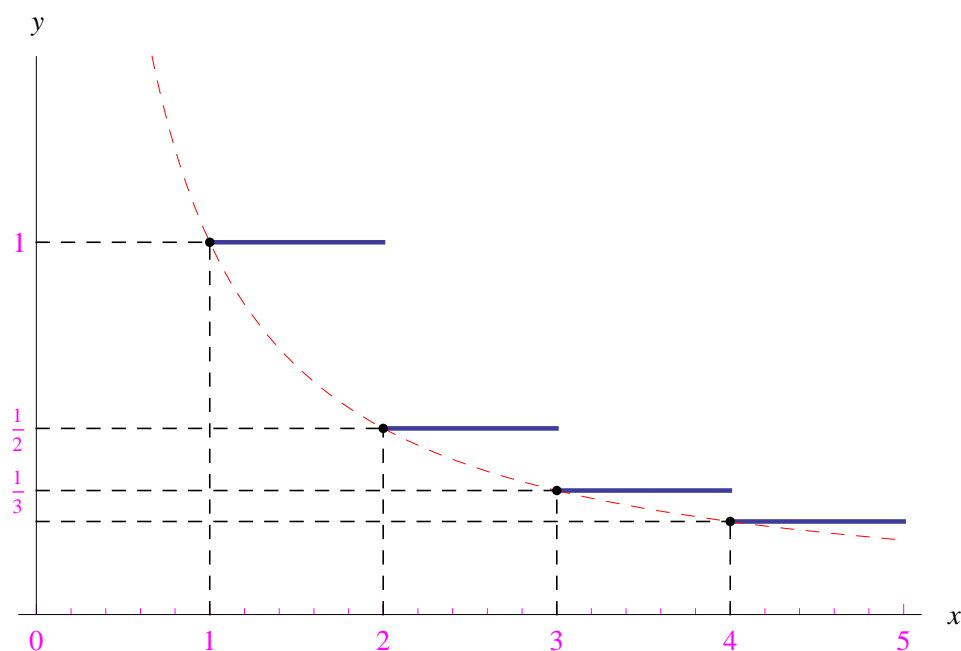


Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx} f(x) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \quad \int f(x) dx \quad \oint_{\Gamma} (X dx + Y dy + Z dz)$$

Punti di discontinuità della reciproca della funzione parte intera di x

Marcello Colozzo



La funzione proposta è

$$f(x) = \frac{1}{[x]}$$

Per $x \in (0, 1)$ è $[x] = 0$, per cui la funzione non è definita in $(0, 1)$. Riferiamoci quindi all'intervallo illimitato $X = [1, +\infty)$. Per $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$:

$$x \in [n - 1, n) \implies [x] = n - 1 \implies f(x) = \frac{1}{n - 1}$$

Esplicitiamo alcuni valori di n :

$$n = 2 \implies x \in [1, 2) \implies f(x) = 1$$

$$n = 3 \implies x \in [2, 3) \implies f(x) = \frac{1}{2}$$

$$n = 4 \implies x \in [3, 4) \implies f(x) = \frac{1}{3}$$

$$n = 5 \implies x \in [4, 5) \implies f(x) = \frac{1}{4}$$

...

Ne consegue che il grafico $\Gamma : y = f(x)$ è l'unione di infiniti segmenti semiaperti a destra. Infatti, posto:

$$\Gamma_n = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid n - 1 \leq x < n, \quad y = \frac{1}{n - 1} \right\} \quad \text{con } n \in \mathbb{N} - \{0, 1\},$$

cioè

$$\Gamma_n : y = \frac{1}{n - 1}, \quad x \in [n - 1, n) \quad \text{con } n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$$

Riesce

$$\Gamma = \bigcup_{n=2}^{+\infty} \Gamma_n$$

Il grafico della funzione è riportato in fig. 1.

