Differenziabilità secondo Stolz

[http://www.extrabyte.info]

1 Premessa. Parte principale di un infinitesimo

Sia f una funzione reale di una variabile reale:

$$f : X \to \mathbb{R} \tag{1}$$

Ricordiamo che se x_0 è un punto di accumulazione per X (al finito o all'infinito), la funzione (1) si dice *infinitesima* in x_0, se risulta:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \tag{2}$$

Inoltre, se $g(x)$ è un infinitesimo campione, si dice che f è un infinitesimo di ordine $\alpha > 0$, se riesce:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{[g(x)]^a} = l \in \mathbb{R} - \{0\} \tag{3}$$

Posto $\varepsilon(x) = \frac{f(x)}{[g(x)]^a} - l \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$, cosicchè la funzione:

$$r(x) \stackrel{def}{=} \varepsilon(x) [g(x)]^a , \tag{4}$$

è un infinitesimo di ordine $> \alpha$, giacchè:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{[g(x)]^a} = \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

Dalla (4) si ricava:

$$f(x) = l [g(x)]^a + r(x) , \tag{5}$$

nota come *formula di decomposizione* di un infinitesimo. Il primo termine a secondo membro, cioè $l [g(x)]^a$, si dice *parte principale* dell'infinitesimo f. La parte principale è manifestamente un infinitesimo dello stesso ordine di f.

Ne consegue che un qualunque infinitesimo dotato di ordine si decompone nella somma di una parte principale e di un termine di ordine superiore. In un intorno "sufficientemente piccolo" di x_0, è lecito "trascurare" il termine di ordine superiore $r(x)$. Cioè:

$$f(x) \simeq l [g(x)]^a , \qquad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad \text{con } \delta \ll 1$$

Se $\alpha = 1$ e $l = 1$ gli infinitesimi f e g si dicono *equivalenti* e l'approssimazione precedente si scrive:

$$f(x) \simeq g(x) , \qquad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad \text{con } \delta \ll 1$$

In tal caso è consuetudine (in particolare nelle applicazioni) asserire che in un intorno di x_0 la funzione f "va come $g(x)$".

2 Differenziabilità secondo Stolz. Funzioni di una variabile

Sia $f : X \to \mathbb{R}$, dove X è un intervallo (limitato o illimitato). Preso ad arbitrio $x \in X$, consideriamo un incremento della variabile indipendente Δx tale che $(x + \Delta x) \in X$. L'incremento della funzione f relativo a Δx è:

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) \tag{6}$$

La (6) è una funzione di Δx:

$$\Delta f : E_x \to \mathbb{R}, \tag{7}$$

con $E_x = \{\Delta x \in \mathbb{R} \mid (x + \Delta x) \in X\}$, ed è manifestamente un infinitesimo nel punto $\Delta x = 0$. Se è dotato di ordine è decomponibile secondo la (5) che in tal caso si riscrive:

$$\Delta f = l\,(\Delta x)^{\alpha} + r\,(\Delta x)\,, \tag{8}$$

in cui abbiamo assunto come infinitesimo campione la funzione $g\,(\Delta x) = \Delta x$. Ricordiamo che nella (8) è $l \neq 0$ e $\alpha > 0$. Consideriamo ad esempio, la funzione:

$$f\,(x) = x^2 - 2x + 2 \tag{9}$$

L'incremento Δf di punto iniziale $x_0 = 1$ è $\Delta f = f\,(1 + \Delta x) - f\,(1)$, cioè:

$$\Delta f = (\Delta x)^2 \Longrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{(\Delta x)^2} = 1,$$

per cui Δf è (per $\Delta x \to 0$) un infinitesimo del second'ordine. Ciò premesso, sussiste la seguente definizione:

Definizione 1

$$f \textit{ è } \textbf{\textit{differenziabile secondo Stolz}} \textit{ nel punto } x) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists a \in \mathbb{R} \mid \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f - a\Delta x}{\Delta x} = 0$$

Se nel punto $x \in X$ la funzione f è differenziabile secondo Stolz, siamo tentati a intepretare $a\Delta x$ come parte principale dell'infinitesimo Δf, cioè a porre $r\,(\Delta x) = \Delta f - a\Delta x$. Ma, per quanto visto nell'esempio precedente, ciò è vero se e solo se $a \neq 0$, cioè se e solo se Δf è del primo ordine per $\Delta x \to 0$, giacchè in tal caso riesce $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \neq 0$.

Proposizione 2

$$f \textit{ è differenziabile secondo Stolz nel punto } x_0 \in X) \Longrightarrow \exists! a_0 \in \mathbb{R} \mid \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f - a_0 \Delta x}{\Delta x} = 0$$

Dimostrazione. Per ipotesi f è differenziabile secondo Stolz nel punto $x_0 \in X$, per cui:

$$0 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f - a_0 \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} - a_0 \right) \Longrightarrow a_0 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Ma $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'\,(x_0)$, quindi:

$$a_0 = f'\,(x_0)\,,$$

onde l'asserto. ■

Segue immediatamente il corollario:

Corollario 3

$$f \textit{ è differenziabile secondo Stolz nel punto } x_0 \in X) \Longleftrightarrow f \textit{ è derivabile in } x_0$$

Ne consegue che derivabilità e differenziabilità si equivalgono, implicando - a loro volta - la continuità. Sussiste la seguente definizione che è un'estensione della 1:

Definizione 4

$$f \text{ è differenziabile secondo Stolz in } X) \overset{def}{\Longleftrightarrow} (f \text{ è differenziabile secondo Stolz } \forall x \in X \ ,$$

risultando:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f - f'(x)\,\Delta x}{\Delta x} = 0 \tag{10}$$

Inoltre:

