Appunti di Fisica del Reattore nucleare

Ing. Giorgio Bertucelli - (file scaricato da http://www.extrabyte.info)

1 Calcolo della distribuzione marginale maxwelliana

Siano u, v, w , le componenti della velocità $\mathbf{c}$ secondo gli assi x, y, z. La probabilità infinitesima $d\pi$ di trovare un neutrone la cui velocità ha componenti comprese tra $[u, u+du]$, $[v, v+dv]$, $[w, w+dw]$ si può esprimere attraverso una densità di probabilità $P(u, v, w)$

$$d\pi = P(u, v, w)\, dudvdw \tag{1}$$

Consideriamo poi il caso in cui la densità di probabilità $P(u, v, w)$ si fattorizza nel prodotto delle *distribuzioni marginali*:

$$P(u, v, w) = f(u)\, f(v)\, f(w) \tag{2}$$

Supponiamo che $|\mathbf{c}| = |\mathbf{c} + d\mathbf{c}|$. Allora essendo $|c| =$ costante $= c$ si potrà scrivere

$$c^2 = u^2 + v^2 + w^2 \Longrightarrow 2cdc = 2udu + 2vdv + 2wdw = 0$$

La densità di probabilità $P(u, v, w) =$costante supponendo che la direzione di $\mathbf{c}$ non abbia alcuna influenza.

$$dP = f'(u)\, f(v)\, f(w)\, du + f(u)\, f'(v)\, f(w)\, dv + f(u)\, f(v)\, f(w)'\, dw = 0 \tag{3}$$

da cui si ottiene

$$\begin{cases} \frac{f'(u)}{f(u)}du + \frac{f'(v)}{f(v)}dv + \frac{f'(w)}{f(w)}dw = 0 \\ udu + vdv + wdw = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Possiamo scrivere che i coefficienti dei differenziali sono tra loro proporzionali ad una quantità $2x$

$$\frac{\frac{f'(u)}{f(u)}}{u} \propto \frac{\frac{f'(v)}{f(v)}}{v} \propto \frac{\frac{f'(w)}{f(w)}}{w} \tag{5}$$

Integrando si ottiene

$$f(u) = Ae^{xu^2}, \quad f(v) = Be^{xv^2}, \; f(w) = Ce^{xw^2} \tag{6}$$

Applicando le *condizioni di normalizzazione* illustrate in statistica e ponendo $x = -\frac{1}{\alpha^2}$ si scriverà:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, du = \int_{-\infty}^{+\infty} Ae^{xu^2} du = \int_{-\infty}^{+\infty} Ae^{-\frac{u^2}{\alpha^2}} du = 1 \tag{7}$$

e con analoga applicazione per le variabili v e w

$$A = B = C = \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}} \tag{8}$$

e potremo quindi riscrivere la (2)

$$P(u, v, w)\, dudvdw = \frac{1}{\alpha^3 \pi^{3/2}} e^{-\frac{c^2}{\alpha^2}} dudvdw \tag{9}$$

e in coordinate polari

$$P\left(c,\theta,\varphi\right)dcd\theta d\varphi=\frac{1}{\alpha^{3}\pi^{3/2}}e^{-\frac{c^{2}}{\alpha^{2}}}c^{2}\sin\theta dcd\theta d\varphi \tag{10}$$

per $0\leq c<+\infty,\ 0\leq\theta\leq\pi,\ 0\leq\varphi\leq 2\pi$. La distribuzione maxwelliana $M\left(c\right)$ è dunque

$$M\left(c\right)=\int_{0}^{\pi}d\theta\int_{0}^{2\pi}d\varphi\frac{1}{\alpha^{3}\pi^{3/2}}e^{-\frac{c^{2}}{\alpha^{2}}}c^{2}\sin\theta=\frac{4}{\alpha^{3}\sqrt{\pi}}c^{2}e^{-\frac{c^{2}}{\alpha^{2}}} \tag{11}$$

Il valor medio di c^2 o varianza, è

$$\overline{c^{2}}=\int_{0}^{+\infty}c^{2}M\left(c\right)dc=\frac{3}{2}\alpha^{2}\Longrightarrow\alpha^{2}=\frac{2}{3}\overline{c^{2}} \tag{12}$$

Il valor medio dell'energia cinetica è

$$\bar{E}=\frac{1}{2}m\overline{c^{2}}=\frac{3}{2}KT,$$

dove K è la costante di Boltzmann. Dunque sarà $\alpha^2=\frac{2KT}{m}$ e la maxwelliana sarà così espressa:

$$M\left(c\right)=4\left(\frac{m}{2KT}\right)\frac{c^{2}}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{mc^{2}}{2KT}\right) \tag{13}$$

La velocità più probabile è quella per cui $M\left(c\right)$ è massima e si ricava dall'equazione $\frac{dM}{dc}=0$. Si ottiene

$$c_{p}=\sqrt{\frac{2KT}{m}}\Longrightarrow E_{p}=\frac{1}{2}mc_{p}^{2}=KT \tag{14}$$

$$\bar{c}=\int_{0}^{+\infty}cM\left(c\right)dc=\sqrt{\frac{8KT}{\pi m}}\Longrightarrow E\left(c\right)=\frac{1}{2}m\bar{c}^{2}=\frac{4KT}{m} \tag{15}$$