Esercizi di geometria differenziale

Marcello Colozzo - (file scaricato da http://www.extrabyte.info)

Esercizio 1 *(Tratto da [1]. La soluzione è nostra)*

Determinare la rappresentazione naturale della curva

$$\mathbf{x}(t) = \left(e^t \cos t\right)\mathbf{i} + \left(e^t \sin t\right)\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}, \quad t \in (-\infty, +\infty) \tag{1}$$

Soluzione

Dobbiamo istituire sulla curva γ un sistema di ascisse curvilinee. Orientando la curva nel verso delle t crescenti e assumendo come origine degli archi il punto corrispondente a $t = 0$, si ha:

$$s(t) = \int_0^t \left|\dot{\mathbf{x}}(t')\right| dt' \tag{2}$$

Calcoliamo la derivata

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = e^t(\cos t - \sin t)\mathbf{i} + e^t(\sin t + \cos t)\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\left|\dot{\mathbf{x}}(t)\right| &= \sqrt{e^{2t}(\cos t - \sin t)^2 + e^{2t}(\sin t + \cos t)^2 + e^{2t}} \\
&= e^t\sqrt{\cos^2 t - 2\sin t\cos t + \sin^2 t + \sin^2 t + 2\sin t\cos t + \cos^2 t + 1} \\
&= \sqrt{3}e^t
\end{aligned}$$

Il calcolo dell'integrale (2) è immediato

$$s(t) = \sqrt{3}\int_0^t e^{t'}dt' = \sqrt{3}\, e^{t'}\Big|_{t'=0}^{t'=t} = \sqrt{3}\left(e^t - 1\right),$$

che verifica le condizioni agli estremi

$$\lim_{t\to-\infty} s(t) = -\sqrt{3}, \quad \lim_{t\to+\infty} s(t) = +\infty$$

ed è plottata in fig. 1.

A questo punto dobbiamo trovare l'inversa della funzione $s(t)$:

$$t(s) = \ln\left(1 + \frac{s}{\sqrt{3}}\right) \tag{3}$$

e quindi esprimere le componenti cartesiane della funzione vettoriale $\mathbf{x}(t)$ attraverso la (3). Otteniamo le funzioni composte:

$$\begin{aligned}
x(t(s)) &= \left(1 + \frac{s}{\sqrt{3}}\right)\cos\left[\ln\left(1 + \frac{s}{\sqrt{3}}\right)\right] \\
y(t(s)) &= \left(1 + \frac{s}{\sqrt{3}}\right)\sin\left[\ln\left(1 + \frac{s}{\sqrt{3}}\right)\right] \\
z(t(s)) &= \left(1 + \frac{s}{\sqrt{3}}\right)
\end{aligned}$$

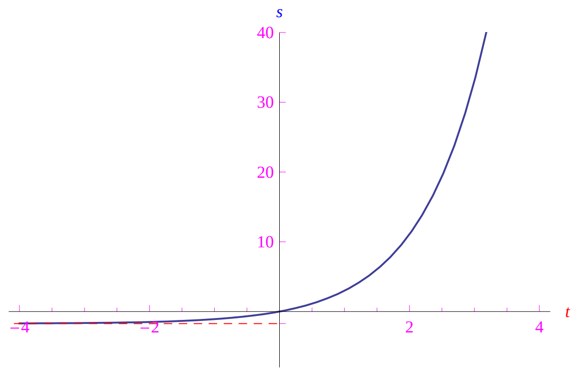

Figura 1: Esercizio 1. Digramma cartesiano della funzione $s(t)$ (ascissa curvilinea). Per t variabile da $-\infty$ a $+\infty$., il parametro naturale s varia monotonamente da $-\sqrt{3}$ a $+\infty$.

Finalmente la rappresentazione naturale

$$\mathbf{x}(t(s)) \equiv \mathbf{x}(s) = \left(1+\frac{s}{\sqrt{3}}\right)\cos\left[\ln\left(1+\frac{s}{\sqrt{3}}\right)\right]\mathbf{i} + \left(1+\frac{s}{\sqrt{3}}\right)\sin\left[\ln\left(1+\frac{s}{\sqrt{3}}\right)\right]\mathbf{j} +$$
$$+\left(1+\frac{s}{\sqrt{3}}\right)\mathbf{k}, \quad s \in \left(-\sqrt{3}, +\infty\right)$$

La curva è disegnata in fig. 2.

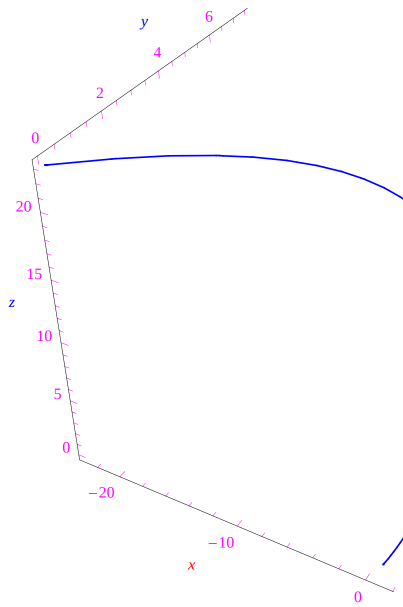

Figura 2: Esercizio 1.

Riferimenti bibliografici

[1] Lipschutz 1994. *Differentia Geometry*. Schaum's

[2] Fasano A., Marmi S. 1994. *Meccanica analitica*. Boringhieri