Definizione 5 *La funzione lineare ed omogenea di* Δx*:*

$$f'(x)\,\Delta x$$

si dice ***differenziale di*** f ***nel punto*** x *e si indica con* df*, onde:*

$$df = f'(x)\,\Delta x \tag{11}$$

Applicando tale definizione alla funzione $f(x) = x$, si ha $dx = \Delta x$, per cui abbiamo la relazione equivalente:

$$df = f'(x)\,dx$$

Per $f'(x) \neq 0$ la formula di decomposizione si scrive:

$$\Delta f = f'(x)\,dx + r(dx) \tag{12}$$

Le considerazioni appena svolte si riassumono nel teorema:

Teorema 6 ***(Teorema del differenziale)***
Per f *derivabile in* $x \in X$*, la differenza* $\Delta f - df$ *è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a* Δx*. Se* $f'(x) \neq 0$*, il differenziale* df *è un infinitesimo del primo ordine e si identifica con la parte principale di* Δf*.*

Per quanto precede:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{r(\Delta x)}{\Delta x} = 0$$

Per definizione di limite:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid 0 < |\Delta x| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow |r(\Delta x)| < \varepsilon\,|\Delta x|\,,$$

che ci consente di utilizzare la relazione approssimata:

$$\Delta f \simeq df, \qquad \text{per } |\Delta x| \ll 1$$

Consideriamo, ad esempio, la funzione $f(x) = x^2$. Preso ad arbitrio $x_0 > 0$ si ha $f'(x_0) = 2x_0 > 0$, per cui l'incremento si decompone come segue:

$$\Delta f = 2x_0 \Delta x + r(\Delta x)$$

D'altra parte

$$\Delta f = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0 \Delta x + (\Delta x)^2\,,$$

da cui

$$r(\Delta x) = (\Delta x)^2\,,$$

che è un infinitesimo del second'ordine. Possiamo visualizzare per via grafica tali risultati attraverso la fig. 1, che ha validità generale (a patto che sia $f'(x_0) \neq 0$), da cui vediamo che l'incremento di

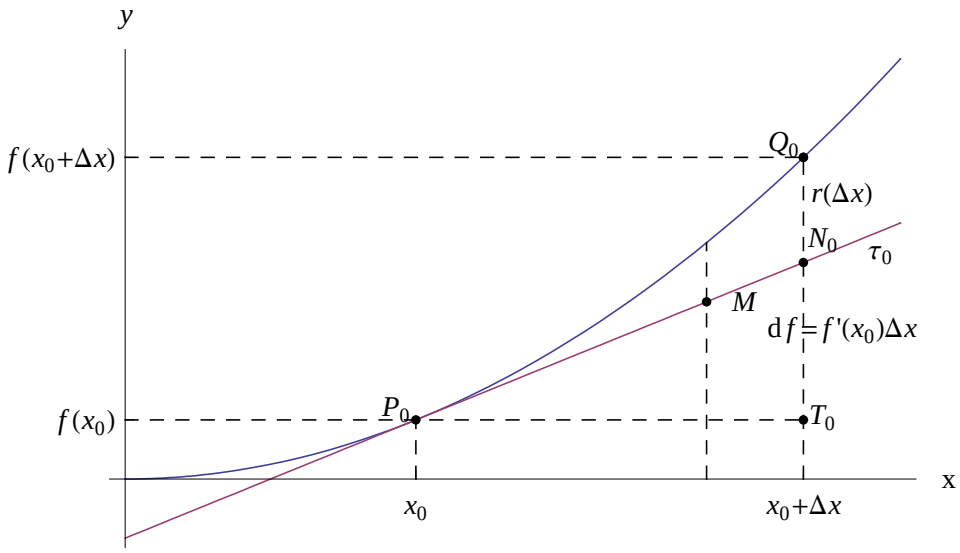

Figura 1: Interpretazione geometrica delle proprietà del differenziale.

f nel punto x_0 e relativo all'incremento Δx, è la lunghezza del segmento T_0Q_0, cioè $\Delta f = \overline{T_0Q_0}$, mentre il differenziale è $df = f'(x_0)\,\Delta x = \overline{T_0N_0}$. La lunghezza del segmento T_0Q_0 è, invece, pari a $r(\Delta x) = (\Delta x)^2$. Da ciò segue che, da un punto di vista geometrico, il differenziale è l'incremento subito dall'ordinata del punto $M \in \tau_0$, dove τ_0 è la retta tangente a $\Gamma : y = f(x)$ in P_0, quando la sua ascissa varia da x_0 a $x_0 + \Delta x$. Appare allora chiaro che l'approssimazione $\Delta f \simeq df$ valida in un intorno di x_0, equivale a sostituire nel suddetto intorno, il grafico di f con la retta tangente τ_0. In ciò consiste il processo di *linearizzazione* di una funzione f, e in tal caso dice che la funzione è *linearizzabile*. La grandezza $r(\Delta x) = \Delta f - df$ è una misura dell'errore prodotto dalla linearizzazione.

Nel caso $f'(x_0) = 0$, abbiamo il grafico di fig. 2.

