

Esercizi di geometria differenziale

Marcello Colozzo - (file scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Esercizio 1 *Mostrare che il luogo geometrico dei punti di intersezione del piano coordinato xy con la retta tangente nel punto di coordinate correnti (x, y, z) a un'elica cilindrica di asse z e passo λ , è indipendente da λ .*

Soluzione

La più generale equazione di un'elica cilindrica di asse z e passo λ , è

$$\mathbf{x}(\varphi) = R(\cos \varphi) \mathbf{i} + R(\sin \varphi) \mathbf{j} + \lambda \varphi \mathbf{k} \quad (1)$$

Ne consegue che un vettore tangente è

$$\frac{d}{d\varphi} \mathbf{x}(\varphi) = -R(\sin \varphi) \mathbf{i} + R(\cos \varphi) \mathbf{j} + \lambda \mathbf{k}$$

Dalla geometria analitica, sappiamo che le componenti di un tale vettore compongono una terna ordinata di numeri direttori della retta tangente a γ :

$$l = -R \sin \varphi, \quad m = R \cos \varphi, \quad n = \lambda$$

Siamo quindi in grado di scrivere l'equazione della predetta retta nella forma dei rapporti uguali:

$$\frac{x - x(\varphi)}{l} = \frac{y - y(\varphi)}{m} = \frac{z - z(\varphi)}{n}$$

Cioè

$$-\frac{x - R \cos \varphi}{R \sin \varphi} = \frac{y - R \sin \varphi}{R \cos \varphi} = \frac{z - \lambda \varphi}{\lambda} \quad (2)$$

Il piano coordinato xy è $z = 0$, per cui dobbiamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} -\frac{x - R \cos \varphi}{R \sin \varphi} = \frac{y - R \sin \varphi}{R \cos \varphi} = \frac{z - \lambda \varphi}{\lambda} \\ z = 0 \end{cases} \implies \implies (x - R \cos \varphi) \cos \varphi = -(y - R \sin \varphi) \sin \varphi = R \sin \varphi \cos \varphi$$

Ridifinendo il parametro φ in t , otteniamo la rappresentazione parametrica del luogo richiesto:

$$\Gamma : x = R(\cos t + t \sin t), \quad y = R(\sin t - t \cos t), \quad z = 0 \quad (3)$$

che dipende da R , ma non dal passo λ . Nelle figg. ??-2 sono disegnati l'elica e il luogo Γ .

Riferimenti bibliografici

- [1] Lipschutz 1994. *Differentia Geometry*. Schaum's
- [2] Fasano A., Marmi S. 1994. *Meccanica analitica*. Boringhieri

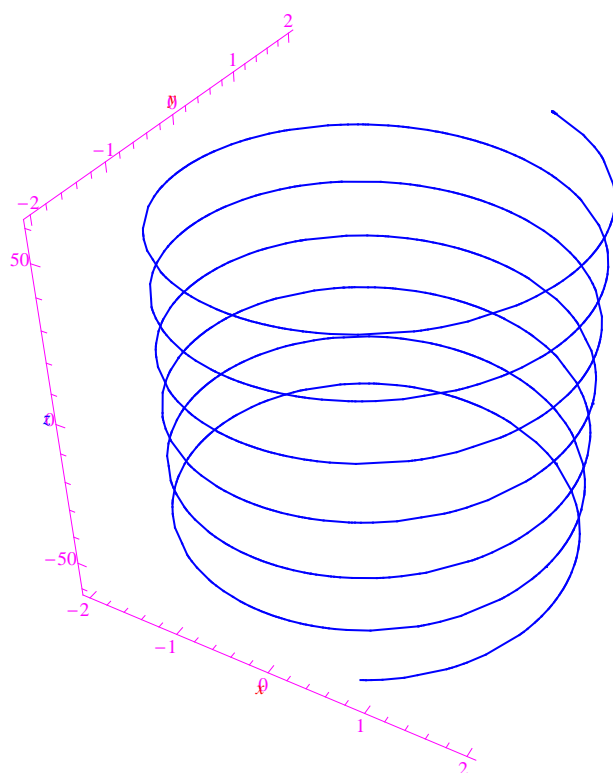


Figura 1: Elica cilindrica di passo $\lambda = 3$.

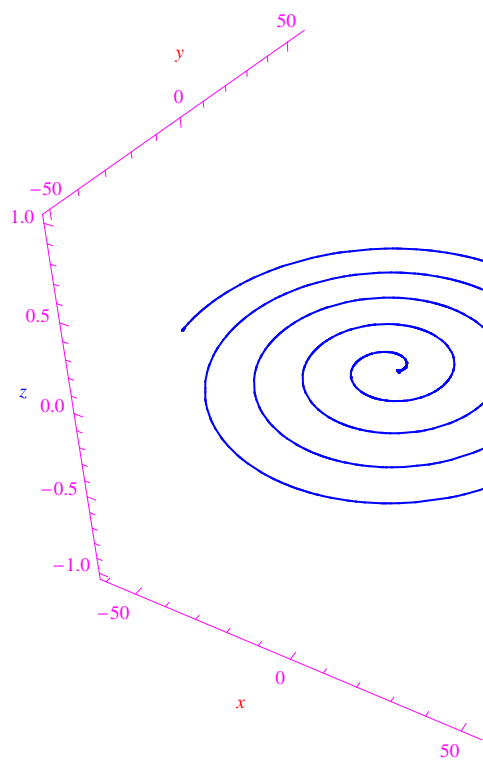


Figura 2: Curva di rappresentazione parametrica (3).