Esercizi di geometria differenziale

Marcello Colozzo - (file scaricato da `http://www.extrabyte.info`)

Esercizio 1 *(Testo tratto dal Demidovic. La soluzione è nostra)*

Trovare una curva che inviluppi un segmento di lunghezza l quando gli estremi scivolano sugli assi coordinati.

Soluzione

Facciamo riferimento alla fig. 1, da cui segue l'equazione della retta per i punti A e B

$$y = -x\tan\varphi + l\sin\varphi$$

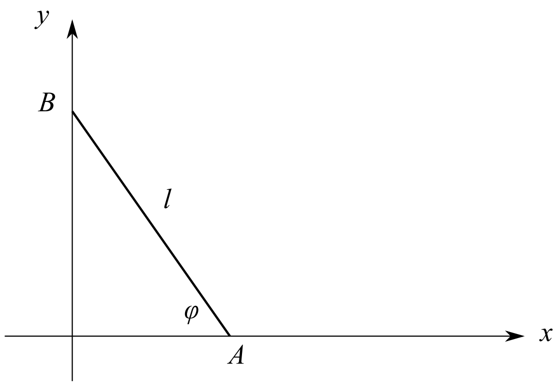

Figura 1: Esercizio 1.

Assumendo φ parametro variabile da $\frac{\pi}{2}$ a 0, otteniamo la famiglia

$$\Phi : F(x, y, \varphi) = 0,$$

essendo

$$F(x, y, \varphi) = x\tan\varphi - y - l\sin\varphi,$$

quindi derivando rispetto al parametro

$$F_\varphi(x, y, \varphi) = \frac{x}{\cos^2\varphi} - l\cos\varphi$$

Per determinare l'inviluppo dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} x\tan\varphi - y - l\sin\varphi = 0 \\ \frac{x}{\cos^2\varphi} - l\cos\varphi = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda

$$x = l\cos^3\varphi$$

che sostituita nella prima

$$y = l\sin^3\varphi$$

ovvero una rappresentazione parametrica dell'inviluppo. Liberiamoci dal parametro in modo da pervenire alla rappresentazione cartesiana del predetto luogo geometrico. Scriviamo:

$$x = l\left(1 - \sin^2\varphi\right)^{3/2}, \quad y = l\sin^3\varphi \Longrightarrow \sin^2\varphi = \left(\frac{y}{l}\right)^{2/3}$$

Quindi

$$x = l\left(1 - \frac{y^{2/3}}{l^{2/3}}\right)^{3/2} = \left(l^{2/3} - y^{2/3}\right)^{3/2} \Longrightarrow x^{2/3} = l^{2/3} - y^{2/3}$$

Finalmente

$$x^{2/3} + y^{2/3} = l^{2/3}$$

cioè un arco di asteroide, giacché dobbiamo considerare la restrizione a $x, y > 0$.