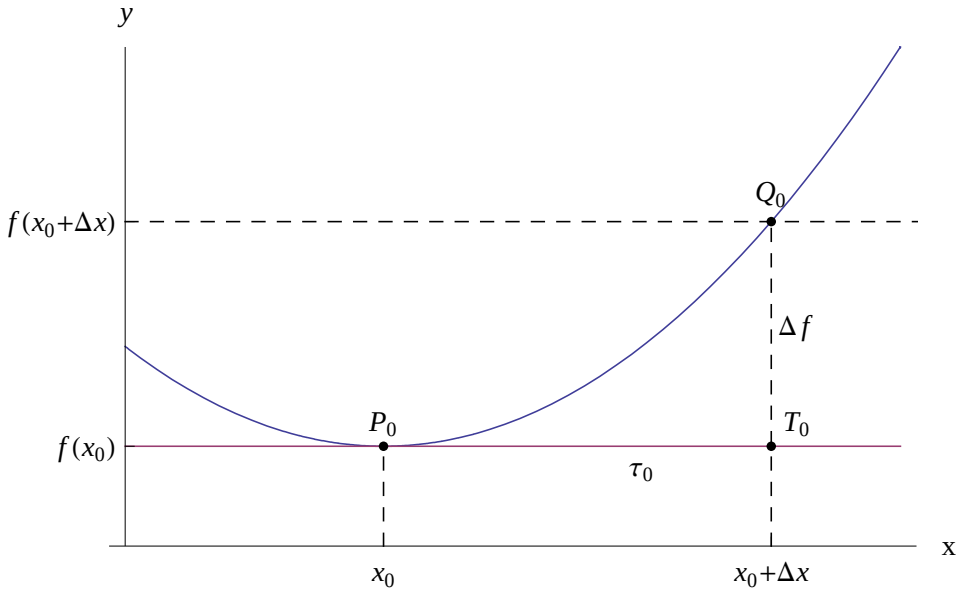

Figura 2: Se $f'(x_0) = 0$ la retta tangente è orizzontale e può presentarsi il caso illustrato in questa figura. Qui Δf è un infinitesimo (per $\Delta x \to 0$) di ordine superiore a Δx.

Concludiamo questo paragrafo, osservando che per la differenziabilità di f abbiamo richiesto la sola derivabilità senza fare altre ipotesi sulla derivata prima. Nel paragrafo successivo vedremo che nel caso di $n > 1$ variabili sono necessarie altre condizioni. Per finire, consideriamo la seguente

funzione:

$$f(x) = \sqrt{|x|}, \tag{13}$$

che è continua in $\mathbb{R}$, ma non derivabile in $x = 0$. Infatti:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}}, & \text{se } x > 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{x}}, & \text{se } x < 0 \end{cases},$$

avendosi:

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty$$

Ne consegue che la funzione $f(x) = \sqrt{x}$ non è differenziabile in $x = 0$. Geometricamente ciò si traduce nell'assenza della retta tangente a $\Gamma : y = \sqrt{x}$ in $(0, 0)$, come illustrato in fig. 3.

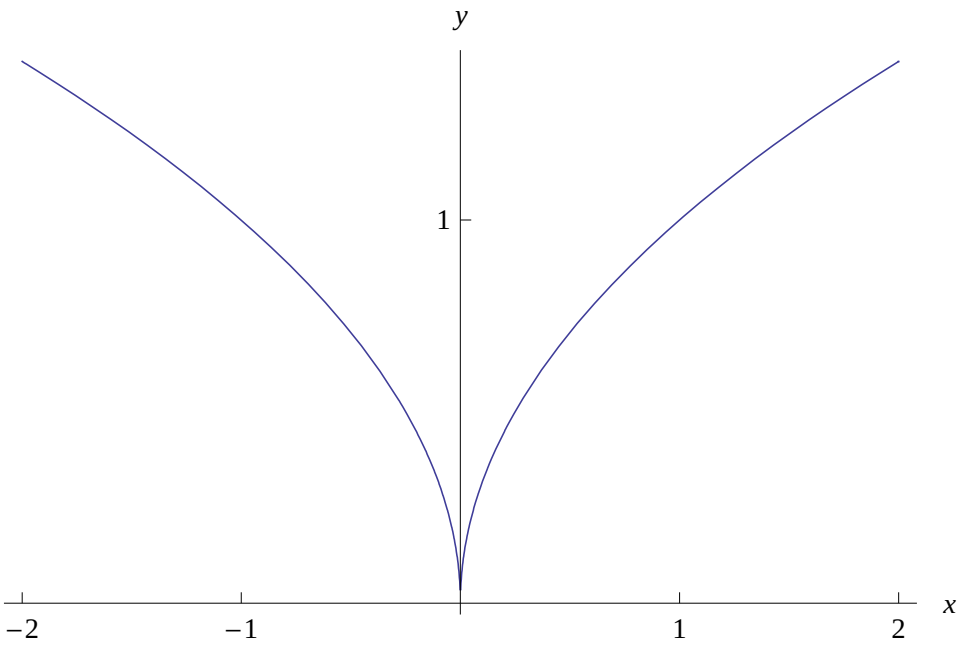

Figura 3: Grafico della funzione $f(x) = \sqrt{x}$. Nell'origine il grafico è privo di retta tangente, onde non è ivi differenziabile.

3 Differenziabilità secondo Stolz. Funzioni di n variabili

Sia A un campo (limitato o illimitato) di $\mathbb{R}^{n>1}$. Consideriamo la funzione:

$$f : A \to \mathbb{R} \tag{14}$$

Preso ad arbitrio $P(x_1, x_2, ..., x_n) \in A$, diamo n incrementi alle varibili indipendenti: $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$ tali che $Q(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, ..., x_n + \Delta x_n) \in A$. L'incremento della funzione f relativo a $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$ è:

$$\Delta f = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, ..., x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_n), \tag{15}$$

che può essere denotato con la notazione abbreviata:

$$\Delta f = f(Q) - f(P)$$

La (15) è una funzione di $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$:

$$\Delta f : E_P \to \mathbb{R}, \tag{16}$$

dove

$$E_P = \{(\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n) \in \mathbb{R}^n \mid (x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, ..., x_n + \Delta x_n) \in A\}$$

Denotando con ρ la distanza tra P e Q:

$$\rho = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (\Delta x_k)^2},$$

segue che Δf è una funzione reale della variabile reale ρ:

$$\begin{aligned} &\Delta f : S \to \mathbb{R} \\ &\Delta f : \rho \to \Delta f(\rho), \quad \forall \rho \in S, \end{aligned}$$

dove $S \subseteq [0, +\infty)$. La funzione $\Delta f(\rho)$ è manifestamente un infinitesimo nel punto $\rho = 0$:

$$\lim_{\rho \to 0} \Delta f(\rho) = 0$$

Ciò premesso, la definzione (1) può essere generalizzata a n variabili nel modo che segue:

