
Dirichlet vs Fourier

Marcello Colozzo – www.extrabyte.info

Una *serie di Dirichlet* è per definizione:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s}, \quad (1)$$

essendo $s = \sigma + it$ l'usuale variabile complessa, mentre a_n è una *funzione aritmetica*, i.e. una successione di elementi di $\mathbb{C}$:

$$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_{>0}} : a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

Separando la parte reale dalla parte immaginaria della variabile s , la serie (1) si riscrive:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-\sigma} e^{-i\Omega_n t}, \quad (\Omega_n \stackrel{\text{def}}{=} \ln(n)) \quad (2)$$

Come è noto [1], una serie di Dirichlet ha un' *ascissa di convergenza* σ_0 :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s} \text{ converge per } \operatorname{Re}(s) > \sigma_0$$

Più precisamente, abbiamo una convergenza uniforme nel dominio

$$D_{\delta>0} = \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s > \sigma_0 + \delta, \quad -\infty < \operatorname{Im} s < +\infty\} \quad (3)$$

che definisce una funzione olomorfa [1]. Casi limite:

$$\sigma_0 = -\infty \implies \text{la serie converge su tutto il piano complesso}$$

$$\sigma_0 = +\infty \implies \text{la serie non converge mai}$$

È facile persuadersi che l'ascissa di convergenza σ_0 dipende dalla funzione aritmetica a_n .

Per quanto precede, assegnata una serie di Dirichlet con ascissa di convergenza σ_0 , è univocamente determinata la funzione olomorfa:

$$\mathcal{Z}(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s}, \quad \operatorname{Re}(s) > \sigma_0 + \delta \quad (4)$$

Separando la parte reale dalla parte immaginaria della variabile s e valutando $\mathcal{Z}$ sulla retta $\sigma = \sigma_1 \geq \sigma_0 + \delta$, otteniamo la funzione analitica:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_1 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} \\ \mathcal{Z}_1(t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{-i\Omega_n t}, \end{aligned} \quad (5)$$

essendo $b_n = a_n n^{-\sigma_1}$. Per quanto visto:

$$\Omega_n = \ln(n), \quad \forall n \neq 0$$

Ciò esibisce un'analogia formale con lo sviluppo in serie di Fourier di una funzione periodica $f(t)$:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{-i\omega_n t}, \quad (6)$$

dove

$$\omega_n = n\omega; \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad (T = \text{periodo fondamentale di } f)$$

Rammentiamo che i coefficienti di Fourier sono dati da:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{i\omega_n t} dt \quad (7)$$

In tal modo una qualunque funzione periodica (sufficientemente regolare), si esprime come sovrapposizione lineare di infinite componenti monocromatiche ciascuna di frequenza $\omega_n = n\omega$ appartenenti a uno spettro che si distribuisce linearmente. Alla stessa maniera, dalla (??) vediamo che la $\mathcal{Z}_1(t)$ si esprime come sovrapposizione lineare di infinite componenti monocromatiche ciascuna di frequenza $\Omega_n = \ln(n)$ appartenenti a uno spettro che si distribuisce logaritmicamente. Si badi che a differenza della $f(t)$, la funzione $\mathcal{Z}_1(t)$ non è periodica ma è comunque oscillante. Consideriamo, ad esempio, il caso particolare della funzione zeta di Riemann, valutata sulla retta $\sigma = 2$:

$$\mathcal{Z}_1(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{-i\Omega_n t}, \quad b_n = n^{-2} \quad (8)$$

In fig. 1 riportiamo l'andamento del modulo di (8).

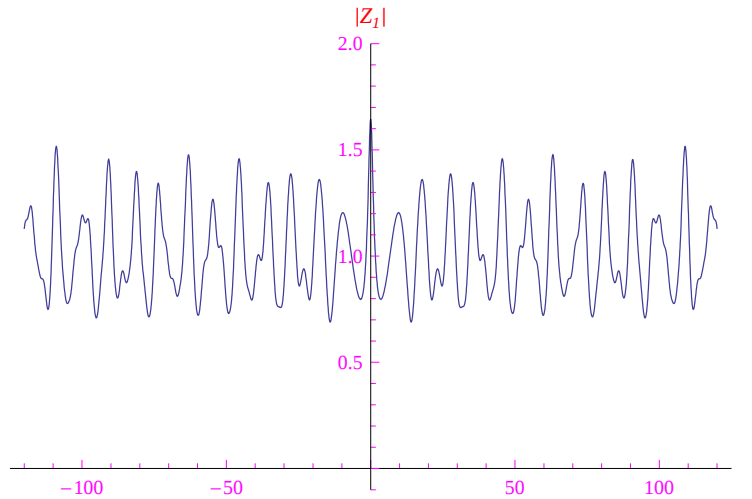


Figura 1: Andamento del modulo della funzione (8). Grafico ottenuto con *Mathematica*.