Determiniamo ora il comportamento di $\frac{x}{[x]}$ in un intorno di $x = n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$. Dalla fig. 2 deduciamo che:

$$\lim_{x \rightarrow n^-} \frac{1}{[x]} = \frac{1}{n - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow n^+} \frac{1}{[x]} = \frac{1}{n},$$

per cui $x = n$ è un punto di discontinuità di prima specie, con salto

$$s(n) = -\frac{1}{n - 1} < 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$$

Al crescere indefinito di n :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s(n) = 0$$

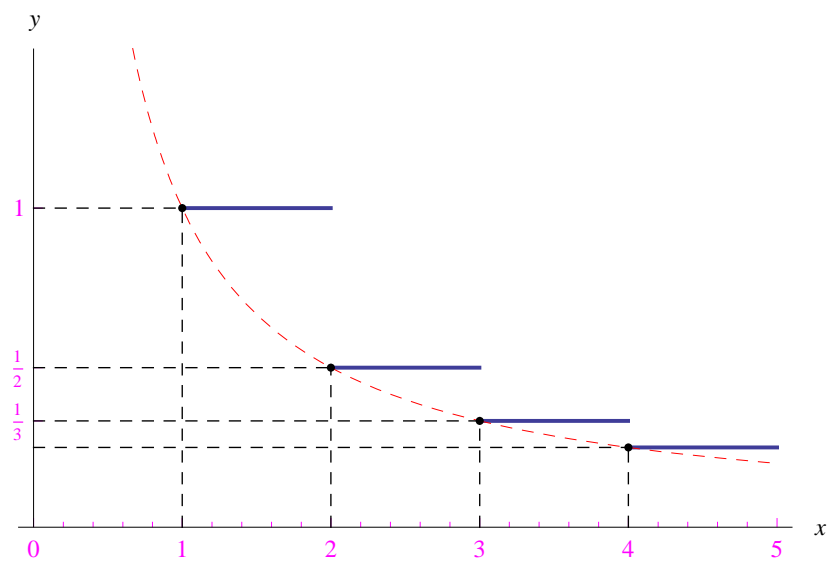


Figura 1: Grafico della funzione $\frac{1}{[x]}$ per $x > 0$. I punti $P_n(n, \frac{1}{n})$ appartengono all'iperbole $y = \frac{1}{x}$.

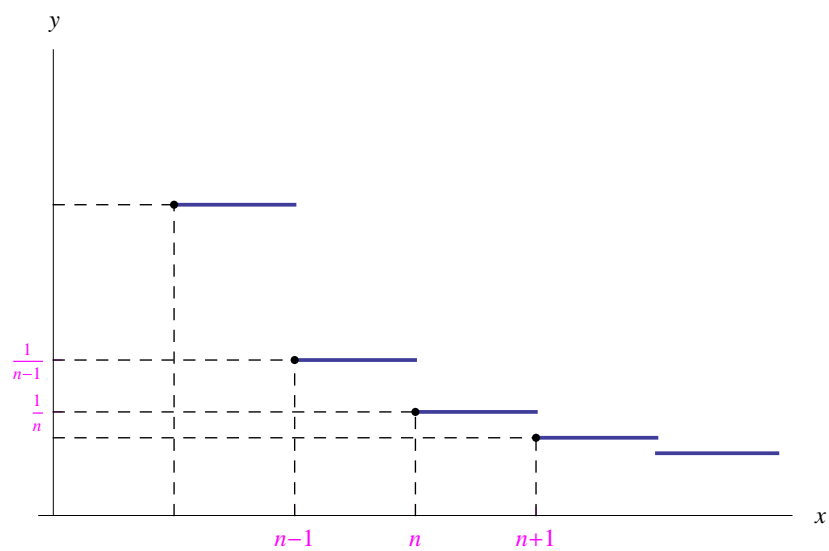


Figura 2: Grafico della funzione $\frac{1}{[x]}$ per $x > 0$.