''(x) & f_2'''(x) & f_2^{(4)}(x) \end{vmatrix}$$

Dalla prima delle (A.3):

$$f_2'(x) = 2x - 1;\ f_2''(x) = 2;\ f_2'''(x) = f_2^{(4)}(x) = 0$$

Quindi:

$$G(x,2) = \begin{vmatrix} x^2 - x & 2x-1 & 2 \\ 2x-1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -8$$

Eseguiamo il calcolo esplicito per $n = 3$:

$$G(x,3) = \begin{vmatrix} f_3(x) & f_3'(x) & f_3'(x) & f_3'''(x) \\ f_3'(x) & f_3'(x) & f_3'''(x) & f_3^{(4)}(x) \\ f_3'(x) & f_3'''(x) & f_3^{(4)}(x) & f_3^{(5)}(x) \\ f_3'''(x) & f_3^{(4)}(x) & f_3^{(5)}(x) & f_3^{(6)}(x) \end{vmatrix}$$

Dalla seconda delle (A.3):

$$\begin{aligned} f_3'(x) &= 3x^2 - 6x + 2 \\ f_3''(x) &= 6(x-1) \\ f_3'''(x) &= 6 \\ f_3^{(r)}(x) &= 0,\ (r = 4, 5, ...) \end{aligned}$$

Quindi:

$$G(x,3) = \begin{vmatrix} x(x-1)(x-2) & 3x^2-6x+2 & 6(x-1) & 6 \\ 3x^2-6x+2 & 6(x-1) & 6 & 0 \\ 6(x-1) & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1296$$

Si conclude che: 1) $G(x,n) \equiv G(n)$; 2) $G(n) = F(n) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n!^{n+1}$.

***

Risolviamo la (1.58) per alcuni valori di n. Per $n = 1$ la soluzione è immediata:

$$\begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & a_1 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow x - a_1 = 0 \Longleftrightarrow x = a_1$$

Per $n = 2$:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow (x-a_1)(x-a_2)(a_2-a_1) = 0 \Longleftrightarrow x = a_1, a_2$$

Per $n = 3$:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow (x-a_1)(x-a_2)(a_2-a_1)(a_3-a_1) = 0 \Longleftrightarrow x = a_1, a_2, a_3$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & ... & x^{n-1} \\ 1 & a_1 & a_1^2 & ... & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & ... & a_2^{n-1} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & ... & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \prod_{k=1}^{n-1} (x - a_k) = 0 \Longleftrightarrow x = a_1, a_2, ..., a_n$$

***

La (1.59) per $n = 2$ si scrive:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1-x \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow x = 0$$

Per $n = 3$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow x(x-1) = \Longleftrightarrow x = 0, 1$$

Per $n = 4$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3-x \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow x\left(x^2 - 3x + 2\right) = 0 \Longleftrightarrow x = 0, 1, 2$$

Per $n = 5$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3-x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4-x \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow x\left(x^3 - 6x^2 + 11x - 6\right) = 0 \Longleftrightarrow x = 0, 1, 2, 3$$

Si conclude che (1.59) è un'equazione di grado $n - 1$, le cui soluzioni sono:

$$x = 0, 1, 2, ..., n - 2$$

***

Risolviamo la (1.60) per $n = 2$:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1 & a_1 + a_2 - x \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow a_1(a_1 - x) = 0 \Longleftrightarrow x = a_1$$

Per $n = 2$:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_1+a_2-x & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_2+a_3-x \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow a_1\left(a_1-x\right)\left(a_2-x\right)=0 \Longleftrightarrow x=a_1,a_2$$

Per $n=3$:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_1+a_2-x & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_2+a_3-x & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_3+a_4-x \end{vmatrix}$$
$$= a_1\left(a_1-x\right)\left(a_2-x\right)\left(a_3-x\right)=0 \Longleftrightarrow x=a_1,a_2,a_3$$

Per $n=4$:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ a_1 & a_1+a_2-x & a_3 & a_4 & a_5 \\ a_1 & a_2 & a_2+a_3-x & a_4 & a_5 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_2+a_3-x & a_5 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_3 & a_3+a_4-x \end{vmatrix}$$
$$= a_1\left(a_1-x\right)\left(a_2-x\right)\left(a_3-x\right)=0 \Longleftrightarrow x=a_1,a_2,a_3,a_4$$

Per ogni n:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & ... & a_n \\ a_1 & a_1+a_2-x & a_3 & ... & a_n \\ a_1 & a_2 & a_2+a_3-x & ... & a_n \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_1 & a_2 & a_3 & ... & a_{n-1}+a_n-x \end{vmatrix}$$
$$= \prod_{k=1}^{n-1} a_k\left(a_k-x\right)=0 \Longleftrightarrow x=a_k, \quad (k=1,2,...,n-1)$$

