

Esercizi di geometria differenziale

Marcello Colozzo - (file scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Esercizio 1 (Tratto da [1]. La soluzione è nostra)

Trovare una rappresentazione della curva intersezione dei cilindri:

$$\mathcal{C}_1 : z^2 = x, \quad \mathcal{C}_2 : y^2 = 1 - x \quad (1)$$

che non coinvolga radicali.

Testo originale: Find a representation of the intersection of the cylinders (1) that does not involve radicals.

Soluzione

Dall'equazione di \mathcal{C}_1 vediamo che $0 \leq x \leq +\infty$, mentre $-\infty < y < +\infty$. Dalla geometria analitica sappiamo che si tratta di un *cilindro parabolico*. Più precisamente, l'asse del cilindro è l'asse y , le generatrici appartengono a un fascio di rette parallele al predetto asse, e la direttrice è la parabola del piano coordinato xz di equazione $z^2 = x$ (fig. 1).

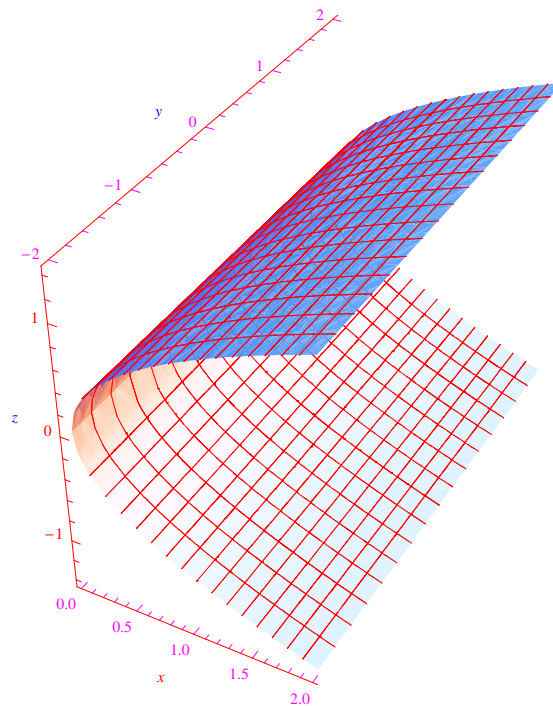


Figura 1: Esercizio 1. Cilindro parabolico $\mathcal{C}_1 : z^2 = x$.

Alla stessa maniera, vediamo che \mathcal{C}_2 è un cilindro parabolico di asse z e direttrice $y^2 = 1 - x$. (fig. 2).

Ciò premesso, l'intersezione γ è data dal sistema di equazioni:

$$\begin{cases} z^2 = x \\ y^2 = 1 - x \end{cases} \quad (2)$$

Eliminando x tra queste equazioni, si trova:

$$y^2 + z^2 = 1,$$

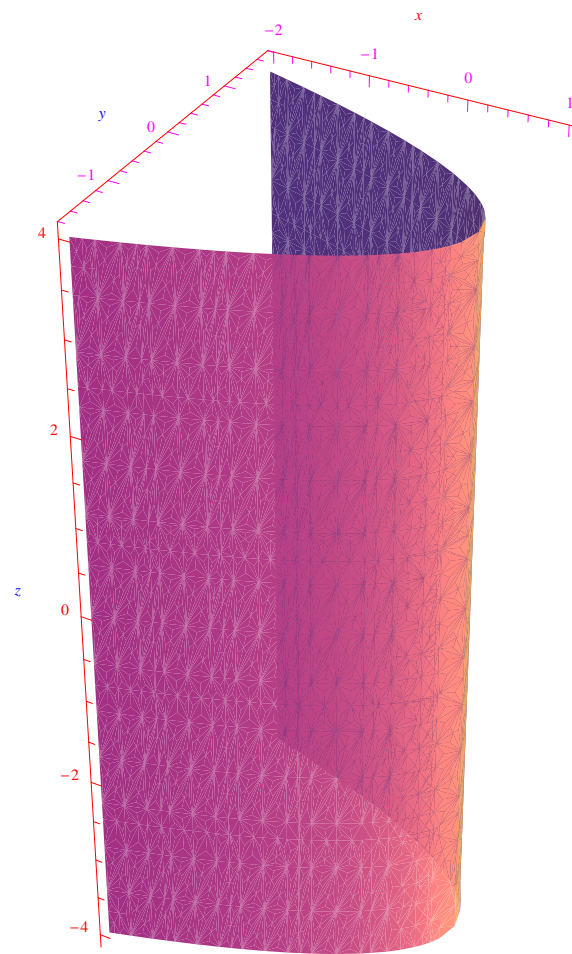


Figura 2: Esercizio 1. Cilindro parabolico $C_2 : y^2 = 1 - x$.

che potrebbe farci credere γ =circonferenza del piano coordinato yz di centro l'origine e raggio 1. Ciò è falso, perché implicherebbe $x = 0$, mentre dalla prima delle (2) vediamo che $x = z^2 \geq 0$. Possiamo comunque rappresentare parametricamente tale luogo. La scelta più ovvia del parametro è tale che

$$y = \sin t, \quad z = \cos t, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Dal momento che $x = z^2$ si ha finalmente

$$\gamma : x = \cos^2 t, \quad y = \sin t, \quad z = \cos t, \quad t \in [0, 2\pi]$$

plottata in fig. 3.

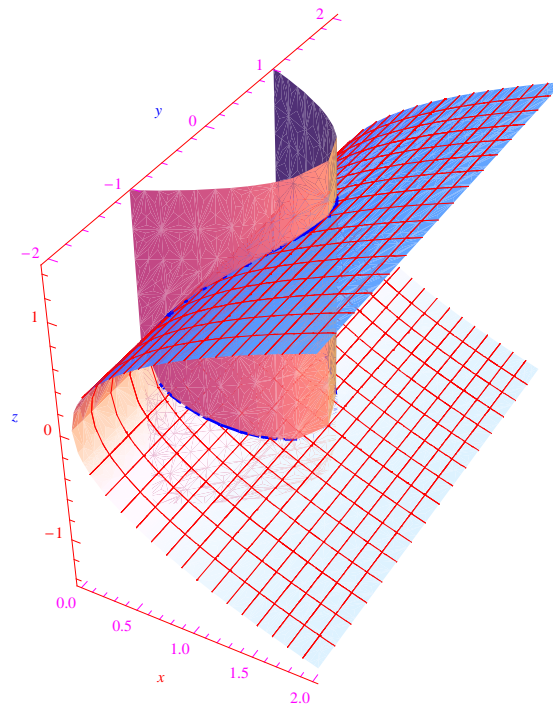


Figura 3: Esercizio 1. Intersezione di C_1 e C_2 .

Riferimenti bibliografici

- [1] Lipschutz 1994. *Differentia Geometry*. Schaum's
- [2] Fasano A., Marmi S. 1994. *Meccanica analitica*. Boringhieri