Appunti di Analisi 1

Marcello Colozzo - http://www.extrabyte.info

1 Derivabilità di una funzione e continuità della derivata

Dimostriamo un teorema notevole (conseguenza del teorema di Lagrange) nel caso delle funzioni definite in un intervallo (limitato o illimitato)

Teorema 1 *Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ continua in $x_0\in(a,b)$ e derivabile intorno a x_0. Cioè*

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \tag{1}$$

e

$$\exists I(x_0)=(x_0-\delta,x_0+\delta)\mid \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\ell\in\mathbb{R},\quad \forall x\in(a,b)\cap I(x_0)-\{x_0\}$$

È dunque definita la funzione

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{2}$$

in un intorno di x_0 (escluso al più tale punto).

Se f' è regolare a sinistra [a destra] in x_0, si ha:

$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}f'(x)\qquad \left[f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}f'(x)\right] \tag{3}$$

ovvero la funzione f è dotata di derivata sinistra [destra] (eventualmente infinita). Se in particolare, f' è convergente in x_0, la funzione f è ivi derivabile:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}f'(x) \tag{4}$$

Dimostrazione. Per $x>x_0$ l'applicazione del teorema di Lagrange alla restrizione di f all'intervallo $[x,x_0]$, restituisce:

$$\exists\xi\in(x_0,x)\mid \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(\xi) \tag{5}$$

Per ipotesi, la funzione f' è regolare a destra:

$$\lim_{x\to x_0^+}f'(x)=\lambda,\quad |\lambda|\leq+\infty$$

Dalla (5)

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\xi\to x_0^+}f'(\xi)=\lambda$$

Cioè

$$f'_+(x_0)=\lambda$$

In maniera analoga per $x<x_0$. ■

Esempio 2 *Studiamo il comportamento della derivata della funzione valore assoluto* $f(x) = |x|$ *nel punto* $x_0 = 0$*, ove è manifestamente continua. Inoltre*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$$

Dal momento che tale limite non esiste, la funzione non è derivabile in x_0*. Tuttavia, è derivabile in un intorno di tale punto. Più precisamente:*

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & se\ x > 0 \\ -1, & se\ x < 0 \end{cases}$$

Ne segue che f *è derivabile a sinistra e a destra in* x_0*:*

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = -1, \quad f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = 1$$

È interessante il caso particolare della convergenza; se f' è convergente in x_0, si ha

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x)$$

Ne consegue che nelle ipotesi del teorema 1, f' non può avere discontinuità eliminabili. Segue il corollario:

Corollario 3 *Se alle ipotesi del teorema 1 aggiungiamo la derivabilità di* f *in* x_0*, si ha che la regolarità di* f' *a sinistra [a destra] in* x_0*, implica la continuità a sinistra [a destra].*

Dimostrazione. Se f' è regolare a sinistra e a destra in x_0:

$$\lim_{x \to x_0^-} f'(x) = f'_-(x_0), \quad \lim_{x \to x_0^+} f'(x) = f'_+(x_0)$$

Dal momento che per ipotesi f è derivabile in x_0, lo è necessariamente a sinistra e a destra:

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$$

onde l'asserto. ■

Ne concludiamo che nelle ipotesi del teorema 1 e del corollario 3, la derivata f' o è continua in x_0 o ha in tale punto una discontinuità di seconda specie.

Esempio 4 *Sia data la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & per\ x \neq 0 \\ 0, & per\ x = 0 \end{cases} \tag{6}$$

manifestamente continua in $(-\infty, +\infty)$*. In particolare, nel punto* $x_0 = 0$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

La derivata in tale punto è

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

cioè la funzione è derivabile in x_0*. Tuttavia, derivando la (6)*

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

che è manifestamente non regolare in x_0*, presentando ivi una discontinuità di seconda specie. In fig. 1 riportiamo il grafico della funzione assegnata.*

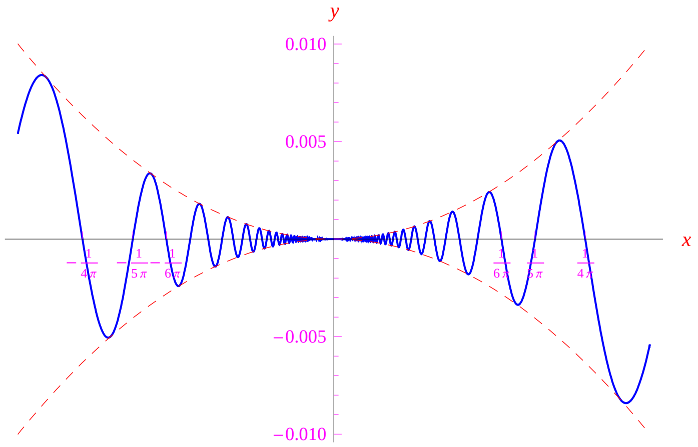

Figura 1: Grafico della funzione 6. La derivata nulla nel punto $x = 0$ ci dice che la retta secante alla curva $y = f(x)$ per i punti $(0,0)$ e $(x, f(x))$ tende, per $x \to 0$, all'asse x. Ciò perché il rapporto incrementale è oscillante in un intorno di $x = 0$ con oscillazioni che si smorzano per $x \to 0$.

Esempio 5 *Sia data la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & per\ x \neq 0 \\ 0, \ per\ x = 0 \end{cases} \tag{7}$$

manifestamente continua in $(-\infty, +\infty)$. *In particolare, nel punto* $x_0 = 0$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

Proviamo a calcolare la derivata in tale punto

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$$

Ma questo limite non esiste, onde la funzione assegnata non è derivabile in x_0. *Applicando le regole di derivazione otteniamo*

$$f'(x) = \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}, \quad \forall x \neq 0$$

che è manifestamente non regolare in x_0, *presentando ivi una discontinuità di seconda specie. In fig.* **??** *riportiamo il grafico della funzione assegnata.*

Riferimenti bibliografici

[1] Fiorenza R., Greco D. 1978. *Lezioni di Analisi Matematica.* Liguori Editore.

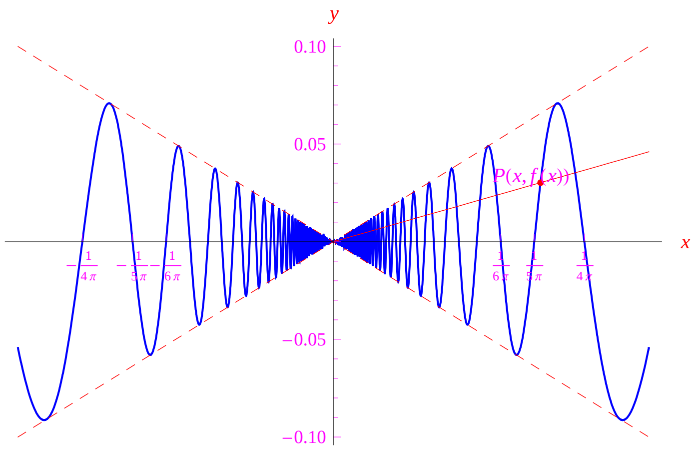

Figura 2: Grafico della funzione 7. Il rapporto incrementale relativo al punto $x_0 = 0$, cioè $\frac{f(x)-f(0)}{x}$ compie infinite oscillazioni in un intorno di 0, di raggio comunque piccolo. Tali oscillazioni non si smorzano per $x \to 0$. Geometricamente significa che la retta secante non tende ad alcuna posizione limite quando il punto $P(x, f(x))$ tende a $O(0,0)$.