Definizione 7

$$f \text{ è } \textbf{\textit{differenziabile secondo Stolz}} \text{ nel punto } P) \overset{def}{\iff} \exists a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R} \mid \lim_{\rho \to 0} \frac{\Delta f - \Sigma_{k=1}^{n} a_k \Delta x_k}{\rho} = 0 \tag{17}$$

La proposizione (2) e il corollario (3) si generalizzano a n variabili nella proposizione:

Proposizione 8 *Se f è differenziabile secondo Stolz nel punto $P(x_1, ..., x_n) \in A$, allora f è ivi dotata di derivate parziali del primo ordine, risultando $a_k = f_{x_k}(P)$.*

In virtù di tale proposizione, la (17) si scrive:

$$f \text{ è } \textbf{differenziabile secondo Stolz} \text{ nel punto } P) \overset{def}{\iff} \lim_{\rho \to 0} \frac{\Delta f - \Sigma_{k=1}^{n} f_{x_k}(P) \Delta x_k}{\rho} = 0$$

Dimostriamo la seguente proprietà:

Proprietà 9 *Sia f differenziabile in $P \in A$.*

$$\exists h \in \{1, 2, ..., n\} \mid f_{x_h}(P) \neq 0 \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} f_{x_k}(P) \Delta x_k \text{ è (per } \rho \to 0) \text{ la parte principale di } \Delta f$$

Cioè, se almeno una delle derivata parziali è diversa da zero nel punto P, allora $\Sigma_k f_{x_k}(P) \Delta x_k$ è la parte principale di Δf.

Dimostrazione. Si tratta di dimostrare che $\Sigma_k f_{x_k}(P) \Delta x_k$ è (per $\rho \to 0$) è un infinitesimo dello stesso ordine di ρ, dato che abbiamo assunto come infinitesimo campione la funzione $g(\rho) = \rho$. Dobbiamo cioè far vedere che:

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\sum_{k=1}^{n} f_{x_k}(P) \Delta x_k}{\rho} = l \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Per ipotesi f è differenziabile in P, onde:

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta f-\sum_{k=1}^{n}f_{x_k}(P)\,\Delta x_k}{\rho}=0,$$

da cui

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta f}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\sum_{k=1}^{n}f_{x_k}(P)\,\Delta x_k}{\rho}$$

Calcoliamo il limite a secondo membro con il seguente artificio [1]: per $\varepsilon>0$, poniamo $\Delta x_h=\varepsilon$, $\Delta x_{k\neq h}=\varepsilon^2$. Quindi

$$\rho=\sqrt{(\Delta x_h)^2+\sum_{\substack{k=1\\k\neq h}}^{n}(\Delta x_k)^2}=\sqrt{\varepsilon^2+(n-1)\,\varepsilon^4}=\varepsilon\sqrt{1+(n-1)\,\varepsilon^2}$$

per cui:

$$\begin{aligned}\lim_{\rho\to 0}\frac{\sum_{k=1}^{n}f_{x_k}(P)\,\Delta x_k}{\rho}&=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f_{x_h}(P)+\varepsilon\sum_{\substack{k=1\\k\neq h}}^{n}f_{x_k}(P)}{\sqrt{1+(n-1)\,\varepsilon^2}}\\&=\lim_{\varepsilon\to 0}f_{x_h}(P)=f_{x_h}(P)\neq 0,\end{aligned}$$

onde l'asserto. ■

Dallo sviluppo della dimostrazione si stabilisce poi che nelle ipotesi poste, Δf è un infinitesimo del primo ordine, avendosi:

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta f}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\sum_{k=1}^{n}f_{x_k}(P)\,\Delta x_k}{\rho}=f_{x_h}(P)\neq 0$$

Definizione 10 *La funzione lineare omogenea delle n variabili* Δx_1, Δx_2, ..., Δx_n*:*

$$\sum_{k=1}^{n}f_{x_k}(P)\,\Delta x_k$$

si dice ***differenziale totale di*** f ***nel punto*** P *e si indica con* df*, onde:*

$$df=\sum_{k=1}^{n}f_{x_k}(P)\,\Delta x_k$$

Se $f(x_1,...,x_n)=x_h\Longrightarrow f_{x_h}(P)=\delta_{hk}$, dove δ_{hk} è il simbolo di Kronecker, per cui $dx_h=\Delta x_h$ e:

$$df=\sum_{k=1}^{n}f_{x_k}(P)\,dx_k$$

La formula di decomposizione (5) per l'infinitesimo Δf si scrive:

$$\Delta f=df+r(\rho),$$

che per quanto detto è valida se $\exists h \in \{1,2,...,n\} \mid f_{x_h}(P) \neq 0$. In tal caso df (e quindi Δf) è un infinitesimo del primo ordine. È facile convincersi che anche nel caso di n variabili la differenziabilità implica la continuità (ma non il viceversa). Tuttavia, abbiamo una deviazione dal comportamento unidimensionale. Infatti, mentre per una funzione di una variabile l'esistenza della derivata prima è una condizione necessaria e sufficiente, quando si passa a $n > 1$ variabili, l'esistenza delle derivate parziali è condizione necessaria ma non sufficiente. Consideriamo ad esempio la funzione:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sqrt{\left|\prod_{k=1}^{n} x_k\right|}, \tag{18}$$

che è l'analogo a n variabili della funzione (13) (ricordiamo che quest'ultima non è differenziabile in $x = 0$, in quanto non ivi derivabile). Mostriamo che (18) pur essendo dotata di derivate parziali in tutto $\mathbb{R}^n$, non è differenziabile in $(0, 0, ..., 0)$. Senza perdita di generalità consideriamo il caso $n = 2$:

$$f(x, y) = \sqrt{|xy|} \tag{19}$$

Le derivate parziali sono:

