Esercizi di geometria differenziale

Marcello Colozzo - (file scaricato da http://www.extrabyte.info)

Esercizio 1 *(Tratto da [1]. La soluzione è nostra)*

Show that

$$t = \frac{\theta^2}{\theta^2 + 1} \tag{1}$$

is an allowable change of parameter on $0 < \theta < +\infty$ *and takes the interval* $0 < \theta < +\infty$ *on to* $0 < t < 1$.

Mostrare che

$$t = \frac{\theta^2}{\theta^2 + 1} \tag{2}$$

è una sostituzione di parametro ammissibile definita su $0 < \theta < +\infty$ *e che fa corrispondere all'intervallo* $0 < \theta < +\infty$ *l'intervallo* $0 < t < 1$.

Soluzione

La funzione $t(\theta)$ verifica le condizioni di regolarità affinché sia una sostituzione di parametro. Dobbiamo ora far vedere che $\frac{dt}{d\theta} \neq 0$. Calcoliamo

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{2\theta\left(\theta^2+1\right) - \theta^2 \cdot 2\theta}{\left(\theta^2+1\right)^2} = \frac{2\theta}{\left(\theta^2+1\right)^2} > 0, \quad \forall \theta \in (0, +\infty)$$

Segue che la (2) è una sostituzione di parametro ammissibile. Risulta

$$t(0) = 0, \ \lim_{\theta \to +\infty} t(\theta) = 1$$

E dal momento che la funzione $t(\theta)$ è strettamente crescente, si ha

$$0 < \theta < +\infty \Longrightarrow 0 < t < 1$$

come vediamo dalla fig. 1.

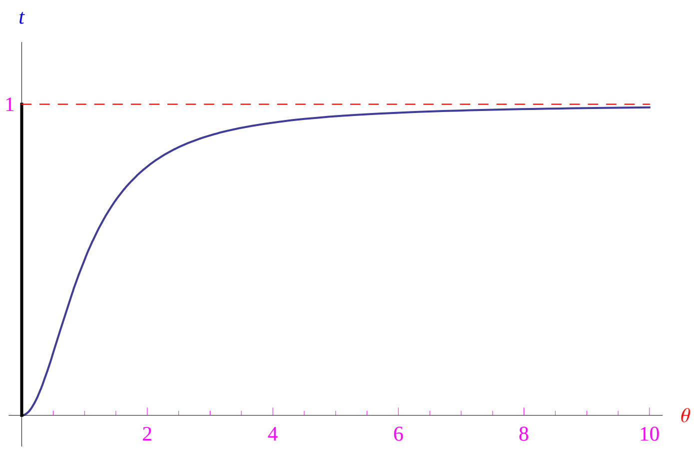

Figura 1: Esercizio (1).

Riferimenti bibliografici

[1] Lipschutz 1994. *Differentia Geometry*. Schaum's

[2] Fasano A., Marmi S. 1994. *Meccanica analitica*. Boringhieri