***

Il determinante (1.61) è nullo, in quanto la terza colonna è combinazione lineare delle prime due. Infatti:

$$\alpha^2+6\alpha+9 = C_1\alpha^2+C_2\left(\alpha^2+2\alpha+1\right)+C_3\left(\alpha^2+4\alpha+4\right),$$

da cui:

$$\begin{aligned} C_1+C_2+C_3 &= 1 \\ 0+2C_2+4C_3 &= 6 \\ 0+C_2+4C_3 &= 9 \end{aligned}$$

Tale sistema lineare è compatibile e determinato:

$$(C_1, C_2, C_3) = (1, 6, 9)$$

Quindi:

$$(k+3)^2 = k^2 - 3(k+1)^2 + 3(k+2), \quad k = \alpha, \beta, \gamma,$$

da cui l'annullarsi del determinante.

***

La matrice complementare della (1.62) relativa all'elemento 11 è la matrice diagonale di ordine $n-1$:

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_2 & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_3 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_n \end{pmatrix}$$

Il complemento algebrico dell'elemento 11 è:

$$\alpha_{11} = (-1)^2 M_{11},$$

essendo:

$$M_{11} = \det A_{11} = \prod_{k=2}^{n} a_k$$

È facile rendersi conto che:

$$M_{ij} = 0 \text{ se } i \neq j,$$

poiché ogni A_{ij} con $i \neq j$ ha una riga nulla. Ad esempio:

$$A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & a_2 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_n \end{pmatrix}$$

Inoltre:

$$A_{22} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_3 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_n \end{pmatrix},$$

quindi:

$$\alpha_{22} = M_{22} = \det A_{22} = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq 2}}^{n} a_k$$

Si conclude che:

$$\alpha_{ij} = 0, \text{ se } i \neq j$$
$$\alpha_{ii} = \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} a_k$$

Passando alla somma dei complementi algebrici:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij} &= \sum_{i=1}^{n}\alpha_{ii} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} a_k \\
&= a_2a_3...a_n + a_1a_3...a_n + ... + a_1a_2...a_{n-1} \\
&= a_1a_2...a_n\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}\right)
\end{aligned}$$

$$***$$

È conveniente eseguire il calcolo diretto per $n = 3$. La matrice (1.63) è:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 \\ 0 & a_2 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Segue:

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \begin{vmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \alpha_{11} = 0 \\
A_{12} &= \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \alpha_{12} = 0 \\
A_{13} &= \begin{vmatrix} 0 & a_2 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix} = -a_2a_3 \Longrightarrow \alpha_{13} = -b_2b_3 \\
A_{21} &= \begin{vmatrix} 0 & a_1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \alpha_{22} = 0 \\
A_{22} &= \begin{vmatrix} 0 & a_1 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix} = -a_1a_3 \Longrightarrow \alpha_{22} = 0 \\
A_{23} &= \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \alpha_{23} = 0 \\
A_{31} &= \begin{vmatrix} 0 & a_1 \\ a_2 & 0 \end{vmatrix} = -a_1a_2 \Longrightarrow \alpha_{31} = -a_1a_2 \\
A_{32} &= \begin{vmatrix} 0 & a_1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \alpha_{32} = 0 \\
A_{33} &= \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \alpha_{33} = 0
\end{aligned}$$

Sommando:

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\alpha_{ij} = -\left(a_1 a_2 a_3\right)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2}\right)$$

Per ogni n:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij} = \left(-1\right)^n a_1 a_2 ... a_n\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}\right)$$

***

Sviluppando (1.64):

$$\begin{aligned}\Delta &= a\underbrace{\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}_{=+3} - b\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}_{=+1} \\ &= +c\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}_{=+2} - d\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}}_{=-1} \\ &= 3a - b + 2c - d\end{aligned}$$

***

Sviluppando (1.65):

$$\begin{aligned}\Delta &= -x\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{=+1} + y\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{=-1} + z\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{=1} + 4\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}_{4} \\ &= 4t - (x + y + z)\end{aligned}$$

***

Sviluppando (1.66):

$$\begin{aligned}\Delta &= a\underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}_{=+2} - b\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}_{=+1} + c\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}_{=-1} - d\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{=1} \\ &= 2a - b + c - d\end{aligned}$$

***

17. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ -1 & 0 & 3 & ... & n \\ -1 & -2 & 0 & ... & n \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ -1 & -2 & -3 & ... & 0 \end{vmatrix}$; è conveniente eseguire il calcolo diretto per alcuni significativi valori dell'intero naturale n:

$$n = 2: \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 = 2!$$

$$n = 3: \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 6 = 3!$$

$$n = 4: \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 24 = 6!$$

$$n = 5: \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & 0 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 120 = 5!$$

Si conclude che per ogni n, il determinante vale $n!$.