Nelle figg. 2-3-4 plottiamo con *Mathematica* alcune somme parziali:

$$\mathcal{Z}_1^{(N)}(t) = \sum_{n=1}^N b_n e^{-i\Omega_n t} \quad (9)$$

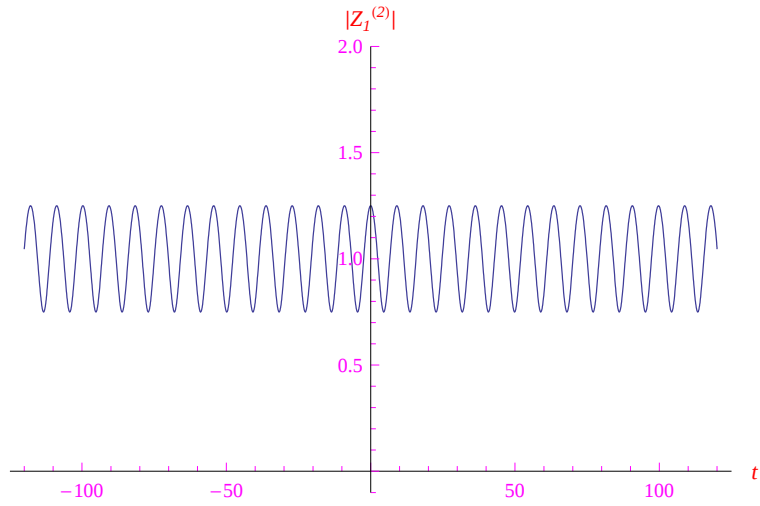


Figura 2: Andamento del modulo della somma parziale di ordine $N = 2$.

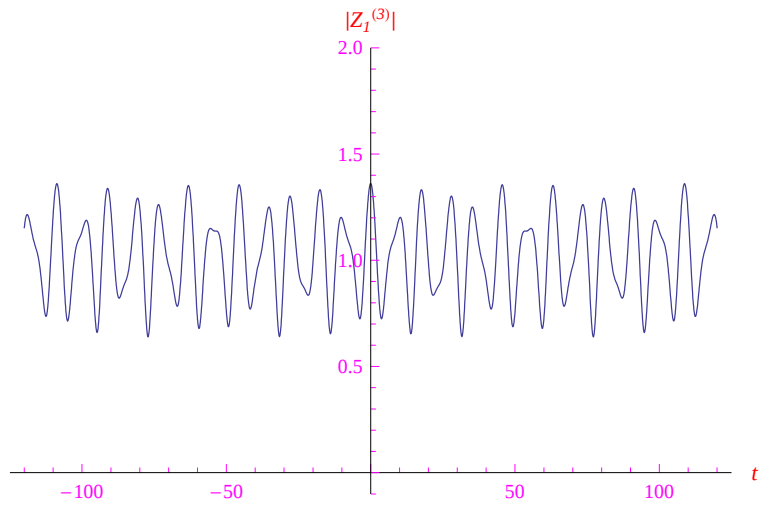


Figura 3: Andamento del modulo della somma parziale di ordine $N = 3$.

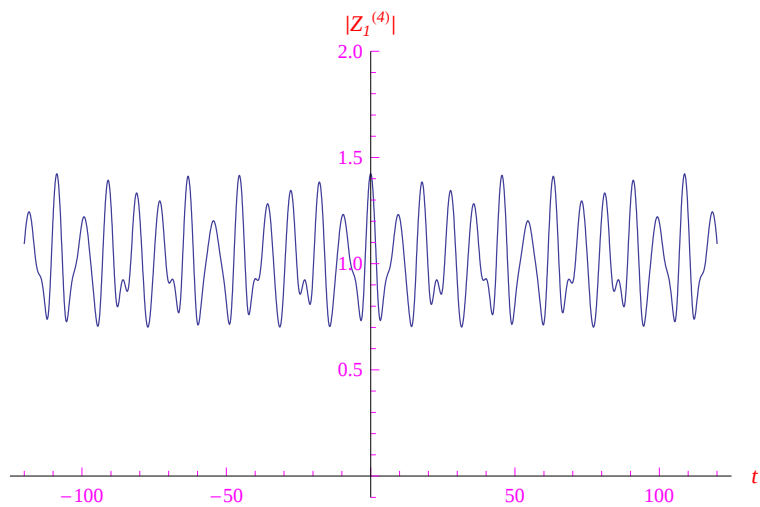


Figura 4: Andamento del modulo della somma parziale di ordine $N = 4$.

Riferimenti bibliografici

- [1] Hardy G.H., Riesz M. *The general theory of Dirichlet's series*. Courier Dover Publications, 2013.