Esercizi di geometria differenziale

Marcello Colozzo - (file scaricato da http://www.extrabyte.info)

Esercizio 1 *Dopo aver discusso i punti singolari dello strofoide:*

$$(a+x)\,y^2 = (a-x)\,x^2, \qquad \textit{per un assegnato } a>0, \tag{1}$$

determinare la curva discriminante e l'eventuale inviluppo della famiglia di strofoidi:

$$\Phi : (a+x)\,(y-\lambda)^2 = (a-x)\,x^2 \tag{2}$$

Soluzione

Posto $f(x,y) = (a-x)\,x^2 - (a+x)\,y^2$, abbiamo la rappresentazione implicita dello strofoide:

$$f(x,y) = 0 \tag{3}$$

Determiniamo i punti singolari risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases}$$

scartando le soluzioni che non soddisfano la (3). A tale scopo calcoliamo

$$f_x(x,y) = -3x^2 + 2ax - y^2, \quad f_y(x,y) = -2\,(a+x)\,y$$

onde

$$\begin{cases} -3x^2 + 2ax - y^2 = 0 \\ (a+x)\,y = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Dalla seconda per $y \neq 0$ è $x = -a$, che sostituita nella prima restituisce $y^2 = -5a^2$ che è priva di radici nel campo reale. Ne segue che deve essere $y = 0$, che sostituita nella prima fornisce $x = 0$. Quindi abbiamo l'unica soluzione $(0,0)$. Per stabilire la natura di tale punto singolare, calcoliamo le derivate seconde:

$$f_{xx}(x,y) = -6x + 2a, \quad f_{xy}(x,y) = 0, \quad f_{yy}(x,y) = -2\,(a+x)$$

Quindi poniamo

$$A = f_{xx}(0,0) = 2a, \quad B = f_{xy}(0,0) = 0, \; C = f_{yy}(0,0) = -2a$$

Segue

$$\Delta = AC - B^2 = -4a^2 < 0,$$

per cui $(0,0)$ è un nodo, come mostrato in fig. 1.

Passiamo alla famiglia (2) definendo

$$F(x,y,\lambda) = (a-x)\,x^2 - (a+x)\,(y-\lambda)^2,$$

per cui

$$F_\lambda(x,y,\lambda) = 2\,(a+x)\,(y-\lambda)$$

Quindi risolviamo

$$\begin{cases} (a-x)\,x^2 - (a+x)\,(y-\lambda)^2 = 0 \\ (a+x)\,(y-\lambda) = 0 \end{cases}$$

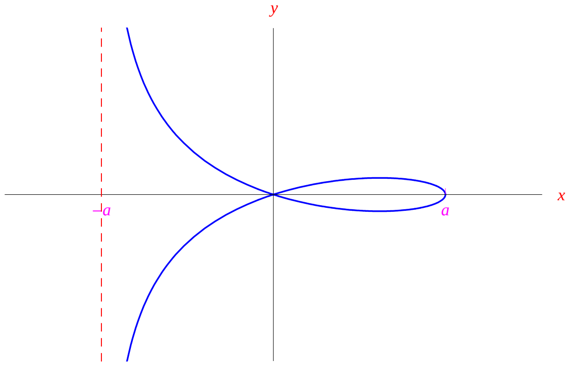

Figura 1: Esercizio 1.

Per $y = \lambda$ è $x = 0$, cioè l'asse y, che è manifestamente la discriminante della famiglia assegnata, giacché i nodi di singolo strofoide giacciono sul predetto asse. Se $x = a$ il sistema diviene

$$\begin{cases} (a+x)(y-\lambda)^2 = 0 \\ (a+x)(y-\lambda) = 0 \end{cases} \underset{x+a\neq 0}{\Longrightarrow} y = \lambda$$

Quindi la retta $x = a$ è una soluzione, ed è manifestamente l'inviluppo della famiglia, come mostrato in fig. 2.

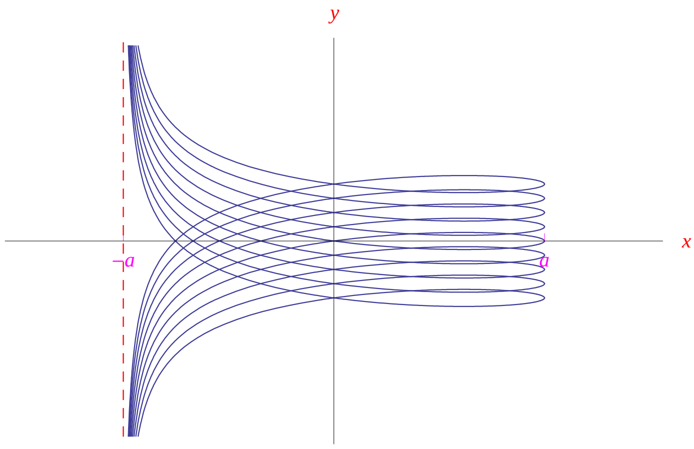

Figura 2: Esercizio 1.