18. Anche qui è conveniente calcolare per assegnati n:

$$n = 2: \begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_1 + b_1 \end{vmatrix} = b_1$$

$$n = 3: \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & a_1 + b_1 & a_2 \\ 1 & a_1 & a_2 + b_2 \end{vmatrix} = b_1 b_2$$

$$n = 4: \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_2 \\ 1 & a_1 + b_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & a_1 & a_2 + b_2 & a_3 \\ 1 & a_1 & a_2 & a_3 + b_3 \end{vmatrix} = b_1 b_2 b_3$$

Si conclude che $D(n) = \prod_{k=1}^{n} b_k$

19. Esplicitando per i vari n:

$$n = 2;\ f_2(x; x_1) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = x - x_1$$

$$n = 3;\ f_3(x; x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & x & x_2 \\ 1 & x_1 & x \end{vmatrix} = (x - x_1)(x - x_2)$$

$$n=4;\ f_4\left(x;x_1,x_2,x_3\right)=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & x & x_2 & x_3 \\ 1 & x_1 & x & x_3 \\ 1 & x_1 & x_2 & x \end{vmatrix}=\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\left(x-x_3\right)$$

Si conlude che:

$$f_n\left(x;x_1,x_2,...,x_n\right)=\prod_{k=1}^{n}\left(x-x_k\right)$$

20. Esplicitiamo (1.67) per diversi valori di n:

$$\Delta\left(2\right)=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=1$$

$$\Delta\left(3\right)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}=2$$

$$\Delta\left(4\right)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \end{vmatrix}=6$$

$$\Delta\left(5\right)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 7 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 9 \end{vmatrix}=24$$

Si conclude che $\Delta\left(n\right)=\left(n-1\right)!$

21. Esplicitiamo (1.68) per diversi valori di n:

$$\Delta\left(2\right)=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=-2$$

$$\Delta\left(3\right)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}=-2$$

$$\Delta\left(4\right)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}=-4$$

$$\Delta\left(5\right)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 5 \end{vmatrix}=-12$$

Si conclude che $\Delta\left(n\right)=-2\left(n-2\right)!$

22. Risulta:

$$n=1 \Longrightarrow \phi(b_1)=\begin{vmatrix} 1 & b_1 \\ -1 & 1-b_1 \end{vmatrix}=1$$

$$n=2 \Longrightarrow \phi(b_1,b_2)=\begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 \\ -1 & 1-b_1 & b_2 \\ 0 & -1 & 1-b_2 \end{vmatrix}=1$$

$$n=3 \Longrightarrow \phi(b_1,b_2,b_3)=\begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 \\ -1 & 1-b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_2 & b_2 \\ 0 & 0 & -1 & 1-b_2 \end{vmatrix}=1$$

Da ciò segue:

$$\forall n \in \mathbb{N}-\{0\}\,,\ \ \phi(b_1,b_2,...,b_n)=1$$

23. Risulta:

$$\Delta(2)=\begin{vmatrix} a & a+h \\ -a & a \end{vmatrix}=a(2a+h)$$

$$\Delta(3)=\begin{vmatrix} a & a+h & a+2h \\ -a & a & 0 \\ 0 & -a & a \end{vmatrix}=3a^2(a+h)$$

$$\Delta(4)=\begin{vmatrix} a & a+h & a+2h & a+3h \\ -a & a & 0 & 0 \\ 0 & -a & a & 0 \\ 0 & 0 & -a & a \end{vmatrix}=2a^3(2a+3h)$$

$$\Delta(5)=\begin{vmatrix} a & a+h & a+2h & a+3h & a+4h \\ -a & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a & a \end{vmatrix}=5a^4(a+2h)$$

Da ciò segue che:

$$\Delta(n)=a^{n-1}f_n$$

Deve essere:

$$f_2=2a+h$$

$$f_3=3(a+h)=3\left(a+\frac{3-1}{2}h\right)$$

$$f_4=4\left(2a+\frac{3}{2}h\right)$$

$$f_5=5(a+2h)=5\left(a+\frac{5-1}{2}h\right)$$

$$...$$

$$f_n=n\left(a+\frac{n-1}{2}h\right),$$

cioè:

$$\Delta(n) = na^{n-1}\left(a + \frac{n-1}{2}h\right)$$

24. Per $n = 4$:

$$\Delta(4) = \begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & 0 \\ a_2 & 0 & x & -1 \\ a_3 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$$

