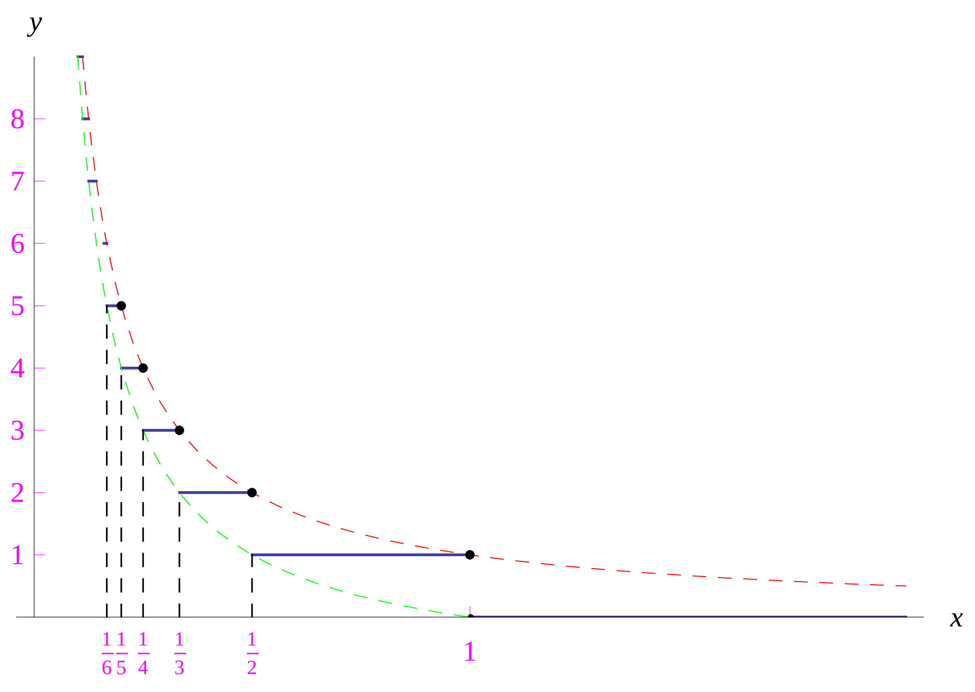
Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx}f\left(x\right) \quad \sum_{k=0}^{+\infty}a_k \quad \int f\left(x\right)dx \quad \oint_{\Gamma}\left(X dx + Y dy + Z dz\right)$$

Punti di discontinuità della parte intera di $\frac{1}{x}$

Marcello Colozzo



La funzione proposta è

$$f(x) = \left[\frac{1}{x}\right]$$

Osserviamo subito che tale funzione è definita in $(0, +\infty)$. Inoltre:

$$\forall x \in (1, +\infty), \ \ 0 < \frac{1}{x} < 1 \Longrightarrow \left[\frac{1}{x}\right] = 0$$

Cioè f è identicamente nulla in $(1, +\infty)$. Viceversa per

$$\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}, \ \ \text{con } n > 1,$$

si ha:

$$\frac{1}{x} \geq n, \ \ \frac{1}{x} < n+1$$

Esplicitiamo alcuni valori di n:

$$\begin{aligned}
&n = 1 \Longrightarrow \frac{1}{2} < x \leq 1 \Longrightarrow \frac{1}{x} \geq 1, \ \frac{1}{x} < 2 \Longrightarrow \left[\frac{1}{x}\right] = 1 \\
&n = 2 \Longrightarrow \frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{2} \Longrightarrow \frac{1}{x} \geq 2, \ \frac{1}{x} < 3 \Longrightarrow \left[\frac{1}{x}\right] = 2 \\
&n = 3 \Longrightarrow \frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{3} \Longrightarrow \frac{1}{x} \geq 3, \ \frac{1}{x} < 4 \Longrightarrow \left[\frac{1}{x}\right] = 3 \\
&n = 4 \Longrightarrow \frac{1}{5} < x \leq \frac{1}{4} \Longrightarrow \frac{1}{x} \geq 4, \ \frac{1}{x} < 5 \Longrightarrow \left[\frac{1}{x}\right] = 4 \\
&...
\end{aligned}$$

Ne consegue che il grafico di f è:

$$\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma',$$

dove

$$\Gamma_0 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x < +\infty, \ y = 0\right\},$$

e

$$\Gamma' = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \Gamma_n,$$

essendo

$$\Gamma_n = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}, \ y = \frac{1}{n}, \ \text{con } n > 1\right\}$$

In altri termini, il grafico di $\left[\frac{1}{x}\right]$ è l'unione di un numero infinito di segmenti. In particolare, la lunghezza dei segmenti Γ_n è decrescente al crescere di n. Possiamo infatti riferirci alla successione reale:

$$\{l_n\}_{n \in \mathbb{N} - \{0\}},$$

dove l_n è la lunghezza di Γ_n:

$$l_n = \frac{1}{n+1}$$

Dalla relazione precedente ricaviamo immediatamente:

$$\lim_{n\to+\infty} l_n = 0$$

È facile convincersi che gli estremi del segmento *n-esimo* i.e. i punti $\left(\frac{1}{n}, 1-n\right)$, $\left(\frac{1}{n}, n\right)$, appartengono rispettivamente a $\gamma_1 : y = \frac{x-1}{x}$ e $\gamma_2 : y = \frac{1}{x}$, come illustrato in fig. 1.

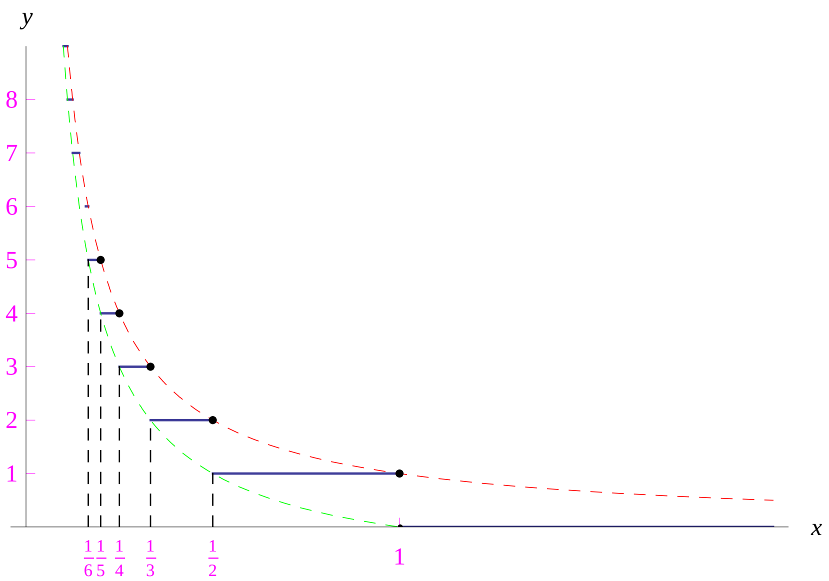


Figura 1: Grafico della funzione $\left[\frac{1}{x}\right]$ per $x > 0$.

Ne concludiamo che la funzione $\left[\frac{1}{x}\right]$ ha infiniti punti di discontinuità di prima specie in $\frac{1}{n}$ per ogni $n \geq 1$. Il salto di discontinuità è:

$$s\left(x = \frac{1}{n}\right) = 1, \ \ \forall n \geq 1$$