Esercizi di geometria differenziale

Marcello Colozzo - (file scaricato da http://www.extrabyte.info)

Esercizio 1 *Studiare la curva:*

$$\mathbf{x}(t)=\begin{cases} t\mathbf{i}+e^{-\frac{1}{t^2}}\mathbf{k}, & t<0 \\ \mathbf{0}, & t=0 \\ t\mathbf{i}+e^{-\frac{1}{t^2}}\mathbf{j}, & t>0 \end{cases} \tag{1}$$

Soluzione

Dobbiamo studiare le singole componenti cartesiane della funzione vettoriale $\mathbf{x}(t)$.

$$x(t)=t, \quad t\in(-\infty,+\infty) \tag{2}$$

$$y(t)=\begin{cases} 0, & t\leq 0 \\ e^{-\frac{1}{t^2}}, & t>0 \end{cases}, \quad z(t)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{t^2}}, & t<0 \\ 0, & t\geq 0 \end{cases} \tag{3}$$

Le $y(t)$, $z(t)$ potrebbero essere patologiche in $t=0$. Tuttavia

$$\lim_{t\to 0^+} y(t)=\lim_{t\to 0^+} e^{-\frac{1}{t^2}}=0^+,$$

per cui $y(t)$ è continua in $t=0$. Vediamo la derivata prima:

$$\dot{y}(t)=\begin{cases} 0, & t\leq 0 \\ 2\frac{e^{-\frac{1}{t^2}}}{t^3}, & t>0 \end{cases}$$

Si calcola facilmente (per confronto tra infiniti dopo aver posto $\xi=t^{-1}$)

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{t^2}}}{t^3}=0$$

Ne segue che $\dot{y}(t)$ è continua in $t=0$. Derivando successivamente si trova la continuità delle derivate di ordine comunque elevato. Ne consegue che $y(t)$ è di classe C^∞. Il procedimento può essere ripetuto per la funzione $z(t)$ che in tal modo risulta essere di classe C^∞. Tuttavia queste funzioni non sono analitiche. Infatti, in un intorno di $t=0$ non sono sviluppabili in serie di Taylor in quanto in quel punto le derivate sono tutte nulle. Per avere un'idea dell'andamento della curva è istruttivo graficare le componenti cartesiane $y(t)$, $z(t)$, ottenendo i grafici di figg. 1-2.

Si noti che nelle figg. 1-2 compare x come variabile indipendente, giacché nella rappresentazione parametrica è $x=t$, $\forall t\in(-\infty,+\infty)$. In tal modo è facile intuire l'andamento della curva. Per $x>0$ la curva è tracciata nel piano coordinato xy, mentre per $x<0$ è tracciata nel piano xz, come illustrato in fig. 3

Riferimenti bibliografici

[1] Lipschutz 1994. *Differentia Geometry*. Schaum's

[2] Fasano A., Marmi S. 1994. *Meccanica analitica*. Boringhieri

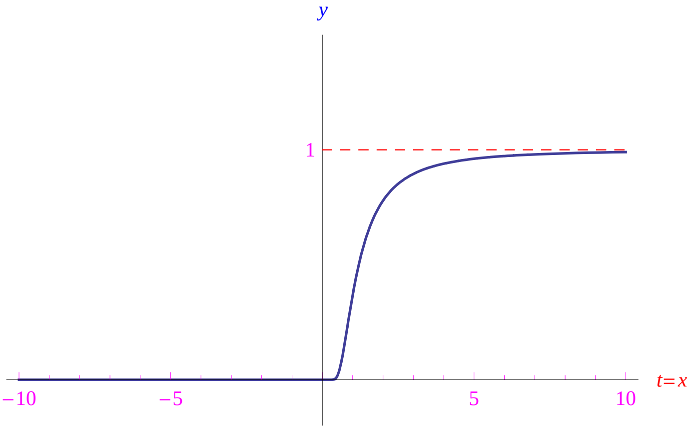

Figura 1: Esercizio 1. Andamento della funzione $y(t)$.

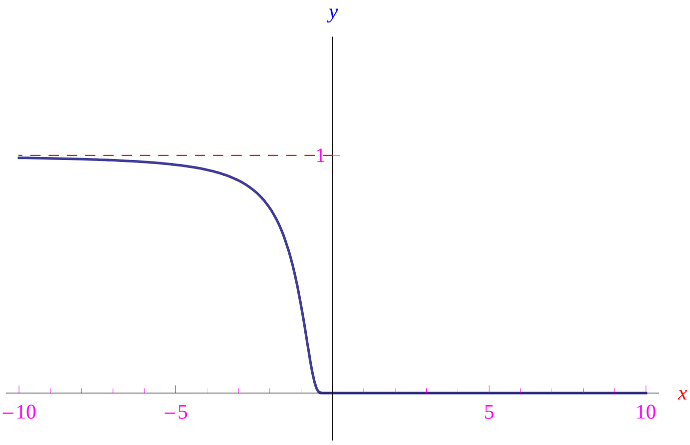

Figura 2: Esercizio 1. Andamento della funzione $z(t)$.

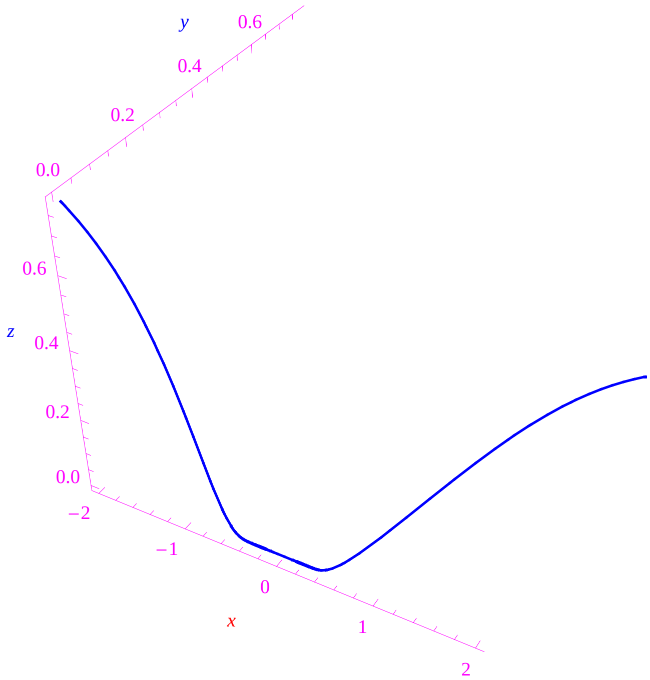

Figura 3: Esercizio 1.