Per ogni n:

$$\Delta(n) = a_0x^{n-1} + a_1x^{n-2} + ... + a_3$$

25. Per $n = 4$:

$$\Delta(4) = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix} = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$$

Per ogni n:

$$\Delta(n) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$$

26. Il determinante (1.72) è:

$$\begin{vmatrix} \sum_{k=1}^{r_1}\alpha_{1k}a_1^k & \sum_{k=1}^{r_1}\alpha_{1k}a_2^k & ... & \sum_{k=1}^{r_1}\alpha_{1k}a_n^k \\ \sum_{k=1}^{r_2}\alpha_{2k}a_1^k & \sum_{k=1}^{r_2}\alpha_{2k}a_2^k & ... & \sum_{k=1}^{r_2}\alpha_{2k}a_n^k \\ ... & ... & ... & ... \\ \sum_{k=1}^{r_n}\alpha_{nk}a_1^k & \sum_{k=1}^{r_n}\alpha_{nk}a_2^k & ... & \sum_{k=1}^{r_n}\alpha_{nk}a_n^k \end{vmatrix}, \tag{A.4}$$

poiché:

$$f_h(x) = \sum_{k=1}^{r_k}\alpha_{hk}x^h, \quad h = 1, 2, ..., n$$

Per una nota proprietà dei determinanti, la (A.4) può essere scritta come:

$$
\begin{vmatrix}
\alpha_{11}a_1 & \sum_{k=1}^{r_1}\alpha_{1k}a_2^k & \dots & \sum_{k=1}^{r_1}\alpha_{1k}a_n^k \\
\alpha_{21}a_1 & \sum_{k=1}^{r_2}\alpha_{2k}a_2^k & \dots & \sum_{k=1}^{r_2}\alpha_{2k}a_n^k \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
\alpha_{n1}a_1 & \sum_{k=1}^{r_n}\alpha_{nk}a_2^k & \dots & \sum_{k=1}^{r_n}\alpha_{nk}a_n^k
\end{vmatrix} +
$$

$$
+ \begin{vmatrix}
\alpha_{12}a_1^2 & \sum_{k=1}^{r_1}\alpha_{1k}a_2^k & \dots & \sum_{k=1}^{r_1}\alpha_{1k}a_n^k \\
\alpha_{22}a_1^2 & \sum_{k=1}^{r_2}\alpha_{2k}a_2^k & \dots & \sum_{k=1}^{r_2}\alpha_{2k}a_n^k \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
\alpha_{n2}a_1^n & \sum_{k=1}^{r_n}\alpha_{nk}a_2^k & \dots & \sum_{k=1}^{r_n}\alpha_{nk}a_n^k
\end{vmatrix} + \dots
$$

$$
\dots + \begin{vmatrix}
\alpha_{1r_1}a_1^{r_1} & \sum_{k=1}^{r_1}\alpha_{1k}a_2^k & \dots & \sum_{k=1}^{r_1}\alpha_{1k}a_n^k \\
\alpha_{2r_1}a_1^{r_1} & \sum_{k=1}^{r_2}\alpha_{2k}a_2^k & \dots & \sum_{k=1}^{r_2}\alpha_{2k}a_n^k \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
\alpha_{nr_1}a_1^{r_1} & \sum_{k=1}^{r_n}\alpha_{nk}a_2^k & \dots & \sum_{k=1}^{r_n}\alpha_{nk}a_n^k
\end{vmatrix}
$$

$$
= \sum_{k=1}^{r_1} \left[a_1^k \begin{vmatrix}
\alpha_{1k} & \sum_{k=1}^{r_1}\alpha_{1k}a_2^k & \dots & \sum_{k=1}^{r_1}\alpha_{1k}a_n^k \\
\alpha_{2k} & \sum_{k=1}^{r_2}\alpha_{2k}a_2^k & \dots & \sum_{k=1}^{r_2}\alpha_{2k}a_n^k \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
\alpha_{nk} & \sum_{k=1}^{r_n}\alpha_{nk}a_2^k & \dots & \sum_{k=1}^{r_n}\alpha_{nk}a_n^k
\end{vmatrix} \right]
$$