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \frac{y}{2\sqrt{xy}}, & \text{se } xy > 0 \\ -\frac{y}{2\sqrt{xy}}, & \text{se } xy < 0 \end{cases}, \quad f_y(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{2\sqrt{xy}}, & \text{se } xy > 0 \\ -\frac{x}{2\sqrt{xy}}, & \text{se } xy < 0 \end{cases}, \tag{20}$$

manifestamente continue in $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Per stabilire l'esistenza delle derivate parziali nel punto $(0,0)$, applichiamo la definizione di derivata parziale, definendo:

$$\phi(x) = f(x, y)$$

In corrispondenza di un incremento arbitrario Δx:

$$\Delta\phi = f(x + \Delta x, y) - f(x, y) = \sqrt{|(x + \Delta x)\, y|} - \sqrt{|xy|},$$

cosicchè:

$$f_x(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta x}$$

Risulta:

$$(x, y) = (0, 0) \Longrightarrow \Delta\phi = 0, \quad \forall \Delta x \in \mathbb{R},$$

per cui $f_x(0,0) = 0$. Allo stesso modo si ha $f_y(0,0) = 0$. Studiamo ora il comportamento delle (20) per $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$. Calcoliamo cioè

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} f_x(x, y), \quad \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} f_y(x, y)$$

Partendo dal punto (x, y) con $xy > 0$ e marciando verso l'origine:

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} f_x(x, y) = \frac{1}{2} \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \sqrt{\frac{y}{x}}$$

Passando a coordinate polari, cioè eseguendo il cambio di variabili $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$:

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} f_x(x, y) = \lim_{r \to 0^+} f_x(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{1}{2}\sqrt{\tan\theta},$$

per cui il limite non esiste, in quanto dipende dalla coordinata θ. Analoga conclusione per $f_y(x, y)$. Riassumendo:

$$f_x(x, y) = 0, \quad \nexists \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} f_x(x, y)$$
$$f_y(x, y) = 0, \quad \nexists \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} f_y(x, y),$$

per cui f_x e f_y non sono continue in $(0,0)$. Abbiamo quindi dimostrato che:

1. f è continua in $\mathbb{R}^2$.

2. f è dotata di derivate parziali in $\mathbb{R}^2$.

3. f_x e f_y non sono continue in $(0,0)$.

Studiamo ora la differenziabilità in $(0,0)$. Applicando la definizione, dobbiamo determinare il limite:

$$\lambda = \lim_{\rho \to 0} \frac{\Delta f - [f_x(0,0)\,\Delta x + f_y(0,0)\,\Delta y]}{\rho}$$

Per quanto visto le derivate si annullano in $(0,0)$, quindi:

$$\lambda = \lim_{\rho \to 0} \frac{\Delta f}{\rho} = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{\sqrt{|\Delta x \Delta y|}}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$$

Passando a coordinate polari (R, φ) nel piano $\Delta x, \Delta y$, eseguendo cioè il cambio di variabili $\Delta x = R\cos\varphi,\ \Delta y = R\sin\varphi$, si ha

$$\lambda = \lim_{R \to 0^+} \sqrt{\frac{1}{2}\,|\sin 2\varphi|},$$

onde il limite non esiste. Ne concludiamo che la funzione $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ non è differenziabile in $(0,0)$. Nelle fig. 4-5 riportiamo i grafici di f e del rapporto $\frac{\Delta f}{\rho}$ in funzione delle variabili $\Delta x, \Delta y$.

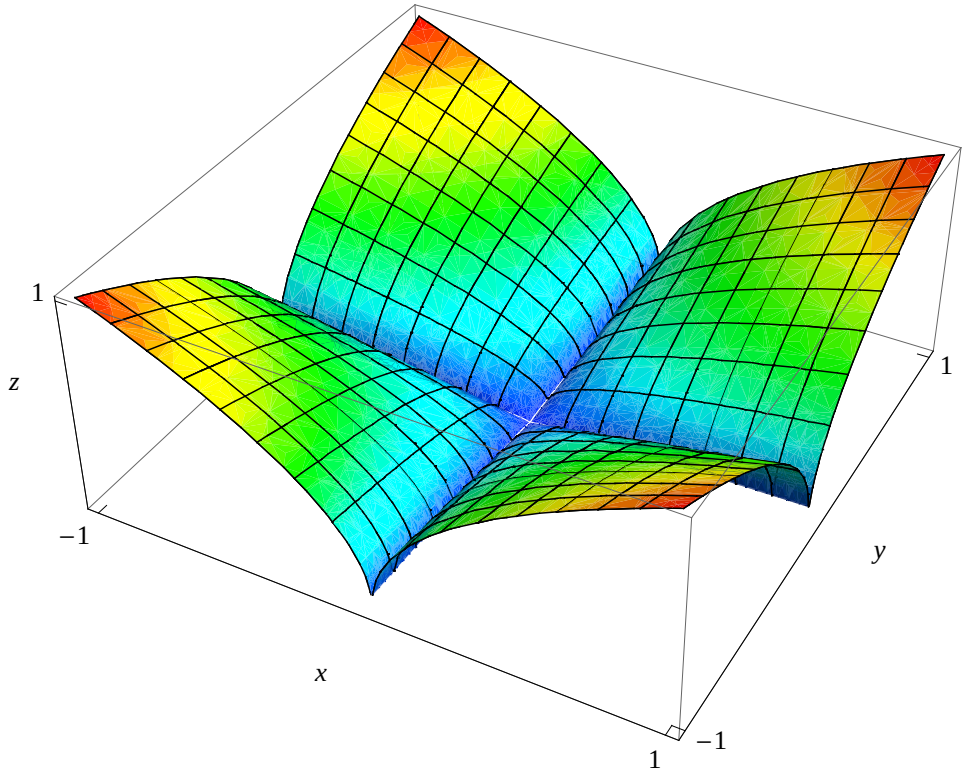

Figura 4: Grafico della funzione $f(x) = \sqrt{xy}$.

