

Discontinuità delle derivate

Marcello Colozzo

Sia data la funzione:

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad (1)$$

dove $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$.

Teorema 1 Hp.

1. $\exists I(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b) \mid f$ è derivabile in $I(x_0) - \{x_0\}$.
2. f è continua in $x_0 \in (a, b)$.
3. La derivata f' è regolare a destra [sinistra] in x_0 .

Th. La funzione è dotata di derivata destra [sinistra] in x_0 , e si ha:

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x), \quad [f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x)]$$

In particolare, se f' è convergente in x_0 , f è ivi derivabile:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$$

Se f' è divergente positivamente [negativamente] in x_0 , f ha ivi derivata infinita:

$$f'(x_0) = +\infty, \quad [f'(x_0) = -\infty]$$

Dimostrazione. Preso ad arbitrio $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, per il teorema di Lagrange si ha:

$$\exists \xi \in (x_0, x) \mid \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi) \quad (2)$$

come illustrato in fig. 1.

Eseguendo nella (2) l'operazione di passaggio al limite per $x \rightarrow x_0^+$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'[\xi(x)], \quad (3)$$

giacchè è $\xi = \xi(x)$. Ed è chiaro che

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \xi(x) = x_0^+,$$

onde

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'[\xi(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$$

Per ipotesi $\exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$, per cui la (3) diventa:

$$\underbrace{\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{=f'_+(x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$$

Allo stesso modo si ragiona per $x < x_0$.

Se esiste (finito o infinito) il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

dalla (2):giacchè $\xi \xrightarrow{x \rightarrow x_0} x_0$. Allo stesso modo si ragiona per $x \in (x_0 - \delta, x_0)$. ■

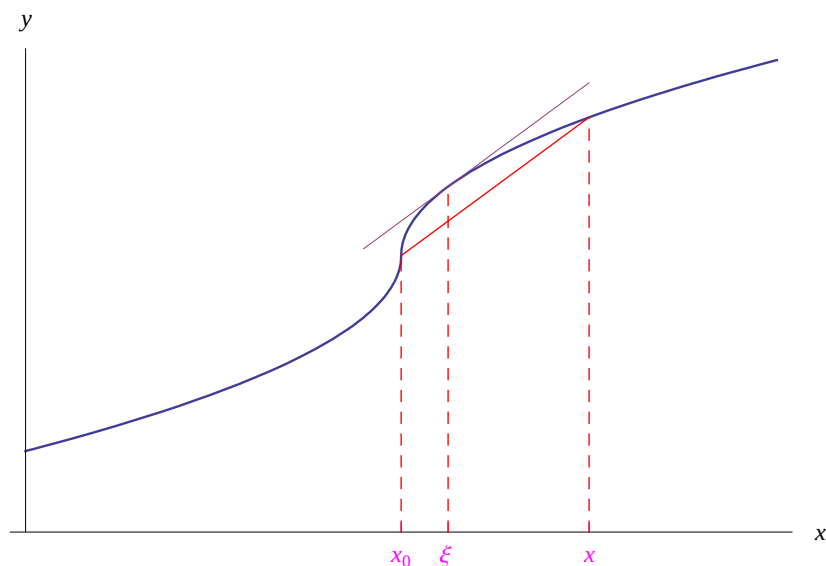


Figura 1: Applicazione del teorema di Lagrange.

Esempio 2 Consideriamo la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{se } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x}, & \text{se } x < 0 \end{cases}, \quad (4)$$

manifestamente continua in $x = 0$. La derivata è:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{|x|}}, \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Osserviamo che:

1. $f(x)$ è derivabile in $\mathbb{R} - \{0\}$.
2. $f(x)$ è continua in $x = 0$.
3. $f'(x)$ è divergente positivamente in $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{|x|}} = +\infty$$

Dal momento che sono verificate le ipotesi del teorema 1, segue che la funzione è dotata di derivata in $x = 0$, e si ha:

$$f'(0) = +\infty$$

Ne concludiamo che la funzione assegnata è derivabile in $\mathbb{R} - \{0\}$ ed ha derivata infinita in $x = 0$.

Esempio 3 Consideriamo la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}, \quad (5)$$

continua in $x = 0$, giacchè

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$$

La derivata è:

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x},$$

che è non regolare in $x = 0$, onde non possiamo applicare il teorema 1. Proviamo a calcolare la derivata di f in $x = 0$ attraverso la sua definizione:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} \right)_{x_0=0} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^2 \sin \frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\Delta x \sin \frac{1}{\Delta x} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ne consegue che la funzione (5) è derivabile in $x = 0$, ma la derivata $f'(x)$ ha una discontinuità di seconda specie in tale punto. Scriviamo, dunque:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Conclusione 4 Se x_0 è un punto di continuità che sia di accumulazione per l'insieme di derivabilità di una funzione $f(x)$, se $f'(x)$ non è definita in x_0 , possiamo scrivere:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x),$$

se e solo se $f'(x)$ è regolare in x_0 . Nel caso contrario, per stabilire l'esistenza della derivata di $f(x)$ in x_0 , è necessario applicare la definizione di derivata, cioè verificare l'esistenza del limite:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Riferimenti bibliografici

- [1] Fiorenza R., Greco D. 1978. *Lezioni di Analisi Matematica*. Liguori Editore.