Esercizi di geometria differenziale

Marcello Colozzo - (file scaricato da http://www.extrabyte.info)

Esercizio 1 *(Tratto da [1]. La soluzione è nostra)*

Testo in inglese:
Introduce

$$t = \tan \frac{\varphi}{4} \tag{1}$$

as a parameter algon the circle $x = R \cos \varphi$, $y = R \sin \varphi$, $-\pi \leq \varphi \leq \pi$.

Assegnata la seguente rappresentazione parametrica della circonferenza di centro $(0, 0)$ *e raggio* R

$$x = R \cos \varphi, \ y = R \sin \varphi, \ -\pi \leq \varphi \leq \pi,$$

eseguire la sostituzione di parametro ammissibile

$$t = \tan \frac{\varphi}{4} \tag{2}$$

Soluzione

Innanzitutto osserviamo che

$$-\pi \leq \varphi \leq \pi \Longrightarrow -\frac{\pi}{4} \leq \frac{\varphi}{4} \leq \frac{\pi}{4} \Longrightarrow -1 \leq t \leq 1$$

Dobbiamo esprimere $\cos \varphi$ e $\sin \varphi$ in termini di $\tan \frac{\varphi}{4}$. A tale scopo ci serviamo delle formule di bisezione:

$$\cos^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2} (1 + \cos \varphi), \ \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2} (1 - \cos \varphi)$$

Quindi

$$\cos^2 \frac{\varphi}{4} = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{1 + \cos \varphi}{2}} \right), \ \sin^2 \frac{\varphi}{4} = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{1 + \cos \varphi}{2}} \right)$$

Quadrando e sommando

$$\cos^4 \frac{\varphi}{4} + \sin^4 \frac{\varphi}{4} = \frac{1}{4} (3 + \cos \varphi) \tag{3}$$

Dalle relazioni

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{\tan^2 \alpha + 1}, \ \sin^2 \alpha = \frac{\tan^2 \alpha}{\tan^2 a + 1}$$

seguono

$$\cos^4 \frac{\varphi}{4} = \frac{1}{(t^2 + 1)^2}, \ \sin^4 \frac{\varphi}{4} = \frac{t^4}{(t^2 + 1)^2}$$

Sommando e tenendo conto della (3):

$$\cos \varphi = 3 - 4 \left[\frac{1}{(t^2 + 1)^2} + \frac{t^4}{(t^2 + 1)^2} \right]$$

Sviluppando e semplificando:

$$\cos \varphi = \frac{-t^4 + 6t - 1}{(t^2 + 1)^2}$$

$\sin\varphi$ in funzione di t si ricava da

$$\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi} = \sqrt{1-\left[\frac{-t^4+6t-1}{\left(t^2+1\right)^2}\right]^2}$$

Eseguendo i dovuti passaggi

$$\sin\varphi = \frac{4t\left(1-t^2\right)}{\left(t^2+1\right)^2}$$

Finalmente la rappresentazione parametrica richiesta:

$$x = R\frac{-t^4+6t-1}{\left(t^2+1\right)^2}, \quad y = 4R\frac{t\left(1-t^2\right)}{\left(t^2+1\right)^2}, \qquad -1 \leq t \leq 1 \tag{4}$$

Riferimenti bibliografici

[1] Lipschutz 1994. *Differentia Geometry*. Schaum's

[2] Fasano A., Marmi S. 1994. *Meccanica analitica*. Boringhieri