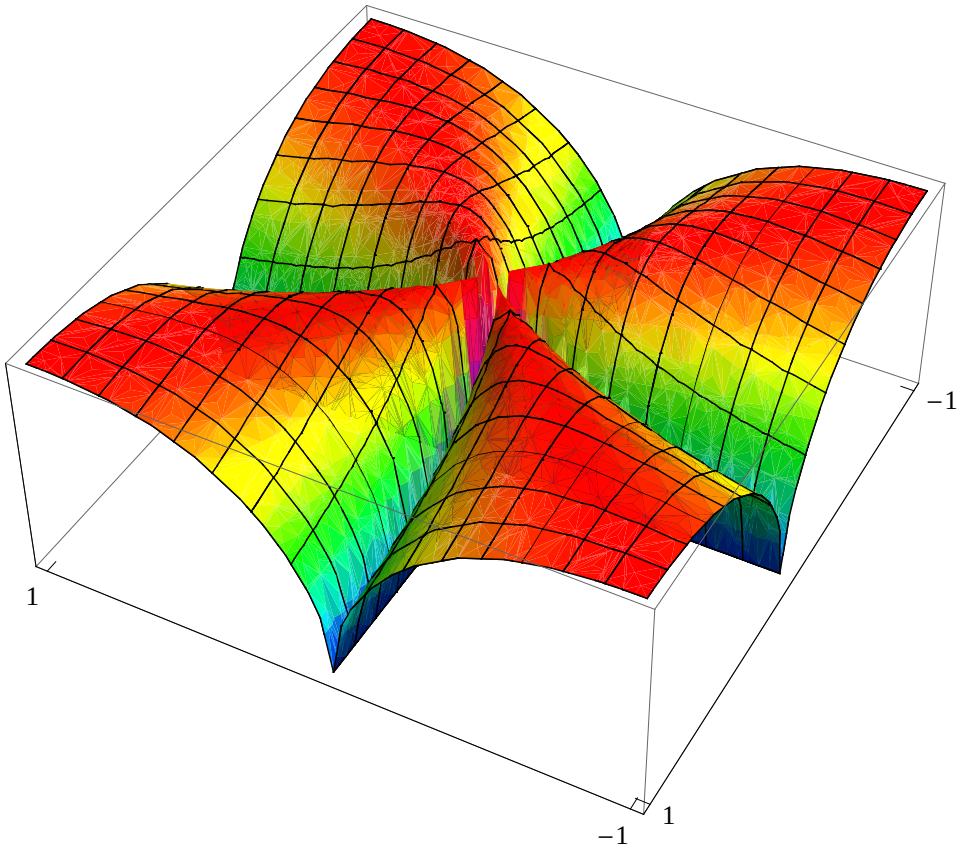

Figura 5: Grafico di $\frac{\Delta f}{\rho}$. Qui le variabili indipendenti sono $\Delta x, \Delta y$, mentre Δf è calcolato in corrispondenza del punto iniziale $(0,0)$. Si noti la discontinuità nell'origine.

Un criterio sufficiente per la differenziabilità è il seguente:

Criterio 11 ***Ipotesi:***

1. *f è dotata di derivate parziali in $P(x_1, ..., x_n) \in A$*
2. *$\exists h \in \{1, 2, ..., n\} \mid f_{x_h}(x_1, ..., x_n)$ esiste in un intorno di P ed è ivi continua*

***Tesi**: f è differenziabile in P.*

Dimostrazione. Senza perdita di generalità, consideriamo il caso $n = 2$, assumendo $f_x(x, y)$ definita in un intorno di $P(x, y)$ risultando ivi continua. Per incrementi arbitrari $\Delta x, \Delta y$ tali che $Q(x + \Delta x, y + \Delta y) \in A$, detto $M(x, y + \Delta y) \in A$, l'incremento della funzione si esprime come:

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(Q) - f(P) \\ &= [f(Q) - f(M)] + [f(M) - f(P)] \\ &= [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)] \\ &= [\phi(x + \Delta x) - \phi(x)] + [\psi(y + \Delta y) - \psi(y)], \end{aligned} \tag{21}$$

essendo

$$\begin{aligned} \phi(x) &\overset{def}{=} f(x, y + \Delta y) \\ \psi(y) &\overset{def}{=} f(x, y) \end{aligned} \tag{22}$$

L'ipotesi di esistenza della derivata parziale $f_x(x,y)$ in un intorno di $P(x,y)$, implica la derivabilità di $\phi(x)$, giacchè:

$$\begin{aligned}\phi'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\phi(x+\Delta x)-\phi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)}{\Delta x}\\ &= f_x(x,y+\Delta y)\end{aligned}$$

Cioè derivabilità in $(x,x+\Delta x)$ e conseguente continuità. Per il teorema di Lagrange:

$$\exists x_*\in(x,x+\Delta x)\mid \phi(x+\Delta x)-\phi(x)=\phi'(x_*)\Delta x$$

Cioè:

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)=f_x(x+\theta\Delta x,y+\Delta y)\Delta x,\quad 0<\theta<1$$

Ma f_x è continua nel suddetto intorno di P:

$$f_x(x+\theta\Delta x,y+\Delta y)=f_x(x,y)+\alpha(\Delta x),$$

dove la funzione $\alpha(\Delta x)$ è un infinitesimo per $\Delta x\to 0$. Per l'ipotesi di esistenza di f_y in P, segue l'esistenza di $\psi'(y)$, giacchè:

