Esercizi di geometria differenziale

Marcello Colozzo - (file scaricato da http://www.extrabyte.info)

Esercizio 1 *Determinare l'equazione del piano normale alla curva*

$$\gamma : \mathbf{x} = (1+t)\,\mathbf{i} - t^2\mathbf{j} + \left(1+t^3\right)\mathbf{k} \tag{1}$$

nel punto corrispondente al valore $t_0 = 1$ *del parametro.*

Soluzione

La derivata prima della funzione vettoriale $\mathbf{x}(t)$ è

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$$

ed è un vettore tangente alla curva. Il suo versore è

$$\boldsymbol{\tau}(t) = \frac{\dot{\mathbf{x}}(t)}{|\dot{\mathbf{x}}(t)|} = \frac{\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}}$$

A noi interessa nel punto $t_0 = 1$:

$$\tau_0 = \tau(t_0) = \frac{1}{\sqrt{14}}(\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \tag{2}$$

Quindi l'equazione del piano normale

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \tau_0 = 0$$

Qui $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0) = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Eseguo il prodotto scalare

$$\begin{aligned}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \tau_0 &= [(x-2)\,\mathbf{i} + (y+1)\,\mathbf{j} + (z-2)\,\mathbf{k}] \cdot \frac{1}{\sqrt{14}}(\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{14}}[x - 2 - 2(y+1) + 3(z-2)]\end{aligned}$$

Ne concludiamo che l'equazione cercata è

$$x - 2y + 3z - 10 = 0$$

La curva è disegnata in fig. 1

Riferimenti bibliografici

[1] Lipschutz 1994. *Differentia Geometry*. Schaum's

[2] Fasano A., Marmi S. 1994. *Meccanica analitica*. Boringhieri

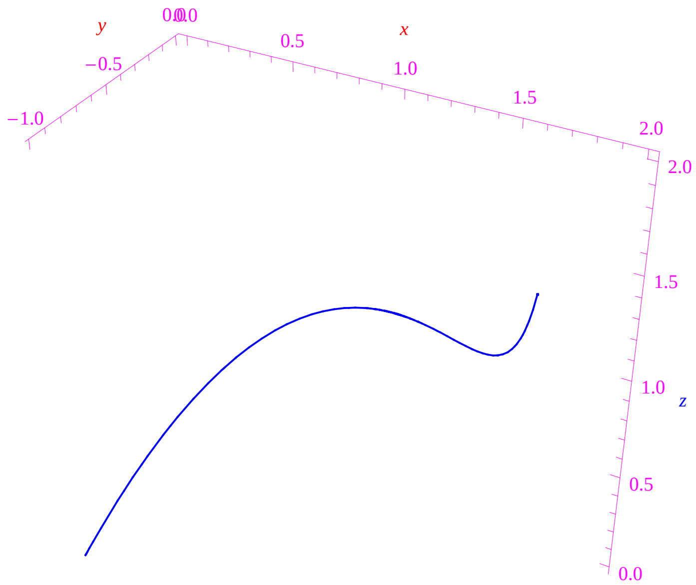

Figura 1: Curva **??**.