$$
= \sum_{k=1}^{r_1}\sum_{k=1}^{r_2}\dots\sum_{k=1}^{r_n} a_1^k a_2^k \dots a_n^k \begin{vmatrix}
\alpha_{1k} & \alpha_{1k} & \dots & \alpha_{1k} \\
\alpha_{2k} & \alpha_{2k} & \dots & \alpha_{2k} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
\alpha_{nk} & \alpha_{nk} & \dots & \alpha_{nk}
\end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix}
1 & 1 & \dots & 1 \\
1 & 1 & \dots & 1 \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
1 & 1 & \dots & 1
\end{vmatrix} \sum_{k=1}^{r_1}\sum_{k=1}^{r_2}\dots\sum_{k=1}^{r_n} a_1^k a_2^k \dots a_n^k \alpha_{1k}\alpha_{2k}\dots\alpha_{nk}
$$

$$
= 0
$$

27. Per $n = 1, 2, 3$:

$$n = 1 \Longrightarrow f(x_1; y_1) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ -y_1 & x_1 \end{vmatrix} = a_0 x_1 + a_1 y_1$$

$$n = 2 \Longrightarrow f(x_1, x_2; y_1, y_2) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ -y_1 & x_1 & 0 \\ 0 & -y_2 & x_2 \end{vmatrix} = a_0 x_1 x_2 + a_1 x_2 y_1 + a_2 y_1 y_2$$

$$n = 3 \Longrightarrow f(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -y_1 & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & -y_2 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & -y_3 & x_3 \end{vmatrix}$$
$$= a_0 x_1 x_2 x_3 + a_1 x_2 x_3 y_1 + a_2 x_3 y_1 y_2 + a_3 y_1 y_2 y_3$$

Per tutti gli n:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n; y_1, y_2, ..., y_n) = \sum_{h=0}^{n} a_k \prod_{k=1}^{h} y_k \prod_{j=h+1}^{n} x_j$$

28. Per $n = 1, 2, 3$:

$$f_1(x) = \begin{vmatrix} a_0 & 0 \\ -1 & x \end{vmatrix} = a_0 x$$

$$f_2(x) = \begin{vmatrix} 2a_0 & a_1 & 0 \\ -2 & x & 0 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix} = 2\left(a_0 x^2 + 2a_1\right)$$

$$f_3(x) = \begin{vmatrix} 6a_0 & 2a_1 & a_2 & a_3 \\ -3 & x & 0 & 0 \\ 0 & -2 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = 3!\left(a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_0\right)$$

Per tutti gli n:

$$f_n(x) = n! \sum_{k=0}^{n} a_k x^{3-k}$$

Figura A.1: Grafico di $f_n(x)$ per $n = 1, 2, 3, ..., 7$.

29. Esplicitiamo (1.75):

$$
\begin{aligned}
D(1) &= 2 \\
D(2) &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \\
D(3) &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \\
D(4) &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \\
D(5) &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 \\
&\dots \\
D(n) &= n + 1
\end{aligned}
$$

30. Esplicitiamo l'espressione analitica della (1.76) per vari n:

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= 2\cos x \\
f_2(x) &= \begin{vmatrix} 2\cos x & 1 \\ 1 & 2\cos x \end{vmatrix} = 4\cos^2 x - 1 \\
f_3(x) &= \begin{vmatrix} 2\cos x & 1 & 0 \\ 1 & 2\cos x & 1 \\ 0 & 1 & 2\cos x \end{vmatrix} = -4\cos x + 8\cos^3 x
\end{aligned}
$$

Osserviamo che:

$$
\begin{aligned}
4\cos^2 x - 1 &= \frac{\sin 3x}{\sin x} \\
-4\cos x + 8\cos^3 x &= \frac{\sin 4x}{\sin x}
\end{aligned}
$$

Ciò implica:

$$
f_n(x) = \frac{\sin[(n+1)x]}{\sin x}
$$

Il grafico è riportato in figura A.1

Figura A.2: Grafico di $f_n(x)$ per $n = 1, 2, 3, ..., 7$.

31. Esplicitiamo l'espressione analitica della (1.77) per vari n:

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= \cos x \\
f_2(x) &= \begin{vmatrix} \cos x & 1 \\ 1 & 2\cos x \end{vmatrix} = 2\cos^2 x - 1 \\
f_3(x) &= \begin{vmatrix} \cos x & 1 & 0 \\ 1 & 2\cos x & 1 \\ 0 & 1 & 2\cos x \end{vmatrix} = -3\cos x + 4\cos^3 x
\end{aligned}
$$

Osserviamo che:

$$
\begin{aligned}
2\cos^2 x - 1 &= \cos 2x \\
-3\cos x + 8\cos^3 x &= \cos 3x
\end{aligned}
$$

Ciò implica:

$$f_n(x) = \cos(nx)$$

Il grafico è riportato in figura A.2