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\psi(y+\Delta y)-\psi(y)}{\Delta y} &= \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}\\ &= f_y(x,y)\end{aligned}$$

Da ciò segue che l'incremento di $\psi(y)$ può scriversi:

$$\psi(y+\Delta y)-\psi(y)=\psi'(y)\Delta y+\beta(\Delta y)\Delta y,$$

dove $\beta(\Delta y)$ è un infinitesimo per $\Delta y\to 0$. Quindi:

$$f(x,y+\Delta y)-f(x,y)=f_y(x,y)\Delta y+\beta(\Delta y)\Delta y$$

Cosicchè

$$\Delta f=f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y+\alpha(\Delta x)\Delta x++\beta(\Delta y)\Delta y$$

Segue:

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta f-[f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y]}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\alpha(\Delta x)\Delta x+\beta(\Delta y)\Delta y}{\rho}$$

Ma

$$\left|\frac{\alpha(\Delta x)\Delta x+\beta(\Delta y)\Delta y}{\rho}\right|\le\left|\alpha(\Delta x)\frac{\Delta x}{\rho}\right|+\left|\beta(\Delta y)\frac{\Delta y}{\rho}\right|\le|\alpha(\Delta x)|+|\beta(\Delta y)|,$$

giacchè $\left|\frac{\Delta x}{\rho}\right|\le 1$, $\left|\frac{\Delta y}{\rho}\right|\le 1$. Ciò implica:

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\alpha(\Delta x)\Delta x+\beta(\Delta y)\Delta y}{\rho}=0,$$

onde l'asserto. ■

Secondo alcuni autori [1] una condizione necessaria e sufficiente per la differenziabilità di una funzione definita in un campo A, è $f\in C^1(A)$, cioè f deve essere continua assieme alle sue derivate parziali del primo ordine. Nella dimostrazione del criterio precedente, noi abbiamo seguito le impostazioni di {fic secondo cui non è richiesta la continuità di tutte le derivate parziali. Peraltro, tale criterio è una condizione sufficiente ma non necessaria. In {fic è riportato l'esempio seguente

$$f(x,y)=\begin{cases}0, & \text{se } x,y\in\mathbb{Q}\\ x^2+y^2, & \text{altrimenti}\end{cases},\tag{23}$$

asserendo che si tratta di una funzione differenziabile nel punto $(0,0)$. Per dimostrare tale asserzione, è conveniente considerare il caso di una variabile, per poi generalizzare a $n = 2$. Quindi:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ x^2, & \text{se } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}, \tag{24}$$

Occorre distinguere i casi:

1. $x_0 \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$
2. $x_0 \in \mathbb{Q} - \{0\}$
3. $x_0 = 0$

Nel caso 1 è $f(x_0) = x_0^2$, per cui dobbiamo verificare:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \stackrel{?}{=} f(x_0) = x_0^2$$

Guardiamo il grafico di fig. 6, dove abbiamo tracciato la curva di equazione $y = x^2$ (non è il grafico della funzione (24)!). È chiaro che la funzione non è continua in x_0.

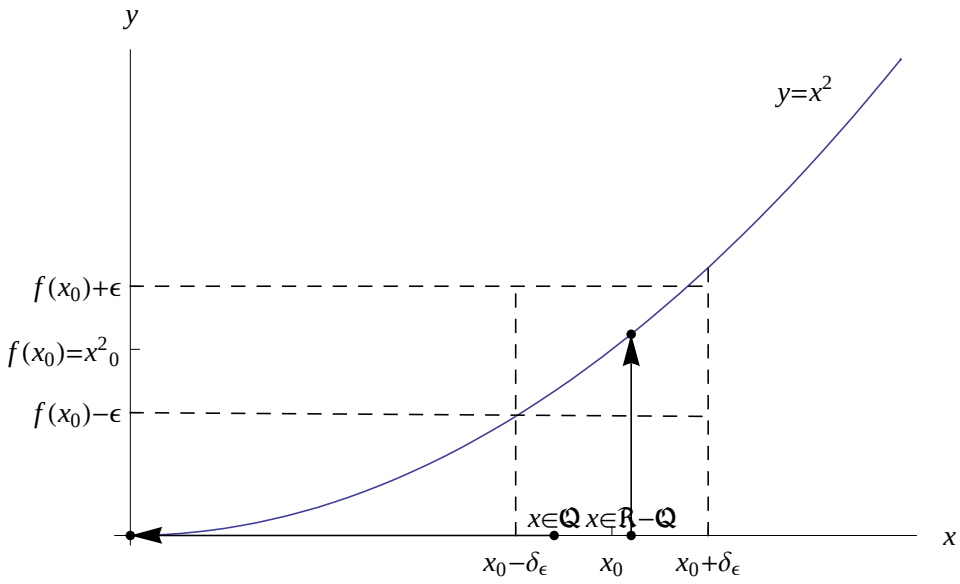

Figura 6: Se $x_0 \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, è $f(x_0) = x_0^2$. Per un qualunque x razionale appartenente all'intorno $I_{\delta_\varepsilon}(x_0) = (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon)$, risulta $f(x) = 0$, mentre per x irrazionale nel medesimo intorno è $f(x) = x^2$, come mostrato nelle frecce.

Nel caso 2 è $f(x_0) = 0$, per cui dobbiamo verificare:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \stackrel{?}{=} f(x_0) = 0$$

Dal grafico di fig. 7, vediamo che anche in questo caso la funzione non è continua in x_0.

Nel caso 3 è $f(0) = 0$, per cui dobbiamo verificare:

$$\lim_{x \to 0} f(x) \stackrel{?}{=} f(0) = 0$$

Esaminando il grafico di fig. 8, vediamo che la funzione è continua in $x = 0$.

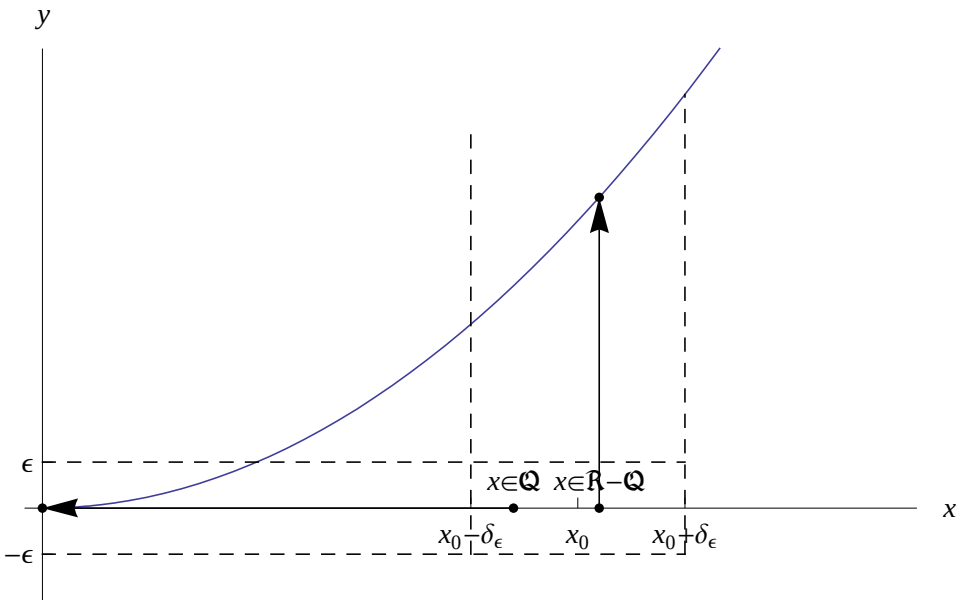

Figura 7: Se $x_0 \in \mathbb{Q}$, è $f(x_0) = 0$. Per un qualunque x razionale appartenente all'intorno $I_{\delta_\varepsilon}(x_0) = (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon)$, risulta $f(x) = 0$, mentre per x irrazionale nel medeisimo intorno è $f(x) = x^2$, come mostrato nelle frecce.

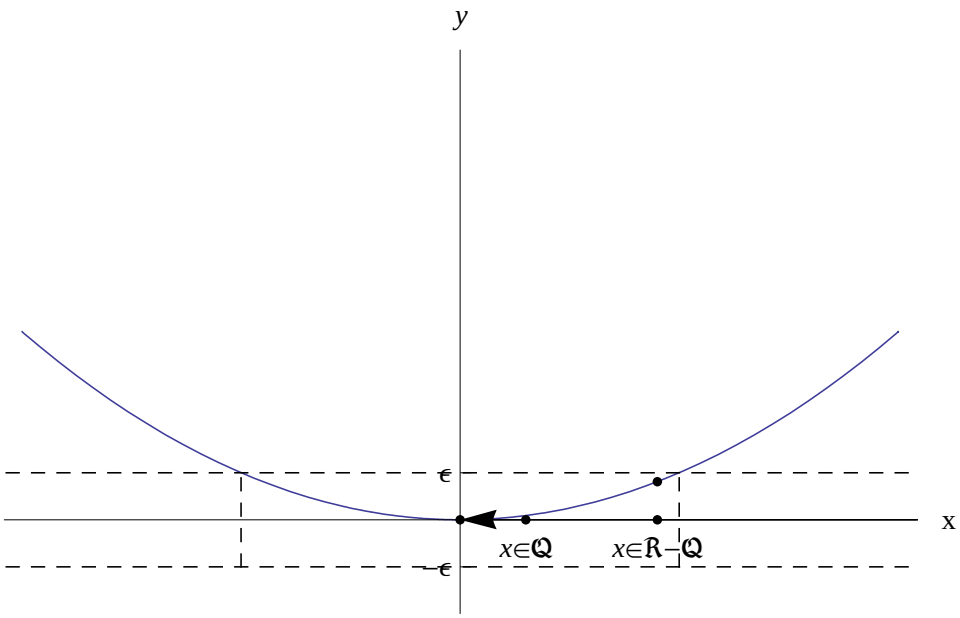

Figura 8: Nel punto $x_0 = 0$ la funzione è continua.

Studiamo ora la derivabilità, e quindi la differenziabilità. È facile convincersi che non esiste il limite:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad \forall x \neq 0$$

Per $x = 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} = 0,$$

per cui $f'(0) = 0$. Ne consegue che la funzione è derivabile in $x = 0$ e quindi ivi differenziabile. A questo punto possiamo generalizzare tali risultati alla funzione di due variabili (23), ottenendo:

1. f è continua solo in $(x, y) = (0, 0)$.
2. È priva di derivate parziali in ogni punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.
3. In $(x, y) = (0, 0)$ le derivate parziali esisono e valgono $f_x(0, 0) = 0,\ f_y(0, 0) = 0$.

Resta da stabilire l'eventuale differenziabilità in $(0, 0)$. Calcoliamo il limite:

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\Delta f - [f_x(0, 0)\,\Delta x + f_y(0, 0)\,\Delta y]}{\rho} = \lim_{\rho \to 0} \frac{\Delta f}{\rho}$$

Nel punto $(0, 0)$:

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\Delta f}{\rho} = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{f(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0,$$

per cui la funzione assegnata è differenziabile secondo Stoltz nel punto $(0, 0)$ pur non essendo dotata di derivate parziali continue in un intorno di tale punto.

Riferimenti bibliografici

[1] Gizzetti A.: *Lezioni di Analisi Matematica*, Veschi, 1971

[2] FicheraG., De Vito L.: *Funzioni analitiche di una variabile complessa,* Veschi, 1987.